

# 経済統計・政府統計の理論と応用 2018<sup>1</sup>

国友直人<sup>2</sup> & 山本拓<sup>3</sup> & 久保川達也<sup>4</sup>

(共編)

2018年1月

<sup>1</sup>文部科学省・科学研究費プロジェクト「経済統計・政府統計の応用からの提言」(2015年度~2018年度)が、2017年12月8日に東京大学経済学研究科において開催した講演をまとめたものである。

<sup>2</sup>明治大学政治経済学部

<sup>3</sup>統計研究会

<sup>4</sup>東京大学経済学研究科

## 前書き

本報告書は、日本学術振興会・科学研究費プロジェクト「経済統計・政府統計の理論と応用からの提言」（2015年度－2018年度、研究代表者：山本 拓）が、2017年12月8日（金）に東京大学小島ホールにおいて開催した2017年度の研究集会における講演内容をまとめたものである。

経済統計とりわけ政府統計は、経済・社会の動向を理解し、政策を実施、評価するためには不可欠な情報であることは言うまでもない。近年はEBPM（Evidence based policy making）ということもよく聞かれ、統計の重要性は一般に広く認識されつつあると思われる。

本プロジェクトの目的は、経済統計・政府統計における主要な課題の、技術的および制度的問題を、統計学的な立場から理論的・学術的に検討すること、ならびに経済統計・政府統計の応用の際の問題点を明らかにし、それらの解決案を模索・提言することである。

本研究集会は、経済統計・政府統計をめぐる技術的・制度的問題点、あるいは応用にかかわる問題を、プロジェクトの過半をしめる統計学の研究者と実際に経済統計・政府統計の作成者または直接的な利用者として携わっている方々との直接的な交流の場を提供しようとするものである。

研究集会は8件の報告からなり、第1セッションでは、まずGDP統計の速報からその後の改訂に関わる景気判断の認識ラグの問題が数量的に検討された、次に既存の国土交通省の住宅流通統計の問題点が代替案との比較において検討された。最後は、把握が困難とされるサービス産業についての価格と生産性について、その問題点・課題が取り上げられた。

第2セッションでは、まず最近大きな話題となっている児童手当等の政府給付金の効果の計量的評価方法について、政府給付金の過小申告とその補完に対応する新しい手法が提案された。次に、現在は十分に把握されていない資産の世代間移転（相続）のデータ推計方法が紹介された。これは分配格差の時代的变化や相続税評価の検討の基礎となるものである。

第3セッションは統計的手法の問題を取り上げており、まずは小地域統計の最新理論と応用例が紹介された。次に匿名化問題に関して、例えば所得の内訳情報の秘匿をどのように行うかについての理論的アプローチが提案された。最後は、マクロ時系列データにおいて、長期、季節性、短期などの要因に分解する方法についての考え方が提案された。

上記のように多岐にわたるトピックを扱う研究集会が、経済統計・政府統計に様々な形で関わる人々の刺激となり、今後の各種統計の改善の一助になることを期待する次第である。

2018年1月

編者

## 科学研究プロジェクト「経済統計・政府統計の理論と応用」研究集会

日程： 2017年12月8日(金)

会場： 東京大学経済学部小島ホール2階 小島コンファレンスルーム

オーガナイザー： 国友 直人・山本 拓

プログラム：

<挨拶>

13:00～13:05 山本 拓（一橋大学・統計研究会）

<セッション I> 政府統計・経済統計の諸問題 1

Chair: 川崎 茂（日本大学）

13:05～13:40 「認識ラグとリアルタイム意思決定の影響～費税増税を巡る EBPM の適否について～」 小巻 泰之（日本大学）

13:40～14:15 「住宅統計の問題点と住宅政策－日本の既存住宅流通市場は本当に小さいのか－」 原野 啓（日本住宅総合センター）

14:15～14:50 「サービス産業における価格と生産性の計測」 深尾 京司（一橋大学）

<休憩>

<セッション II> 政府統計・経済統計の諸問題 2

Chair: 川崎 能典（統計数理研究所）

15:00～15:35 「Estimating the Impacts of Program Benefits: Using Instrumental Variables with Underreported and Imputed Data」 Melvin Stephens, Jr., (University of Michigan)、\*宇南山 卓（一橋大学）

15:35～16:10 「世代間移転と相続税」 北村 行伸（一橋大学）

<休憩>

<セッション III> 経済統計の理論と応用

Chair: 大森 裕浩（東京大学）

16:20～16:55 「混合効果モデルと小地域統計」 久保川 達也（東京大学）

16:55～17:30 「匿名性を確保した所得等内訳情報の作成」 星野 伸明（金沢大学）

17:30～18:05 「多次元トレンド・季節性・ノイズの SIML 分析と公的データへの応用」 国友 直人（明治大学）

\*は共著の場合の報告者

## **Theory and Applications of Economic and Government Statistics 2018**

### **Abstract**

This report is a summary of the unpublished talks and papers presented at the third conference held on December 8, 2017 under the title "Theory and Applications of Economic Statistics and Government Statistics". The topics of the talks are on (i) recent issues of official and economic statistics, (ii) applications of economic statistics, and (iii) statistical methodologies for economic statistics. The papers presented at the third conference have been written in Japanese or English.

# 認識ラグとリアルタイム意思決定の影響 ～消費税増税を巡るEBPMの適否について～

日本大学  
小巻泰之

## 0. Contents

(論点) 消費税増税の影響はどの時点で認識されている  
のか

1. 消費税増税の経済的な影響
2. 新聞情報
3. GDP統計
4. 政府(内閣府と日本銀行)の判断
5. 民間エコノミストの判断(2014年)
6. 企業・家計の状況 ～期待インフレ率を用いた分析～
7. まとめ

# 1 消費税増税の経済的な影響

## 1-1 経済的な影響

客観的証拠に基づく判断・評価  
*Evidence Based Policy Making (EBPM)*



公開情報 (Public information) + 私的情報・経験 (Private information)

(論点) 消費税増税の影響は、どの時点で認識されているのか

- ① 新聞情報
- ② GDP統計 (リアルタイムデータと改定後のデータ)
- ③ 政府 (内閣府と日本銀行) の景気判断
- ④ 民間エコノミストの判断
- ⑤ 市場の判断
- ⑥ 一般の企業・消費者の判断

## 1-2 経済的な影響

### 1. 消費税増税の効果

- ①実質購買力の低下(期待インフレ率の上昇による消費の悪化)
- ②消費の増加(異時点間の代替効果) ←耐久消費財or非耐久消費財

### 2. Unconventional Fiscal Policyは日本でも成立しているのか

(定義) D'Acunतो, Hoang and Weber(2016)より

- 財政的に中立かつ時間的に整合性がある中で, 将来の付加価値税率引き上げをアナウンスすることにより生じる効果のこと

- ①インフレ期待を上昇させる
- ②消費を増加させる

(内容)

- ドイツでは, 予期せずに2005年11月に, 2007年1月からのCTAX税率引上げのアナウンスがあった.
- GfKデータでみれば, ドイツの期待インフレ率は上昇し, 2007年1月以降実際のインフレ率も上昇した.
- 耐久消費財の消費意欲が34%増加した.

## 1-3 先行研究(1): インフレ期待と消費

アメリカの状況に関して

Bachmann, Berg, and Sims, 2012

- Michigan Survey of Consumers
- インフレ期待の増加と消費増加との関係は統計的に支持されない.

Burke and Ozdagli, 2014

- RAND's American Life Panelパネルデータ(2009年4月-2012年11月)
- NY Fed Survey of Consumer Expectations
- インフレ期待の増加と消費増加との関係は統計的に支持されない.
- 期待インフレ率の上昇は消費を減少させるネガティブな所得効果により消費を減少させているのとみられる.

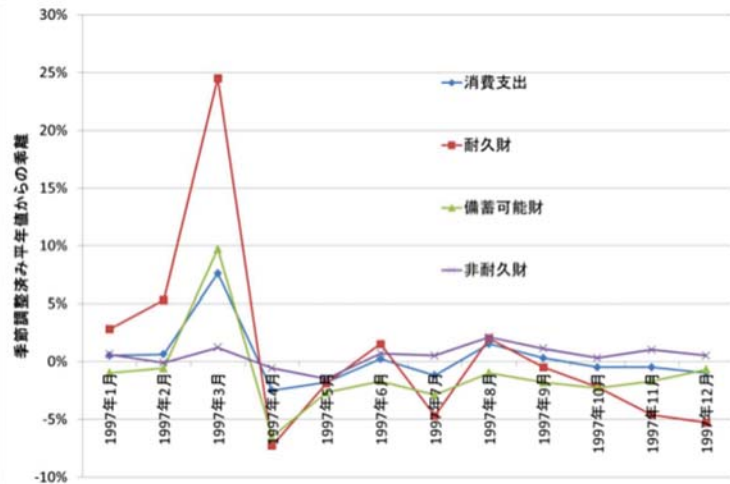
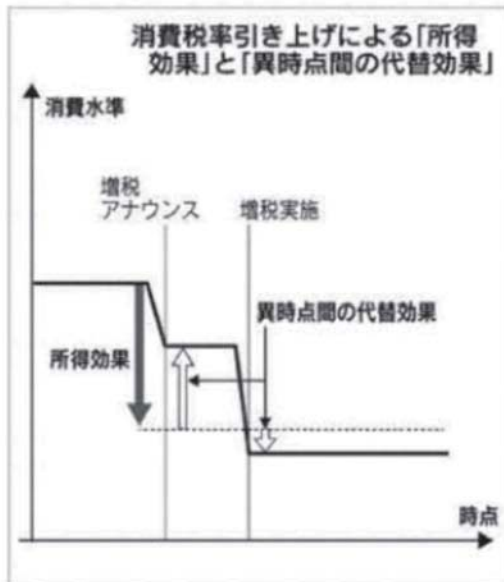
Crump, Eusepi, Tambalotti, and Topa, 2015

- FRBNY Survey of Consumer Expectations, June 2013 through May 2015
- インフレ期待の増加と消費増加との関係は統計的に支持される

## 1-4 先行研究(2): インフレ期待と消費

Cashin and Unayama, 2012

- 変更アナウンス時点で所得効果「生涯所得の低下により消費悪化」が生じる
  - 相対価格の変化により異時点間の代替効果が生じる: 備蓄可能な非耐久財
  - 駆け込み需要: 耐久財(その後の消費には影響しない)
- 家計は税率変更を織り込んで、所得効果から早い段階から消費を抑制



(注)Cashin and Unayama(2012)より引用

## 1-5 先行研究(3): インフレ期待と消費

Ichie and Nishizaki, 2015

- 生活意識に関するアンケート調査(年4回)
- インフレ予想が高い回答者ほど、家計支出が1年前と比べて増えたと回答し、先行きは減らすと答える傾向が示された。
- 標準的モデルの結論を支持するもの。また、そうした関係は、資産家とシニア層で、相対的に強いことを示唆する結果も得られた

福田,計 2002

- 90年代の経済政策決定のニュースが株価、為替レート、長期利子率に与えた影響をイベントスタディの観点から分析
- 日次データでの分析
- 90年代の前半後半で効果が異なる。前半はポジティブに評価する市場の反応が顕著



## 2 新聞情報

1. 97年, 2014年とも, 増税後の反動減の影響が明確になった7月末のデータ公表後, 一気に, 景況感が悪化している.
2. 認知のラグは3か月程度
3. 2014年は, 増税後, 週次で小売業の販売動向をヒアリング調査し, 公表していたが, 効果は疑問.

### 2-1 97年消費税増税(過去の経験)

	増税の影響	主な新聞報道(評価)	
1997年1月		個人消費足元ふらつく, 盛り上がり欠いた歳末商戦, 駆け込み需要不発(96年12月28日) 日経産業消費研調べ, 耐久消費財中心に駆け込み, 8.9%世帯が既に購入実施(1月23日) 新車販売, 96年9月から4か月連続プラスだが, 大幅な値下げ合戦など激しい販売競争の結果(1月30日)	
2月	駆け込み購入	消費税上げあと2カ月, 駆け込み需要局地的, 消費不透明感増(2月4日) 税率引上げ影響調査, 駆け込み需要, 盛り上がり欠け「谷」懸念(2月18日) 自動車ローン, 金利下げ広がる, 駆け込み需要狙う(2月19日)	
3月		97年2月自動車販売, 11.0%増の大幅増, 駆け込み需要は15万台超す勢い(3月4日) 日経経済概況, 需要反動減小さい, 駆け込みは一部(3月19日) スーパー各社, 駆け込み需要, 火付けに躍起(3月20日) 反動減は予想より小さい見通し, 景気回復は緩慢(3月31日)	
4月		大型店, 「反動減は予想の範囲内」で早期回復を期待(4月3日) 97年3月大型小売店販売14.1%増, 高額商品伸びる(4月29日)	プラス評価
5月	反動減	97年4月小売売り場での反動減は「予想の範囲内に落ち着いた」(5月3日) 97年4月百貨店売上高, 東阪ともに下落率最大に, 東京14.4%, 大阪16.1%減(5月16日) 97/4月-9.3%, 4か月連続マイナス, 持家中心に, 建設省見込み147万戸の想定範囲内との見方(5月31日)	
6月		企画庁「駆け込み需要は思ったより大きかったが, 雇用環境や所得の堅調な伸びを背景に消費の基調もある程度強い」(6月14日) 自工会会長「97/7月以降の新車登録は前年同月比並みで推移する」と反動減の終息を見通す(6月18日) 家電の夏商戦, 6月の低温で苦戦, 猛暑で7月後半から回復(7月10日)	
7月		97/6月百貨店売上高, 東京・大阪ともマイナス, 駆け込みの蓄え払拭(7月16日) 在庫水準は93/2以来の水準に, 乗用車や家電で駆け込み需要で減った在庫を積み増す動きが出た(7月31日)	マイナス評価
8月		97/8月月例経済報告, 尾を引く消費税ショック, 政府認める。(8月6日) 97/7月全国百貨店売上3.4%減, スーパー-4.1%減, 反動減, 特別減税廃止, 天候不順が影響(8月26日)	
9月		97/7月小売業売上2.4%減, エアコン, 冷蔵庫, 自動車など高額商品不振, 天候不順も影響(9月3日) 4-6月GDP, 年率11.2%減, 23年ぶり大幅減, 消費税上げ響く(9月12日)	

(注)新聞報道は, 日本経済新聞, 日本流通新聞における見出しについて表記している。日付は新聞掲載日。

- ・当初は駆け込みを単なる需要シフトとみて「**想定内**」と判断。しかも, **駆け込み購入**だけではない, **消費実勢の強さがみられると評価され, 利上げ報道も出る。**
- ・6月後半以降, 他の要因(低温)で消費振るわず。7月中旬以降, **反動減が「想定」超える。**
- ・意図せざる在庫の積み上がりへ

## 2-2 97年の経験を踏まえた政府の対応

- 経済産業省:「専門量販店販売統計調査」を2014年1月より公表:家電大型専門店,ドラッグストア,ホームセンターの販売動向を把握
- 内閣府:「消費税率引上げ後の消費動向等について」として2014年4月から週次ベースで公開

## 2-3 認知ラグの影響 ①2014年消費増税の効果

	増税の影響	主な新聞報道(評価)	
2014年1月	↑ 駆け込み購入	増税「影響限定的」52%、景気回復、消費下支え、全国小売業調査、33%がセールで対策(1月5日) 白物家電、駆け込み盛況、センサー感知エアコン、静かな洗濯機、東芝・三菱電、冷蔵庫2割増産(1月28日) 97年の増税時と比べると—駆け込み需要抑制的か、物価水準など背景に(1月31日)	
2月		買いだめ需要取り込め、缶詰や飲料、洗剤など、増税控え特設売り場(2月1日) 「駆け込み」照準にセール、スーパー、まとめ買い促す、他社の時期探り神経戦も(2月17日) 駆け込み需要、建機・セメントも、1月出荷額が急増、震災復興やマンション建設(2月28日)	
3月	↓ 反動減	2月の新車販売、速報値、駆け込み需要で18%増、軽の販売、2月過去最高(3月4日) 白物家電、駆け込み続く、国内出荷額、2月3割増—高額品伸びる(3月21日) 駆け込み最終局面—3連休、スーパー販売5割増、五月人形や酒、売れ筋幅広く(3月26日)	↑ プラス 評価
4月		駆け込み反動「想定内」(4月18日) 反動減「長期化せず」大勢、「6月末までに回復」73%、「影響なし」は半数弱、1都9県、関東財務局調査(4月24日) 増税前消費伸び、設備投資、4期連続プラス(5月15日)	
5月	↓ 反動減	反動減、見込みより小幅(5月23日) 小売販売額、4月4.4%減、反動、前回増税より大きく(5月29日)	↓ マイナス 評価
6月		家電販売実績に持ち直しの動き(6月8日) 6月の個人消費、判断を上方修正、月例報告(6月25日)	
7月		街角景気2ヵ月連続改善、家電も回復傾向に(7月9日) デフレ脱却「着実に前進」、経済財政白書、駆け込み需要2.5~3兆円(7月25日) 鉱工業生産、6月3.3%低下、4-6月GDP7.1%減、民間推計、増税後の「谷」予想以上(7月31日)	
8月		反動減、97年より強く、GDP実質6.8%減(8月13日) 景気回復に足踏み感、消費、悪天候冷や水、車や電子部品には薄日(8月30日)	
9月		景気回復もたつく、増税・天候、消費に影(9月7日) デジタル家電—今年の市場、6.1%増の見通し、駆け込み特需、反動減を上回る(9月24日)	

(注)新聞報道は、日本経済新聞、日本流通新聞における見出しについて表記している。日付は新聞掲載日。

### 2014年も、97年とほぼ同様の動きとなった。

- 当初は弱め(駆け込みが弱い)→4-6月期頃、強めの見方→7月中旬以降、**反動減が「想定」超える。**
- 意図せざる在庫の積み上がりへ

## 3 GDP統計

1. 駆け込み需要の規模が、改定を経るごとに小さくなっている。特に、97年は1/3の規模に縮小している。
2. 97年の反動減も同様に、1/3の規模に縮小している。
3. 新聞報道での数字は、直近に利用可能なデータでの比較を行っており、97年当時の雰囲気伝えていない

### 3-1 GDPの改定により「異時点間の代替効果」は大幅に縮小

		(単位:年率換算, %)				
	リアルタイム	2004年11月 時点	2005年12月 時点	2011年11月 時点	2014年3月 時点	2017年11月 時点
96年10-12月期	3.9	5.9	6.1	5.9	6.1	5.0
<b>97年1-3月期</b>	<b>6.6</b>	<b>3.1</b>	<b>2.6</b>	<b>3.7</b>	<b>3.1</b>	<b>2.0</b>
<b>97年4-6月期</b>	<b>-11.2</b>	<b>-4.0</b>	<b>-4.2</b>	<b>-3.4</b>	<b>-3.9</b>	<b>-4.4</b>
97年7-9月期	3.1	0.0	-1.4	-1.7	1.7	2.2
97年10-12月期	-0.7	2.7	2.3	1.2	-0.4	1.0
98年1-3月期	-5.3	-4.0	-6.8	-7.2	-7.3	-5.5
98年4-6月期	-3.3	-4.6	-2.0	-1.9	-2.2	-1.7
98年7-9月期	-2.6	3.6	2.4	1.6	1.2	0.7
98年10-12月期	-3.2	0.3	-0.1	0.9	2.2	4.4
	リアルタイム	2014年11月 時点	2015年12月 時点	2016年12月 時点	2017年11月 時点	2017年12月 時点
2013年10-12月期	1.0	-1.6	-0.7	-0.8	-0.4	-0.0
<b>2014年1-3月期</b>	<b>5.9</b>	<b>6.7</b>	<b>5.0</b>	<b>4.9</b>	<b>4.3</b>	<b>3.3</b>
<b>2014年4-6月期</b>	<b>-6.8</b>	<b>-7.3</b>	<b>-7.2</b>	<b>-7.1</b>	<b>-7.3</b>	<b>-6.6</b>
2014年7-9月期	-1.6	-1.6	-2.8	-0.8	-0.6	-0.2
2014年10-12月期	2.2		1.8	2.1	3.0	2.8
2015年1-3月期	2.4		4.4	6.3	4.6	5.1
2015年4-6月期	-1.6		-0.5	-0.5	-0.1	0.5
2015年7-9月期	-0.8		1.0	0.8	0.7	0.3
2015年10-12月期	-1.4			-1.8	-1.0	-0.9

注: 数値はすべて実質GDP成長率(年率換算)

- 駆け込み需要の規模が、改定を経るごとに小さくなっている。特に、97年は1/3の規模に縮小している
- 97年の反動減も同様に、1/3の規模に縮小している。

### 3-2 過去の評価に用いるのは直近の改定後のデータ

- 97年の増税時と比べると、駆け込み需要の勢いが強い割には、反動減はそれほど大きくないとの見方が強い。
- 民間の主要調査機関10社の予測(平均値)によると、1-3月期の実質GDP成長率(年率換算)は4.8%で前回増税前の3.1%より高い。
- 逆に4-6月期は-3.7%と前回の-3.9%とほぼ変わらない」  
(読売新聞, 2014年4月1日)

正予算、本予算を組んできた。対応はしっかり行われていると考えている」と述べて、対策は万全だと考えを強調した。

■ 前回との違い  
反動減の兆しはすでにみられている。  
経済産業省が31日に発表した2月の鉱工業生産指数は、前月比で3.3%下がった。3か月ぶりのマイナスだった。首都圏の大雪で、自動車の工場が操業を停止した影響が大きい。企業が増税後に需要が減ることを見越して、すでに生産を減らしている(農林中金総研)

合研究所の南武志氏との見方もある。  
ただ、97年の増税時と比べると、駆け込み需要の勢いが強い割には、反動減はそれほど大きくないとの見方が強い。  
民間の主要調査機関10社の予測(平均値)によると、1-3月期の実質GDP成長率(年率換算)は4.8%で前回増税前の3.1%より高い。  
逆に4-6月期は-3.7%と前回の-3.9%とほぼ変わらない」

ぶりに「デフレ」の表現を削った。  
消費増税に加えて特別減税の廃止など、前回は負担増メニューが多かったが、今回は住宅ローン減税の拡充や約1兆円規模の減税など、景気下支えの政策が目立つ。春闘で正社員の基本給を一律に引き上げるペースアップ(ペア)を決める大手メーカーが相次いだことで、増えた所得が消費に回る効果も期待できる。  
日本経研の小方尚子主任研究員は「個人消費は落ち込むものの、前回増税時のような景気の腰折れは避けられそうだと指摘する。

97年増税時と今回の実質GDP成長率の比較  
(前増比年率)  
増税実施(4月)  
97年 1996年 2013年  
10-12 1-3 4-6 7-9 10-12 1-3(月期)  
※2014年1-3月期以降は主要調査機関10社の予測平均値

## 4 政府(内閣府と日本銀行)の判断

(97年の場合)

- 景気指標の悪化が判明した時点(97年7月末頃)より、遅く判断を変更  
内閣府:97年11月, 日本銀行:97年10月(原因を消費税と明記)

(2014年の場合)

- 2014年は判断二転三転している
  - <内閣府> 4月~6月:反動減で弱い動き  
7月~8月:反動は和らぎつつある  
9月~10月:反動減の長期化をリスクとして明記  
11月:消費マインドの低下にリスクを変更  
12月:消費の判断を上方修正
  - <日本銀行> 5月~7月:反動がみられる  
8月以降:反動の影響は和らぐ  
ただし, 10月~11月は生産面で反動の影響あり  
12月:反動の影響は全体として和らぐ

## 4-1 景気指標の悪化が判明した時点(97年7月末頃)より、遅く判断を変更

		内閣府(旧経済企画庁)		日本銀行	
	発表日	総括判断		発表日	総括判断
1996年8月	1996/8/7	回復の動きを続けている。ただし、足元のところ、そのテンポは緩やかである		1996/8/27	緩やかな回復を続けており、回復の動きに拡がりが見られている
1996年9月	1996/9/6	回復の動きを続けている。ただし、足元、そのテンポは緩やかである		1996/9/24	緩やかな回復を続けている
1996年10月	1996/10/11	回復の動きを続けている。ただし、足元、そのテンポは緩やかである		1996/10/25	緩やかな回復を続けている
1996年11月	1996/11/12	回復の動きを続けている。そのテンポは緩やかであるものの、民間需要は堅調さを増している		1996/11/22	緩やかな回復を続けている
1996年12月	1996/12/10	回復の動きを続けている。そのテンポは緩やかであるものの、民間需要は堅調さを増している		1996/12/20	緩やかな回復を続けており、民間需要は底固さを増しつつある
1997年1月	1997/1/14	回復の動きを続けている。そのテンポは緩やかであるものの、民間需要は堅調さを増している		1997/1/24	緩やかな回復を続けており、民間需要の回復力は底固さを増してきている
1997年2月	1997/2/7	回復の動きを続けている。そのテンポは緩やかであるものの、 <b>民間需要は堅調に推移している</b>		1997/2/18	緩やかな回復を続けており、 <b>民間需要は底固さを増している</b>
1997年3月	1997/3/7	回復の動きを続けている。そのテンポは緩やかであるものの、 <b>民間需要は堅調に推移している</b>		1997/3/18	緩やかな回復を続けており、 <b>民間需要は底固さを増している</b>
1997年4月	1997/4/8	回復の動きを続けている。そのテンポは緩やかであるものの、 <b>民間需要は堅調に推移している</b>		1997/4/25	消費税率引き上げに起因する振れを伴いつつも、基調としては緩やかな回復傾向にあり、 <b>民間需要は底固さを増している</b>
1997年5月	1997/5/9	回復の動きを続けている。そのテンポは緩やかであるものの、 <b>民間需要は堅調に推移している</b>		1997/5/20	消費税率引き上げに起因する振れを伴いつつも、基調としては緩やかな回復傾向にあり、 <b>民間需要は底固さを増している</b>
1997年6月	1997/6/10	回復の動きを続けている。そのテンポは緩やかであるものの、 <b>民間需要は堅調に推移している</b>		1997/6/20	消費税率引き上げに伴う <b>駆け込み需要の反動減がみられている</b> が、生産や所得は底固く推移しており、 <b>全体として緩やかな回復基調を続けている</b>
1997年7月	1997/7/11	<b>一時的に回復テンポが緩やかなものになっているものの、堅調な民間需要を中心に景気は回復の動きを続けている</b>		1997/7/24	消費税率引き上げに伴う <b>駆け込み需要の反動が尾を引いている</b> が、生産や所得は底固く推移しており、 <b>全体として緩やかな回復基調を続けている</b>
1997年8月	1997/8/5	<b>一時的に回復テンポが緩やかなものになっているものの、堅調な民間需要を中心に景気は回復の動きがみられる</b>		1997/8/26	<b>消費税率引き上げの影響が引き続きみられている</b> が、生産や所得は底固く推移しており、 <b>全体として緩やかな回復基調を続けている</b>
1997年9月	1997/9/19	<b>足元は回復テンポが緩やかなものになっているものの、民間需要を中心とする景気回復の基調は続いている</b>		1997/9/22	全体として景気の <b>緩やかな回復基調は崩れていない</b>
1997年10月	1997/10/7	<b>足元は回復テンポが緩やかになっており、企業の景況感にも慎重さがみられるものの、民間需要を中心とする景気回復の基調は続いている</b>		1997/10/27	消費税率引き上げなどの影響から、引き続き4月以降の <b>減速局面にあり</b>
1997年11月	1997/11/14	民間需要を中心とする景気回復の基調は失われていないものの、企業の景況感に厳しさがみられ、 <b>景気はこのところ足踏み状態にある</b>		1997/11/26	<b>減速傾向を強めている</b>
1997年12月	1997/12/9	家計や企業の景況感には厳しさが増しており、これが個人消費や設備投資にも影響を及ぼしている可能性があり、 <b>景気はこのところ足踏み状態にある</b>		1997/12/22	<b>このところ停滞色を強めている</b>

## 4-2 判断は二転三転

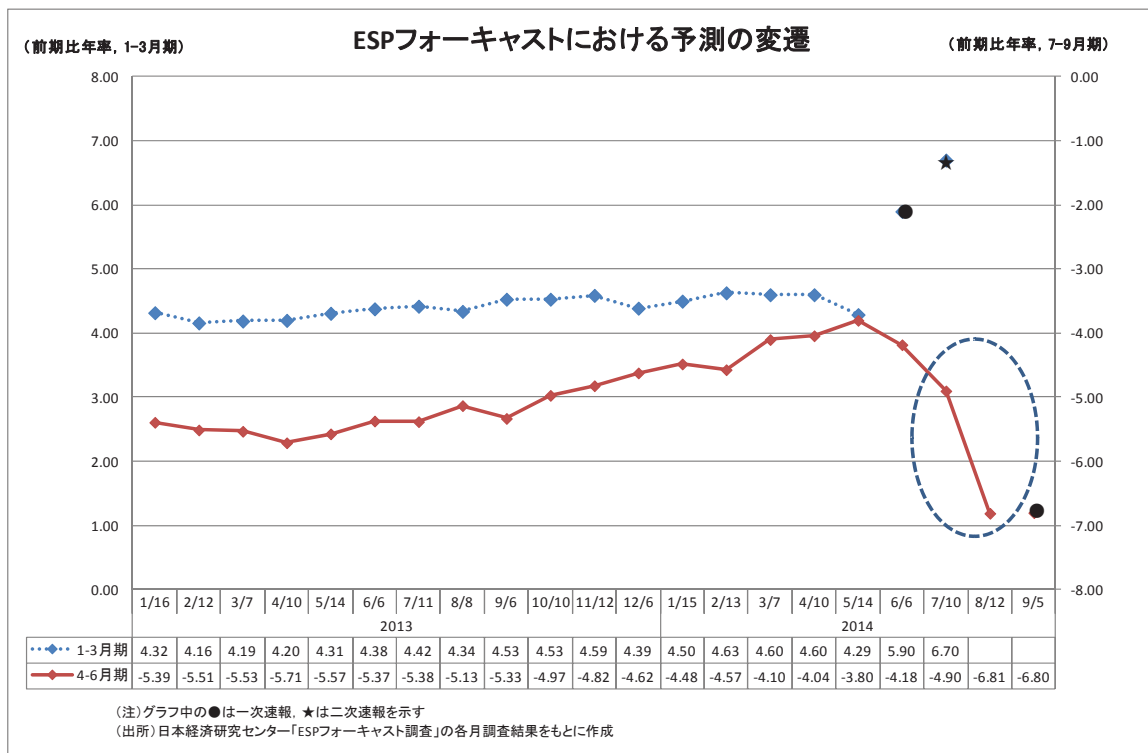
		内閣府		日本銀行	
	発表日	総括判断		発表日	総括判断
2013年8月	2013/8/16	景気は、着実に持ち直しており、自律的回復に向けた動きもみられる。個人消費は、持ち直している		2013/8/9	景気は、緩やかに回復しつつある。個人消費は、消費者マインドが改善するも、引き続き底堅く推移している
2013年9月	2013/9/13	景気は、緩やかに回復しつつある。 <b>個人消費は、持ち直し傾向にある</b>		2013/9/6	景気は、 <b>緩やかに回復している</b> 。個人消費は、 <b>雇用・所得環境に改善の動きがみられる</b> なかで、引き続き底堅く推移している
2013年10月	2013/10/24	景気は、緩やかに回復しつつある。個人消費は、持ち直し傾向にある。		2013/10/7	景気は、緩やかに回復している。個人消費は、雇用・所得環境に改善の動きがみられるなかで、引き続き底堅く推移している
2013年11月	2013/11/22	景気は、緩やかに回復しつつある。個人消費は、持ち直し傾向にある。 <b>消費税率引き上げに伴う駆け込み需要も見込まれる。</b>		2013/11/22	景気は、緩やかに回復している。個人消費は、雇用・所得環境に改善の動きがみられるなかで、引き続き底堅く推移している
2013年12月	2013/12/24	景気は、緩やかに回復しつつある。個人消費は、持ち直している。消費税率引き上げに伴う駆け込み需要及びその反動が見込まれる。		2013/12/24	景気は、緩やかに回復している。個人消費は、雇用・所得環境に改善の動きがみられるなかで、引き続き底堅く推移している
2014年1月	2014/1/17	景気は、緩やかに回復している。個人消費は、一部に消費税率引き上げに伴う <b>駆け込み需要もみられ、増加している</b> 。消費税率引き上げに伴う駆け込み需要及びその反動が見込まれる。		2014/1/23	景気は <b>緩やかな回復を続けており、このところ消費税率引き上げ前の駆け込み需要もみられている</b> 。個人消費は底堅く推移しており、これらの分野では <b>消費税率引き上げ前の駆け込み需要もみられている</b> 。
2014年2月	2014/2/19	景気は、緩やかに回復している。個人消費は、一部に消費税率引き上げに伴う駆け込み需要もみられ、増加している。消費税率引き上げに伴う駆け込み需要及びその反動が見込まれる。		2014/2/19	景気は緩やかな回復を続けており、このところ消費税率引き上げ前の駆け込み需要もみられている。個人消費は底堅く推移しており、これらの分野では消費税率引き上げ前の駆け込み需要もみられている。
2014年3月	2014/3/17	景気は、緩やかに回復している。また、 <b>消費税率引き上げに伴う駆け込み需要が強まっている</b> 。個人消費は、消費税率引き上げに伴う駆け込み需要もあって、増加している。		2014/3/12	景気は緩やかな回復を続けており、このところ消費税率引き上げ前の駆け込み需要もみられている。個人消費は底堅く推移しており、これらの分野では消費税率引き上げ前の駆け込み需要もみられている。
2014年4月	2014/4/17	景気は、緩やかな回復基調が続いているが、 <b>消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動により、このところ弱い動きもみられる</b> 。次第にその影響が薄れ、各種政策の効果が発現するなかで、緩やかに回復していくことが期待される。		2014/4/9	景気は <b>消費税率引き上げの影響による振れを伴いつつも、基調的には緩やかな回復を続けている</b> 。個人消費や住宅投資は、 <b>このところ駆け込み需要の反動がみられている</b> が、基調的には、雇用・所得環境が改善するも底堅く推移している。
2014年5月	2014/5/23	景気は、緩やかな回復基調が続いているが、 <b>消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動により、このところ弱い動きもみられる</b> 。次第にその影響が薄れ、各種政策の効果が発現するなかで、緩やかに回復していくことが期待される。		2014/5/22	<b>消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動がみられているが、基調的には緩やかな回復を続けている</b> 。個人消費や住宅投資は、 <b>このところ駆け込み需要の反動がみられている</b> が、基調的には、雇用・所得環境が改善するも底堅く推移している。
2014年6月	2014/6/20	景気は、緩やかな回復基調が続いているが、 <b>消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動により、このところ弱い動きもみられる</b> 。次第にその影響が薄れ、各種政策の効果が発現するなかで、緩やかに回復していくことが期待される。		2014/6/16	消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動がみられているが、基調的には緩やかな回復を続けている。個人消費や住宅投資は、このところ駆け込み需要の反動がみられているが、基調的には、雇用・所得環境が改善するも底堅く推移している。
2014年7月	2014/7/17	景気は、緩やかな回復基調が続いているが、 <b>消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動も和らぎつつある</b> 。次第にその影響が薄れ、各種政策の効果が発現するなかで、緩やかに回復していくことが期待される。		2014/7/16	消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動がみられているが、基調的には緩やかな回復を続けている。個人消費や住宅投資は、このところ駆け込み需要の反動がみられているが、基調的には、雇用・所得環境が改善するも底堅く推移している。
2014年8月	2014/8/26	景気は、緩やかな回復基調が続いているが、 <b>消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動も和らぎつつある</b> 。次第にその影響が薄れ、各種政策の効果が発現するなかで、緩やかに回復していくことが期待される。		2014/8/11	消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動がみられているが、基調的には緩やかな回復を続けている。個人消費や住宅投資は、 <b>基調的に底堅く推移しており、全体としてみれば駆け込み需要の反動の影響も徐々に和らぎつつある</b> 。
2014年9月	2014/9/19	景気は、 <b>このところ一部に弱さがみられるが、緩やかな回復基調が続いている</b> 。個人消費は、持ち直しの動きが続いているものの、 <b>このところ足踏みがみられる</b> 。ただし、 <b>駆け込み需要の長期化や海外景気の下振れなど、我が国の景気を下押しするリスクに留意する必要がある</b> 。		2014/9/5	景気は消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動がみられているが、基調的には緩やかな回復を続けている。個人消費は、雇用・所得環境が着実に改善するも、基調的に底堅く推移しており、駆け込み需要の反動の影響も徐々に和らぎつつある。
2014年10月	2014/10/21	景気は、このところ弱さがみられるが、緩やかな回復基調が続いている。個人消費は、持ち直しの動きが続いているものの、このところ足踏みがみられる。ただし、 <b>駆け込み需要の長期化や海外景気の下振れなど、我が国の景気を下押しするリスクに留意する必要がある</b> 。		2014/10/8	景気は <b>消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動などの影響から生産面を中心に弱めの動きがみられている</b> が、基調的には緩やかな回復を続けている。個人消費は、雇用・所得環境が着実に改善するも、基調的に底堅く推移しており、駆け込み需要の反動の影響は、ばらつきを伴いつつも全体として和らいできている。
2014年11月	2014/11/25	景気は、個人消費などに弱さがみられるが、緩やかな回復基調が続いている。個人消費は、持ち直しの動きが続いているものの、このところ足踏みがみられる。 <b>消費者マインドの低下や海外景気の下振れなど、我が国の景気を下押しするリスクに留意する必要がある</b> 。		2014/11/20	景気は消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動がみられているが、基調的には緩やかな回復を続けている。個人消費は、雇用・所得環境が着実に改善するも、基調的に底堅く推移しており、駆け込み需要の反動の影響は全体として和らいでいる。
2014年12月	2014/12/19	景気は、個人消費などに弱さがみられるが、緩やかな回復基調が続いている。 <b>個人消費は、消費者マインドに弱さがみられるなかで、底堅い動きとなっている</b> 。消費者マインドの低下や海外景気の下振れなど、我が国の景気を下押しするリスクに留意する必要がある。		2014/12/22	基調的に緩やかな回復を続けており、 <b>消費税率引き上げに伴う駆け込み需要の反動などの影響も全体として和らいでいる</b> 。個人消費は、雇用・所得環境が着実に改善するも、基調的に底堅く推移しており、駆け込み需要の反動の影響は全体として和らいでいる。



## 5 民間エコノミストの判断(2014年)

1. 駆け込み需要を小幅と予測. その結果, 反動減の影響も予測を重ねる毎に, 上方修正(景気への影響は小さい)
2. 2014年8月の予測で, これまでの予測を大幅下方修正. 反動減の影響を大きく織り込む

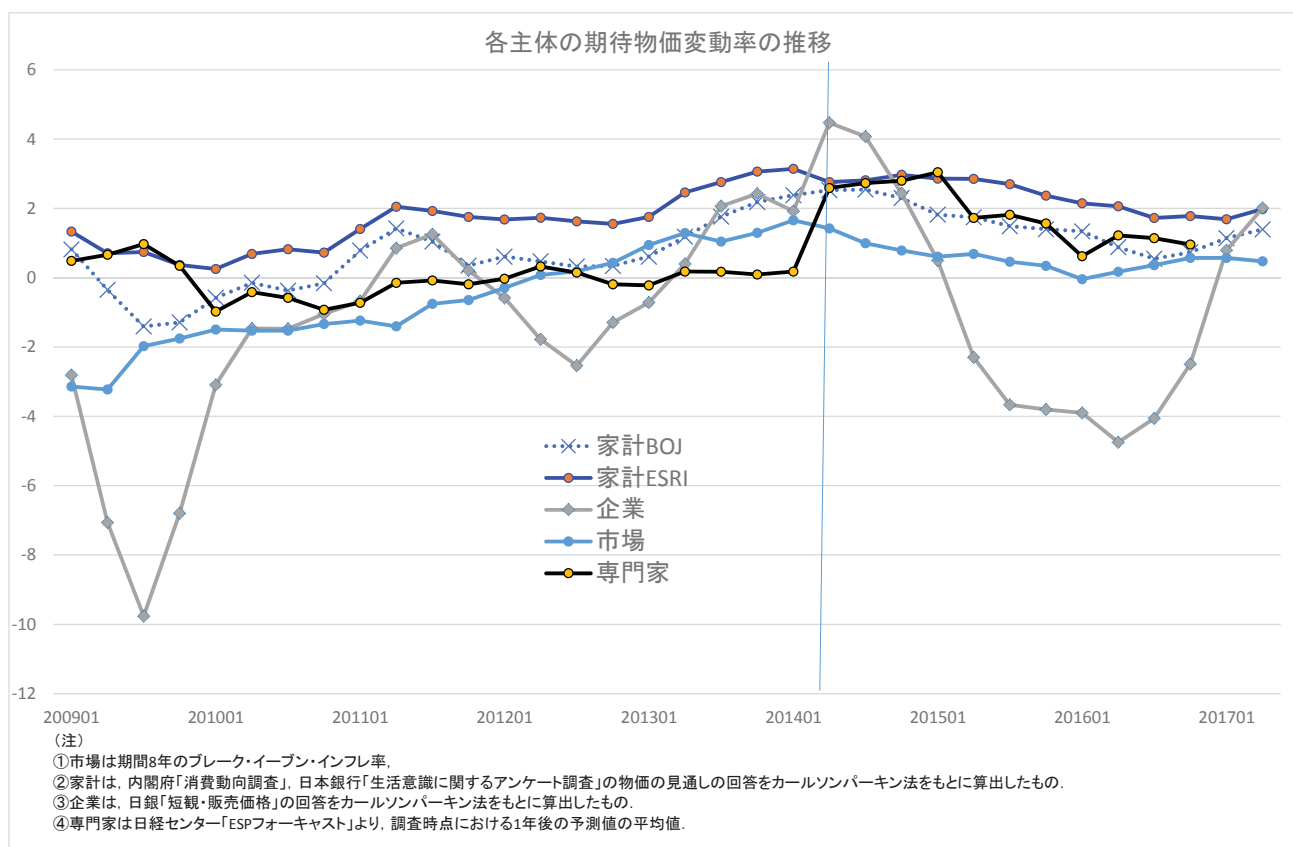
### 5 認知ラグの影響: 専門家の予測の推移



- ・専門家の予測も, 5/14までは4-6月期, 強めの見方.
- ・7月中下旬以降, 大幅な下方修正

## 6 企業・家計の状況 ～期待インフレ率を用いた分析～

### 6-1 期待インフレ率(1)



## 6-2 期待インフレ率(2)

			物価の調査方法	調査内容	調査頻度	調査単位	消費税取り扱い	備考
家計	消費動向調査	内閣府	あなたの世帯で日ごろよく購入する品物の価格について、1年後どの程度になるとお考えですか。	物価水準(10段階選択方式)のみ調査。「分からない」も含む	月次	世帯単位(単身者含む)、8400世帯、15か月連続、ローリングサンプル(15分の1)	明示的ではない。「記入の手引き」では品物の購入と同時に徴収される消費税を含むとしているため、ここで用いた予想物価上昇率には消費税率引上げの影響が含まれている可能性が高い	現方式は2004年4月以降実施。2004年3月以前は「低くなる」等5択方式。「分からない」の選択なし 2013年4月以降、調査方法を「訪問留置法」から「郵送調査法」へ変更
	生活意識に関するアンケート調査	日本銀行	1年後の「物価」は現在と比べ何%程度変わるとお考えですか	物価水準(数値記入方式)、感覚(5段階)の両方を調査	四半期(3.6, 9.12月)	個人単位、全国の満20歳以上の個人4,000人	「消費税率引上げは含めずにご回答下さい」と明示	2006年10月以降、調査方法を「訪問留置法」から「郵送調査法」へ変更
企業	販売価格判断	日本銀行	貴社の主要製商品の販売価格、または主要サービスの提供価格についての判断(円ベース)。貴社の実情に応じて、「客単価」「単価」「受注単価」なども念頭にご回答ください。「先行き(3か月後まで)の変化」について、3つの選択肢(1、2、3)の中から貴社のご判断に最も近い番号をご記入ください。	感覚(3段階)	四半期(3.6, 9.12月)	企業単位(11126社)、資本金を基準に大企業(資本金10億円以上)、中堅企業(同1億円以上10億円未満)、中小企業(同2千万円以上1億円未満)に区分	「消費税など制度の変更の影響を除いてご回答ください。」と明示	所定の調査表による郵送およびオンライン調査
市場	Break Even Inflation rate		利付国債の利回りー物価連動国債の利回り	全国消費者物価指数(生鮮食品を除く総合指数)	日次	機関投資家(個人は購入できない)	明示されていない	期待インフレ率以外の要因として需給関係や流動性などのリスクプレミアムの影響
専門家	ESPフォーキャスト	日本経済研究センター	翌年度の消費者物価指数(生鮮食品を除く総合)の上昇率。予測値の主観的な分布	消費者物価指数(生鮮食品を除く総合)の上昇率	月次	民間エコノミスト45名	消費税の影響含み、含まないの2つの予測値が公表されている	2004年5月から経済企画協会が実施。2012年4月より日本経済研究センターが引き継ぎ実施
	政策委員見通し	日本銀行	「経済・物価の将来展望とリスク評価」の中に、「政策委員の見通し」を参考計表として掲載	消費者物価指数(除く生鮮食品)の年度平均前年比の値	四半期(4.7, 10.1月)	政策委員9名	明示されていない	2000年10月より年2回実施。2008年より四半期調査。

## 6-3 分析の方法

### (目的・モデル)

- 期待物価上昇率がどのような経済変数、イベントと相関しているかを分析
- データの時系列情報を活用した統計分析(ベクトル自己回帰分析)を行い、期待物価上昇率が経済変数の変化に対してどのように反応するかを分析
- 単純VARモデル
- 推計期間:2008年1Q~2017年2Q(四半期)

### (説明変数)

- ① 過去のCPI(購入頻度別)実績:直近の購買頻度の高い商品の価格変動に影響を受ける
- ② 過去の期待インフレ率:過去の予測値を参考に予測する
- ③ 為替レート, 日経平均株価:足元の数値に影響を受ける
- ④ 政策決定のアナウンス(ダミー変数)

### (政策アナウンス状況)

2011年12月29日	税制調査会の答申「2014年(平成26年)4月1日に8%、2015年(平成27年)10月1日に10%に増税」
2012年8月10日	消費税増税を柱とする社会保障・税一体改革関連法案「社会保障の安定財源の確保等を図る税制の抜本的な改革を行うための地方税法及び地方交付税法の一部を改正する法律(平成24年法律第68号)」が成立。施行日は一部の規定を除き2014年(平成26年)4月1日
2013年10月1日	消費税率(国・地方)を5%から8%に増税すると閣議決定



## 6-4 推計結果：アナウンス① 税制調査会(2011年12月)

- 過去の期待インフレ率:どの主体も影響が大きい
- 過去のCPI: 企業はマイナスで有意→売上悪化を予測して, 期待インフレ率が低下?  
専門家→CPIそのものを予測することが目的. CPIの影響が大きい
- 為替・株価: 家計, 企業のみ影響, ただし, 為替はマイナス
- アナウンス: 市場のみプラスで有意(早くから読み込み)

	家計(内閣府調査)	家計(日銀)	企業	市場	専門家
期待インフレ率	0.773 [ 7.53384]	0.805 [ 5.45561]	1.052 [ 6.96354]	0.830 [ 7.91728]	0.487 [ 3.25941]
CPI	0.043 [ 1.50801]	0.026 [ 0.34954]	-0.940 [-1.99407]	-0.066 [-1.35393]	0.239 [ 2.66661]
為替レート	-0.030 [-2.52649]	-0.068 [-2.50928]	-0.204 [-3.47974]	-0.011 [-0.88072]	0.017 [ 0.86498]
日経平均株価	0.000 [ 2.71722]	0.000 [ 2.96703]	0.001 [ 4.12286]	0.000 [ 0.30964]	0.000 [-0.36640]
政策アナウンス1	-0.009 [-0.05248]	-0.438 [-1.29047]	-1.117 [-1.30555]	0.421 [ 1.92173]	0.341 [ 1.22472]
誤差項	1.681 -0.627	3.155 -1.535	8.651 -3.433	0.684 -0.594	-1.258 -1.199
自由度修正済決定係数	0.862	0.760	0.794	0.951	0.736

(注)[ ]内の数値はt値

## 6-5 推計結果：アナウンス② 法案成立(2012年8月)

- 過去の期待インフレ率:先ほどの結果とほぼ同様
- 過去のCPI: 先ほどの結果とほぼ同様
- 為替・株価: 先ほどの結果とほぼ同様
- アナウンス: 市場のみプラスで有意(早くから読み込み)

	家計(内閣府調査)	家計(日銀)	企業	市場	専門家
期待インフレ率	0.749 [ 7.79507]	0.780 [ 5.29234]	1.123 [ 7.49048]	0.830 [ 7.38887]	0.512 [ 3.45738]
CPI	0.050 [ 1.82346]	0.039 [ 0.52767]	-1.185 [-2.56814]	-0.056 [-1.13149]	0.241 [ 2.67713]
為替レート	-0.026 [-2.57440]	-0.057 [-2.28837]	-0.160 [-3.00005]	-0.018 [-1.23161]	0.010 [ 0.57058]
日経平均株価	0.000 [ 2.35327]	0.000 [ 2.69020]	0.001 [ 3.29349]	0.000 [ 0.44056]	0.000 [-0.18223]
政策アナウンス2	0.125 [ 0.69826]	-0.318 [-0.85138]	-0.038 [-0.04116]	0.446 [ 1.71208]	0.296 [ 0.98760]
誤差項	1.600 [ 2.92984]	2.444 [ 1.74632]	6.330 [ 2.06250]	1.235 [ 1.81168]	-0.724 [-0.67768]
自由度修正済決定係数	0.865	0.753	0.783	0.949	0.732

(注)[ ]内の数値はt値

## 6-6 推計結果：アナウンス③ 閣議決定(2013年10月)

- 過去の期待インフレ率：先ほどの結果とほぼ同様
- 過去のCPI：先ほどの結果とほぼ同様
- 為替・株価：先ほどの結果とほぼ同様
- アナウンス：家計，専門家でプラスで有意(確実に決まってから反応)

	家計(内閣府調査)	家計(日銀)	企業	市場	専門家
期待インフレ率	0.769	0.670	1.053	0.976	0.455
	[ 9.01633]	[ 4.94329]	[ 6.08745]	[ 12.7549]	[ 3.17033]
CPI	0.050	0.105	-0.942	-0.112	0.229
	[ 2.05446]	[ 1.54720]	[ -1.69606]	[ -1.92966]	[ 2.67471]
為替レート	-0.033	-0.052	-0.174	-0.006	0.014
	[ -3.80264]	[ -2.51982]	[ -3.31651]	[ -0.42815]	[ 0.85396]
日経平均株価	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000
	[ 4.42296]	[ 4.24176]	[ 3.34646]	[ -0.69310]	[ -1.04192]
政策アナウンス3	0.494	1.336	-1.125	0.424	0.862
	[ 2.25496]	[ 2.82564]	[ -0.73071]	[ 1.37114]	[ 2.11068]
誤差項	1.349	0.911	6.203	1.051	-0.340
	[ 2.58507]	[ 0.68674]	[ 2.08085]	[ 1.57471]	[ -0.34116]
自由度修正済決定係数	0.882	0.799	0.787	0.948	0.760

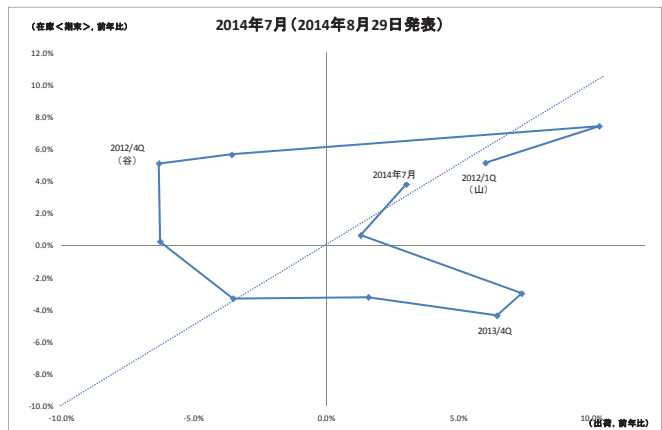
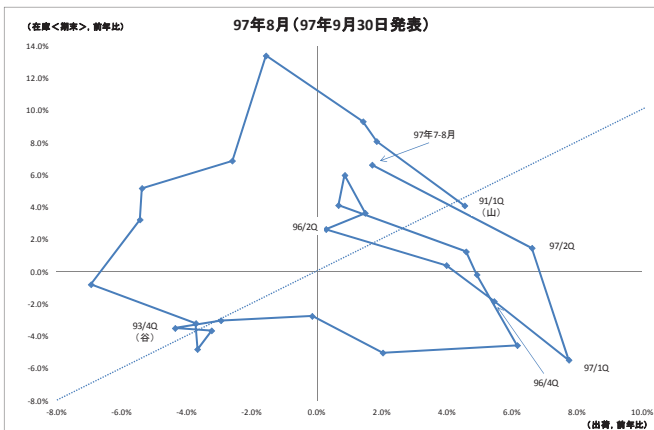
(注)[ ]内の数値は値

## 6-7 現状を正確に認識できなかった？ 企業では意図せざる在庫増

(原因)

- 駆け込み需要と反動減の全容までに時間を要する
- 駆け込み購入は事実だが，その規模は推計値でしかない  
→所得や天候などによっても消費は影響を受けるので，「想定内」の根拠が薄い

(結果)意図せざる在庫積み増し



# 7 まとめ

## 7-1 まとめ

1. 消費への影響(駆け込み需要と反動減)は、情報の環境を良くしようとも、**正確に把握できない**。また、全容がある程度わかるまで、**時間を要する**
2. 独自の情報や経験(Private information)でも改善するのは困難  
(例)専門家の予測推移  
  
→この結果、駆け込み需要は「異時点間の需要シフト」以上の影響を及ぼす  
(例)意図せざる在庫増加
3. 97年と2014年の比較では、97年の当初の情報で行うべきだが、97年**当時の雰囲気は時間の経過とともに忘れられ**、**統計データも大きく改定される**
4. 現時点の情報で当時の環境を評価すると、過小となりやすい。  
(例:97年秋以降の金融危機)  
当時:97年10-12月以降、5四半期連続マイナス成長。「列島総不況」  
2000年基準:98年1-3、4-6月のみマイナス 現時点のデータも3期連続

## 7-2 まとめ

1. 期待インフレ率で見れば、増税のアナウンスにより影響を与えていた
2. 市場での期待インフレは、税調答申など、早い段階から織り込み始めている可能性がある
3. 家計については、Cashin and Unamyama(2012)の指摘とおり、2013年10月の閣議決定時に期待インフレ率に影響を与えた可能性がある
4. 企業は期待インフレ率の上昇が確認できない。そもそも、消費税分は企業に転嫁されていない
5. また、企業は、在庫調整に陥るような状況となった

## 7-3 まとめ（今後の課題）

- 期待インフレ率に関する検証を詳細に行う。
- 今回の推計は四半期データの推計であり、政策決定のアナウンスでは明確な対応関係がやや弱い。今後は、推計結果をロバストなものにするためにも、内閣府「消費動向調査」は月次、BEIは日次のデータが利用可能なので、調査頻度を変えて、推計をおこないたい。
- また、日本では、その後消費税引上げが再三にわたって延期されている。税率引上げの延期が期待インフレ率を引き下げる方向に影響しているのかについて、検討したい。

# 『住宅統計の問題点と住宅政策』

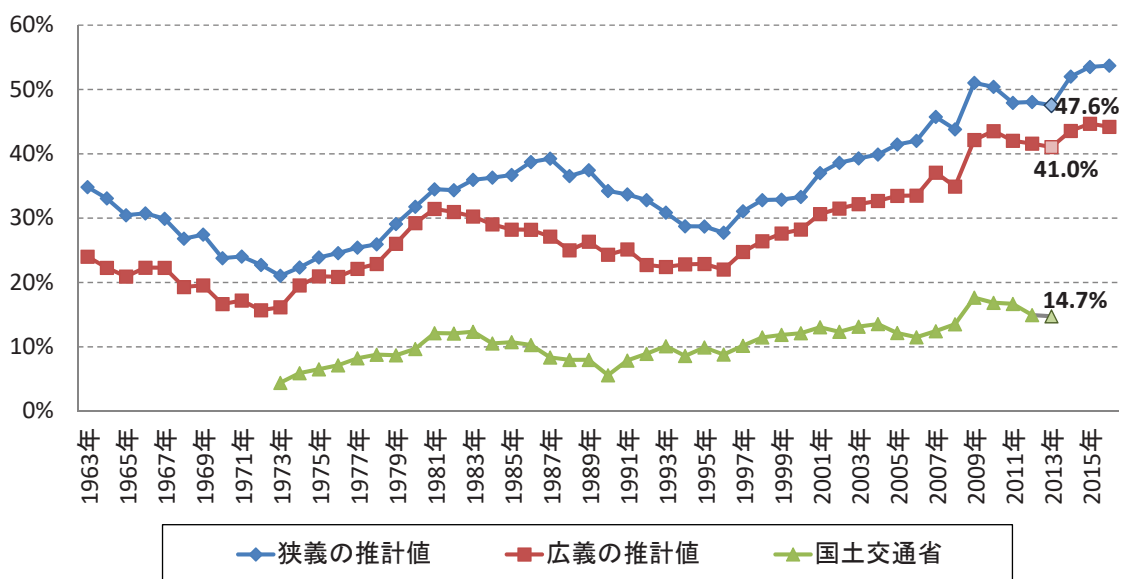
## 日本の既存住宅流通市場は本当に小さいのか？

「経済統計・政府統計の理論と応用からの提言」

日本住宅総合センター 原野啓

1

## 既存住宅流通シェアの比較



- 既存住宅市場の整備は、住宅政策の重要課題であり正確な把握が必要
- 国交省が発表する流通シェアは極めて低い
- しかし、本研究での推計値は全く異なる...

2

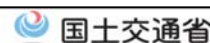


# 1.住宅政策と既存住宅

- 既存住宅市場の活性化に向けた政府の目標
  - 住生活基本計画(全国計画)(H28.3.31閣議決定)
    - 基本計画の主要ポイント3点の中の1つとして既存住宅流通促進を挙げている
  - 日本再興戦略2016(H28.6.2閣議決定)
    - 「600兆円に向けた「官民戦略プロジェクト10」の1つとして、「(5)既存住宅流通・リフォーム市場の活性化」を挙げている
  - ニッポン一億総活躍プラン(H28.6.2.閣議決定)
    - 「戦後最大の名目GDP600兆円」に向けた取組の方向の1つとして、「(6)既存住宅流通・リフォーム市場の活性化」を挙げている
  - 経済財政運営と改革の基本方針2016(H28.6.2.閣議決定)
    - 第2章 成長と分配の好循環の実現>3.個人消費の喚起>(3)ストックを活用した消費・投資喚起
- 住生活基本計画における流通シェアの扱い
  - H18～H22 指標:流通シェア 13%(H15)→23%(H27)
  - H23～H27 指標:流通シェア 14%(H20)→25%(H32)
  - H28～H32 指標から流通シェアは無くなる  
既存住宅流通の市場規模 4兆円(H25)→8兆円(H37)

3

## 新たな住生活基本計画のポイント②



### 既存住宅の流通と空き家の利活用を促進し、住宅ストック活用型市場への転換を加速

- 既存住宅の質の向上と併せ、住みたい・買いたいと思う魅力の向上を図る。
- 既存住宅が流通し、資産として次の世代に承継されていく新たな流れを創出。
- 老朽化・空き家化が進むマンションの建替え・改修等を促進。(マンションの建替え等の件数(S50年からの累計)を約500件に-約2万戸の建替え等-)
- 空き家の増加を約100万戸抑制。既存住宅の流通促進等により空き家の増加を抑制。

空き家の抑制



プレミアム既存住宅(仮称)

土地/000.00㎡(00.0坪)  
建物/000.00㎡(00.0坪)

- 良質で魅力的なものにする、資産として価値のある住宅にする
- 消費者に効果的に訴求できるPR方法にする
- 住宅瑕疵保険等を活用して品質を確保する

内外装リフォーム済  
建物状況調査(インスペクション)済  
5年瑕疵担保保険加入済

出典) 国土交通省HP <http://www.mlit.go.jp/common/001124128.pdf>

4

【経済成長に向けた課題】

住宅の資産価値が市場で評価されず、適正な価格で売却することができず、老後に備えた貯蓄性向を上げている（消費性向が上がらない）。

経済成長に向け、IoT住宅、健康住宅、セキュリティ住宅化等を促進することにより、新たな産業の創出・育成を図ることが有効。

若年・子育て世帯の住居費等負担が大きい。

【今後の対応の方向性】

住宅が資産として評価される既存住宅流通市場を形成する。また、次世代住宅（IoT住宅、健康住宅、セキュリティ住宅等）の普及を促進する。さらに、既存住宅を活用して若年・子育て世帯の住居費等の負担を軽減する。

【具体的な施策】

- 資産価値が評価される流通・金融等の仕組みの構築、既存住宅の質を担保するインスペクション・瑕疵保険の普及促進、品質と商品としての魅力を兼ね備えるプレミアム既存住宅（仮称）の登録制度の創設、省エネ・長期優良住宅化リフォーム等の促進を通じて、既存住宅流通活性化を図る。また、空き家の多いマンションの建替え等の促進に向けた合意形成ルールの合理化、空き家や旧耐震住宅の除却・建替え等の促進、空き家等の所有者の把握を容易にし、その除却や建替え等を進めるための相続登記の促進に向けた制度の検討等により、不良資産の解消と新規投資を促進する。
- IoT技術など、新技術・次世代技術を活用する住宅の普及を促進する。
- 既存住宅を活用した若年・子育て世帯の住居費等の負担の軽減：若年・子育て世帯が、必要な質や広さを備えた住宅に低廉な家賃で入居が容易になるよう、空き家や民間賃貸住宅を活用した新たな仕組みを構築する。若年・子育て世帯の既存住宅取得等を促進するとともに、公的賃貸住宅団地の建替え等を契機とした子育て支援施設等の誘致、民間の住宅団地等における子育て支援施設等の整備を進める。

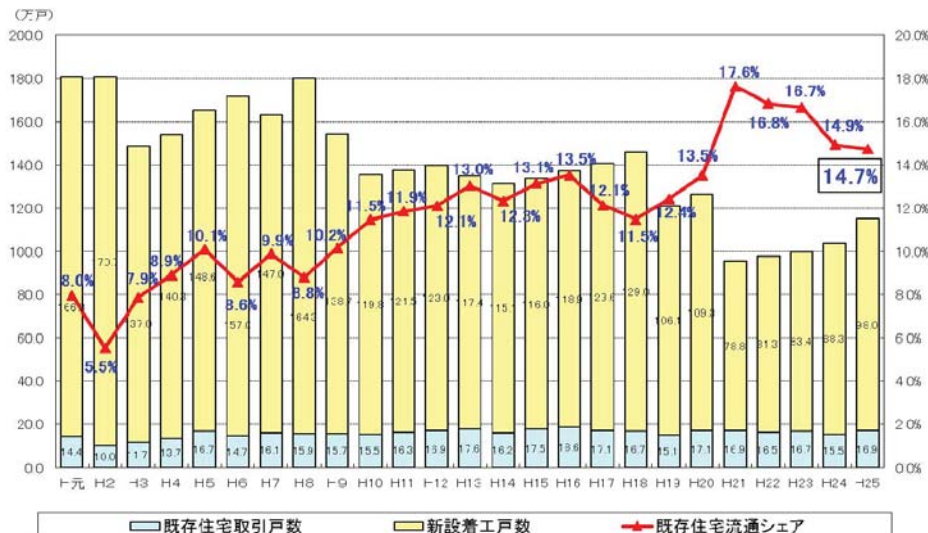
74

年度	2015年度	2016年度	2017年度	2018年度	2019年度	2020年度	2021年度	2022年度以降	指標
住宅が資産として評価される既存住宅流通市場の形成	資産価値が評価される流通・金融等の仕組みの構築・普及促進								
	宅建業法の改正・施行								
	インスペクション、瑕疵保険の普及促進								
	プレミアム既存住宅（仮称）登録制度創設	プレミアム既存住宅（仮称）登録制度の普及促進							
次世代住宅の普及促進	省エネ、長期優良住宅化リフォーム等の促進								
	空き家の多いマンションの建替え等の促進に向けた合意形成ルールの合理化								
	空き家や旧耐震住宅の除却・建替えの促進								
既存住宅を活用した若年・子育て世帯の住居費等の負担の軽減	IoT技術など、新技術・次世代技術を活用する住宅の普及促進								
	空き家や民間賃貸住宅を活用した新たな仕組みの構築								
	新たな仕組みの普及促進								
政策評価や社会経済情勢の変化等を踏まえて必要な対応を実施									
若年・子育て世帯の既存住宅の取得等の促進									
公的賃貸住宅団地の建替え等を契機に子育て支援施設等を誘致									
民間の住宅団地等における子育て支援施設等の整備促進									
									既存住宅流通の市場規模 4兆円（平成25年） →8兆円（平成37年）
									リフォームの市場規模 7兆円（平成25年） →12兆円（平成37年）

出典) 首相官邸HP <http://www.kantei.go.jp/jp/singi/ichiokusoukatsuyaku/pdf/plan1.pdf>

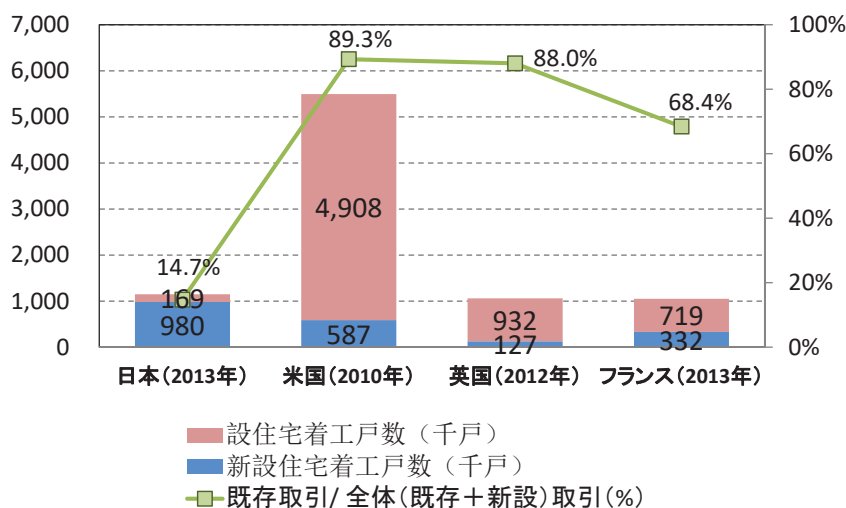
## 2. 既存住宅流通量に対する政府の見解

- 国土交通省Homepage
  - 「我が国の全住宅流通量に占める**既存住宅の流通シェア**は**約14.7%（平成25年）**であり、近年ではシェアは大きくなりつつあるものの、**欧米諸国と比べると1/6程度**であり、以前として低い水準にあります。」<http://www.mlit.go.jp/policy/tyukozyutaku.html>
  - H28年度；住宅経済関連データ：下の図を掲載 [http://www.mlit.go.jp/statistics/details/t-jutaku-2\\_tk\\_000002.html](http://www.mlit.go.jp/statistics/details/t-jutaku-2_tk_000002.html)
  - 国土交通白書2015でも、同様の図を掲載



## 2. 既存住宅流通量に対する政府の見解

- 既存住宅流通シェアの国際比較(国土交通白書2015)
  - <http://www.mlit.go.jp/hakusyo/mlit/h26/hakusho/h27/index.html>
  - 「欧米諸国と比べると1/6程度」という話の根拠 ⇒ シェアが極めて低い...



7

## 3. 流通量・流通シェアについて

### 【流通シェアに対する異なる見解】

- 国土交通省
  - **14.7%(2013)** 国土交通HP, 白書2015など
- FRK(不動産流通経営協会)
  - 34.4%(2013)
- 本研究の推計値
  - 広義: 41.0%(2013)
  - **狭義: 47.6%(2013)**
- なぜこれほど数値が異なるのか?
- 住宅政策・経済対策として重要な数値
- 正確な把握が望ましい
- 利用するデータ・定義を整理して、その値を検討

8



## 3.1.既存住宅流通量・流通シェアを定義

- **広義の既存住宅流通量**
    - ① 市場で取引された住宅を計上
      - ・ 相続、贈与は含まない
    - ② 取引後の利用方法は問わない
      - ・ 賃貸、別荘、事務所等も含む
    - ③ 事業用住宅は、住戸数を流通量として計上
      - ・ 例)10部屋の木造2階建てアパート⇒10戸
  - **狭義の既存住宅流通量**
    - 上記③(事業用住宅)は**含まない**
    - 結果、住戸ごとの売買だけを計上
- 両者の相違は事業用住宅を含むか否か！**
- **既存住宅流通シェア**
    - $\text{流通シェア} = \text{既存住宅流通量} / (\text{新築住宅流通量} + \text{既存住宅流通量})$
    - **広義**の流通シェア: **事業用住宅を含む**
    - **狭義**の流通シェア: **事業用住宅を含まない**
  - **利用可能なデータ**
    - 既存住宅流通量: 3種類 特徴や内容を整理する必要有
    - 新築住宅流通量: 1種類 『住宅着工統計』

9

## 3.2.既存住宅流通量のデータ

### ①『住宅土地統計調査』における既存住宅戸数

- 一 総務省、5年毎、基幹統計調査(アンケート調査)
  - 1948年~現在
  - 目的: 全国の住宅・建物の実体を明らかにすること
  - 内容: 集計結果を用いて多様な項目が拡大推計
  - 「持家として取得した中古住宅数」という項目あり
    - 一 1978年の第7回~現在
    - 一 169,467戸(2013年現在)
    - 一 転売後、持ち家以外で利用の住宅は含まない
    - 一 転売後、調査までに再建築された住宅は含まない

10

## 3.2.既存住宅流通量のデータ

### ②不動産取得税の件数

- 不動産を取得した際に課税される税金のデータ
  - 土地・家屋の購入、交換、贈与、建築（※相続は対象外）
- 総務省『道府県税の課税状況等に関する調』
  - 1972～現在
  - 土地と家屋〔建築分と承継分（専用住宅、その他）〕
- 家屋・承継分・専用住宅⇒既存住宅として仮定
  - 582,485件（2013年時点）
  - 贈与が含まれている
  - 1972-1979の期間は、住宅以外の取引が含まれる
  - 事業用住宅は棟数で計上（戸数ではない）

11

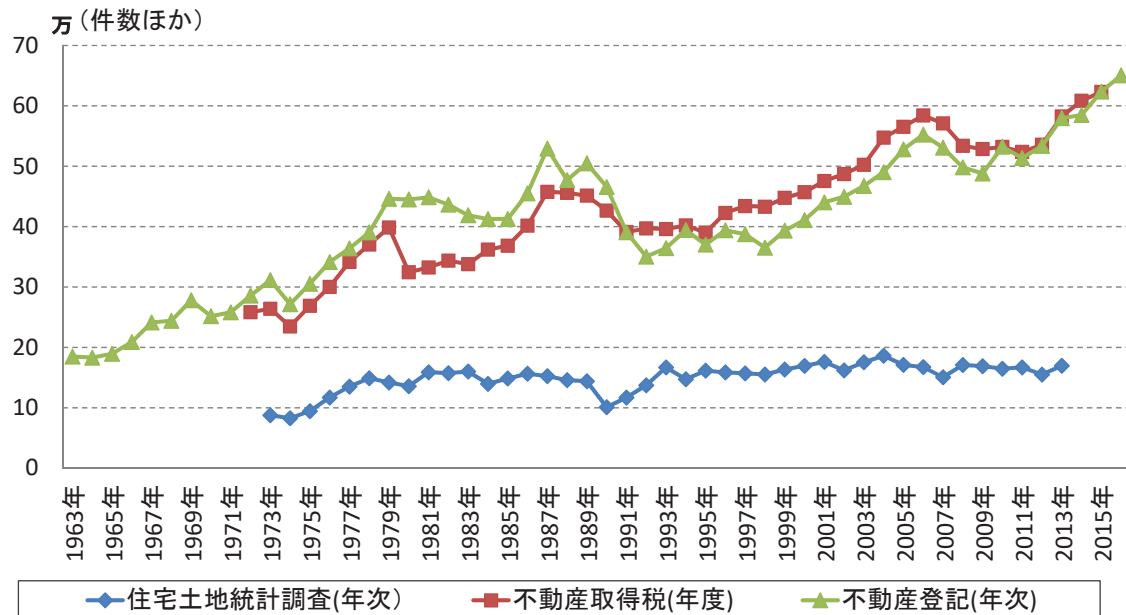
## 3.2.既存住宅流通量のデータ

### ③不動産登記における移転個数

- 土地・建物の所在や権利関係を記録したデータ
- 法務省『民事・訟務・人権統計年報』
  - 1972～現在
  - 所有権の移転登記⇒「土地」「建物」に分類
    - 相続、贈与、売買、その他、に分類
- 「建物」かつ「売買による所有権の移転登記」の個数⇒既存住宅として仮定
  - 579,455個（2013年時点）
  - ただし、工場・ビルの登記も含まれる（建物の登記のため）
  - 事業用住宅は棟数で計上（戸数ではない）

12

## 3.2.既存住宅流通量のデータ



13

## 3.3.既存住宅流通量データの特徴

1. 把握可能な取引が異なる
2. 同一年度内に複数回取引された住宅の扱いが異なる
  - 転売が繰り返された住宅(持家)
  - 賃貸用の投資住宅
  - 業者が一時的に取得した住宅(リノベーション等)
  - 「みなし取得」として扱われた住宅

※家屋が新築された日から6か月が経過しても最初の譲渡が行われない場合は、その期間が経過した日に家屋の所有権が取得されたものとみなして、その時の不動産の所有者に譲渡すること
3. 本研究の定義との相異
  - 「住調」 **違いが大きい**
  - 「取得税」「登記」 **比較的近い**、両者のトレンドは相似
    - ただし、贈与、住宅以外の建物の扱いで違いあり
4. 既存住宅流通量として直接利用するには課題あり
  - 目的に応じてデータを加工する必要あり

14

### 3.3.既存住宅流通量データの特徴

#### 【各データで把握可能な取引】

転売前の用途	転売後の用途	利用方法など	①住宅土地統計調査	②不動産取得税	③不動産登記	広義の定義	狭義の定義
持家 または 持家以外	持家	持家として利用	○	○	○	○	○
		相続による取引	×	×	×	×	×
		贈与による取引	×	○	×	×	×
		転売後に建替え	×	○	○	○	○
	持家以外	賃貸住宅として利用 (投資物件含む)	×	○	○	○	○
		別荘として利用 残業時などに利用	×	○	○	○	○
		住宅以外の目的で利用 (事務所など)	×	○	○	○	○
事業用住宅	事業用住宅	貸家・給与住宅の取引	×	△	△	○	×
住宅以外の建物	住宅以外の建物	工場・ビルなど	×	△	○	×	×

15

### 3.3.既存住宅流通量データの特徴

#### 【各データで把握可能な複数回取引】

		①住宅土地統計	②不動産取得税	③不動産登記	広義の定義	狭義の定義
転売が繰り返された住宅	最後以外の取引	×	○	○	○	○
	最後の取引	○	○	○	○	○
賃貸向け投資用住宅 (ワンルームなど)	最後以外の取引	×	○	○	○	○
	最後の取引	×	○	○	○	○
業者が一時的に取得 (リノベーション等)	業者の取得時	×	○	○	○	○
	業者の転売時	○	○	○	○	○
「みなし取得」として扱われた住宅	売却前	×	○	△	×	×
	売却後	×	○	○	○	○

16

### 3.4.既存住宅流通量の推計

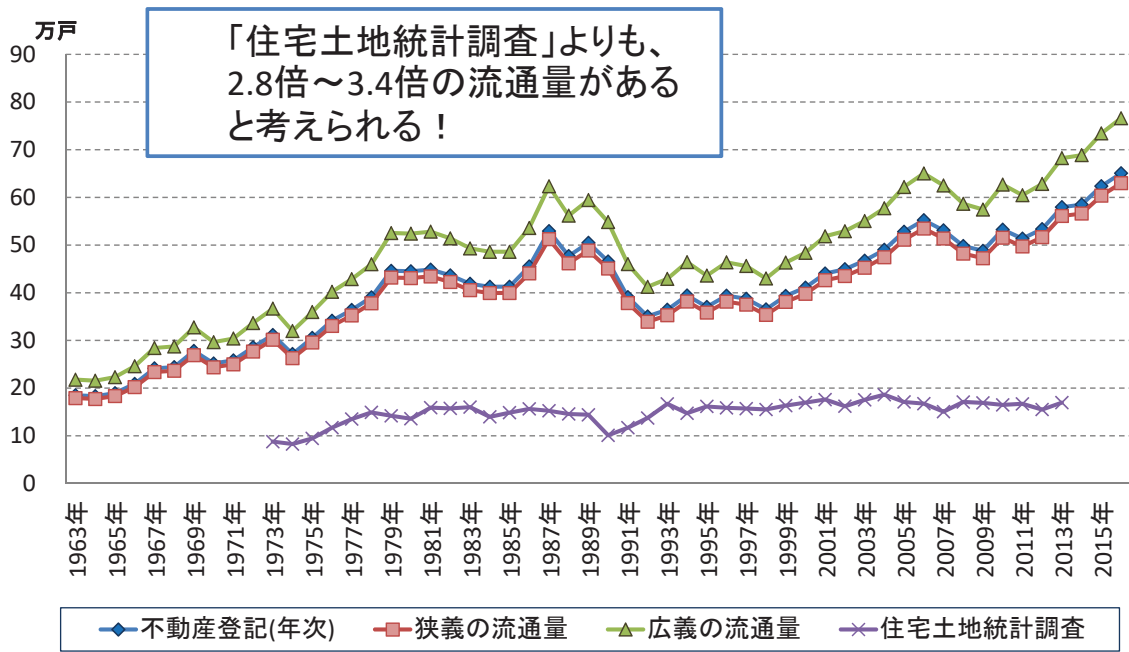
- 利用するデータ
  - **登記データ**(売買による不動産の移転登記)を利用
    - 「住調」は違いが大きすぎる
    - 「取得税」よりも扱いやすい
- 「登記」を利用する際の課題
  - 用途の異なる建物(事業用住宅、住宅以外の建物)が含まれている
  - 用途別の登記個数は不明
- 推計方法
  - 対応 『東日本レイズ年報マーケットウオッチ2013』を参考に各種住宅の割合を推計
    - 中古マンション、中古戸建⇒96.8%
    - 中古一棟売りアパート⇒0.43%(※棟数)
    - 中古一棟売りマンション⇒1.27%(※棟数)
  - **狭義の既存住宅流通量**
    - 売買による所有権の移転登記 × 96.8%
  - **広義の既存住宅流通量**
    - 狭義の既存住宅流通量+事業用住宅(戸数で追加)
    - 売買による所有権の移転登記 × { 96.8% + (0.43% × 5.6戸) + (1.27% × 14.6戸) }

個人用住宅の割合

一棟売りマンションの割合 × 共同住宅(非木造)の平均戸数

一棟売りアパートの割合 × 共同住宅(木造)の平均戸数

### 3.4.既存住宅流通量の推計



## 3.5.新築住宅流通量のデータと特徴

- 住宅着工統計の総着工戸数を利用
  - 国交省が実施、建築着工統計調査のひとつ
  - 1951年～現在
  - 住宅の着工状況を把握
    - 構造、建て方、利用関係、資金等に分類
    - 利用関係別(持家、分譲、貸家、給与住宅)に戸数で把握可能
      - 事業用住宅(=貸家+給与住宅)が分類可能
      - 事業用住宅は総着工戸数の約42%(過去30年間の平均値)
      - 事業用住宅は新築住宅流通量、流通シェアに影響

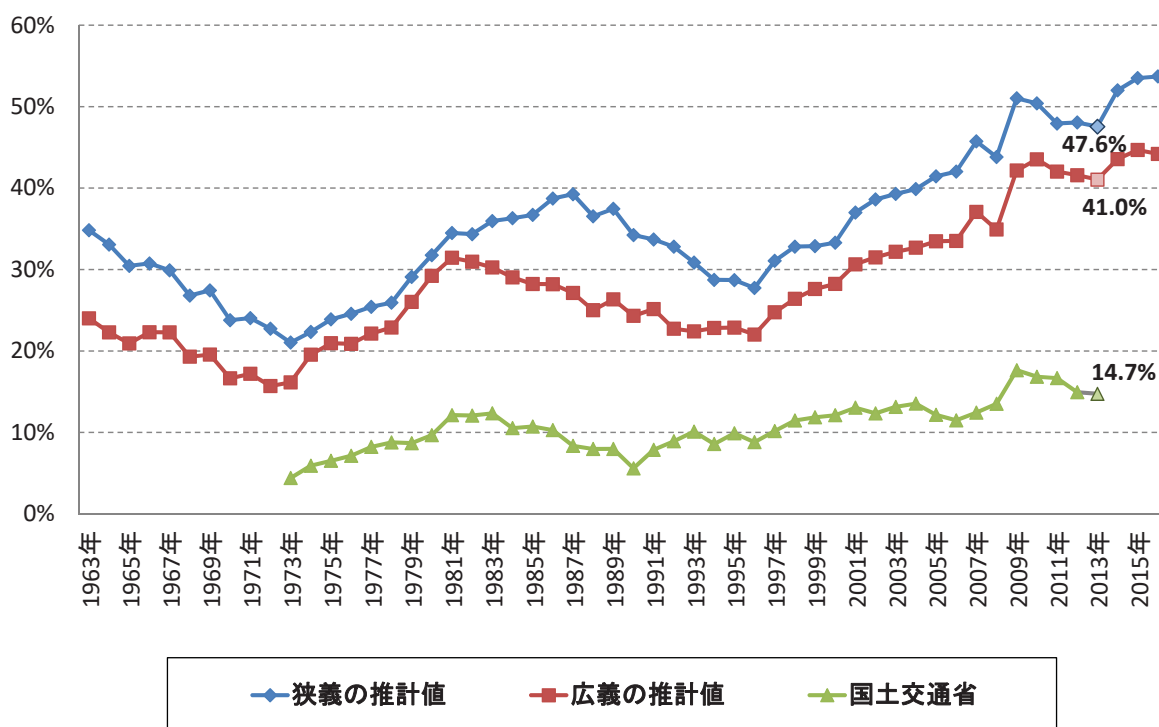
19

## 4.既存住宅流通シェアの推計・比較

- 流通シェアの定義
  - 流通シェア=既存流通量/(新築流通量+既存流通量)
- 流通シェアの比較(次ページ)
  - 国土交通白書、本研究の定義(広義・狭義)の3種類
  - 2013年でのそれぞれの値は全く異なる
    - 白書(14.7%)、広義(41.0%)、狭義(47.6%)
  - シェアは拡大 ⇒ 近年、狭義の流通量は50%越え
  - 日本の既存住宅市場は、想定ほど小規模ではない
- 国交省の数値の問題点
  - 既存に『住調』、新築に総着工戸数を利用
    - 既存⇒持家として取得された既存住宅だけを集計⇒分子が過小
    - 新築⇒事業用を集計⇒分母が過大
    - 既存住宅流通シェアは非常に小さくなる
  - 集計している住宅が異なるため解釈が困難

20

## 4.既存住宅流通シェアの推計・比較



21

## 4.既存住宅流通シェアの推計・比較

- 既存住宅流通量・流通シェアはデータ・定義によって大きく異なる
  - 定義を明確にし、利用可能なデータを利用・加工する必要あり
  - 特に、**事業用住宅を含めるか否かは重要**
- 日本の既存住宅市場は、従来考えられているよりも規模が大きい
  - **狭義の流通シェアは、近年では50%を超えている**
- 海外と比べると、相対的に規模が小さいことは事実
- 流通市場の整備を進め、取引が円滑になるよう整備する必要はある

### 【課題】

- レインズデータの利用について
  - 種目別割合は実際の割合ではない⇒事業用住宅等の割合は変化する可能性有
  - ただし、データ制約のため、現時点では困難
- どのような定義を用いるべきか
  - 取引直後に建て替えられる住宅の扱い
    - 継続的に利用される住宅だけを計上するという定義もあり得る
    - データ制約のため、現時点では困難
  - 事業用住宅は棟数で集計するという定義もあり得る

22



## 5.既存住宅流通は何故低迷しているのか？

- 新築住宅建設を重視した住宅政策
  - 戦後から一貫して進められてきた**新築住宅建設を中心とした住宅政策**
  - 戦後の住宅不足、品質向上、内需拡大、経済対策、景気対策
- 住宅金融・住宅税制の歪み
  - **新築住宅取引を重視した制度設計**
  - **住宅金融公庫**:融資対象の制約・金利・償還期間など
  - **住宅税制**:融資対象の制約(築年数、面積、価格など)
- 既存住宅の取引制度が未整備
  - ① **媒介契約**の問題点 ⇒ 双方代理(両手取引)、物件情報の囲い込み
  - ② **建物価格の評価**の問題点 ⇒ 建物価格査定制度
  - ③ **建物の品質評価**の問題点 ⇒ インспекション制度
- 戸建木造住宅は、建築後20年程度で建物価格が減失
- 住宅ストック資産額と住宅投資額の累積を比較すると、540兆円下回る
- 空き家問題の原因の1つとして、**新築住宅の供給が常態化し、他方で既存住宅の流通が低迷したことが考えられる。少子高齢化が、問題に拍車**
- 既存住宅流通量を正確に把握するための統計データもない

23

## 参考文献

- 一般社団法人不動産流通経営協会(2015)『既存住宅流通量の地域別推計について』
- 公益財団法人東日本不動産流通機構(2013)『東日本レイズ年報マーケットウオッチ2013』[CD-ROM]2013年7月
- 国土交通省(2015)『国土交通白書2015』ぎょうせい
- 国土交通省(2017)「新たな住生活基本計画のポイント」  
Homepage(<http://www.mlit.go.jp/common/001124128.pdf>)
- 国土交通省(2017)「着工統計調査報告 時系列一覧」平成29年4月28日更新  
国土交通省  
Homepage([http://www.mlit.go.jp/sogoseisaku/jouhouka/sosei\\_jouhouka\\_tk4\\_000002.html](http://www.mlit.go.jp/sogoseisaku/jouhouka/sosei_jouhouka_tk4_000002.html))
- 総務省統計局(2017)『平成25年住宅・土地統計調査報告』日本統計協会、昭和53年—平成25年
- 総務省自治税務局(2015)『道府県税の課税状況等に関する調』.1973-2015
- 法務省(2016)『民事・訟務・人権統計年報』.1973-2016
- 原野啓(2014)「我が国の既存住宅流通量・既存住宅流通シェアに関する一考察」都市住宅学No.85, 124-132頁

本研究の詳細は、【参考文献】にある原野(2014)を参照してください。

24



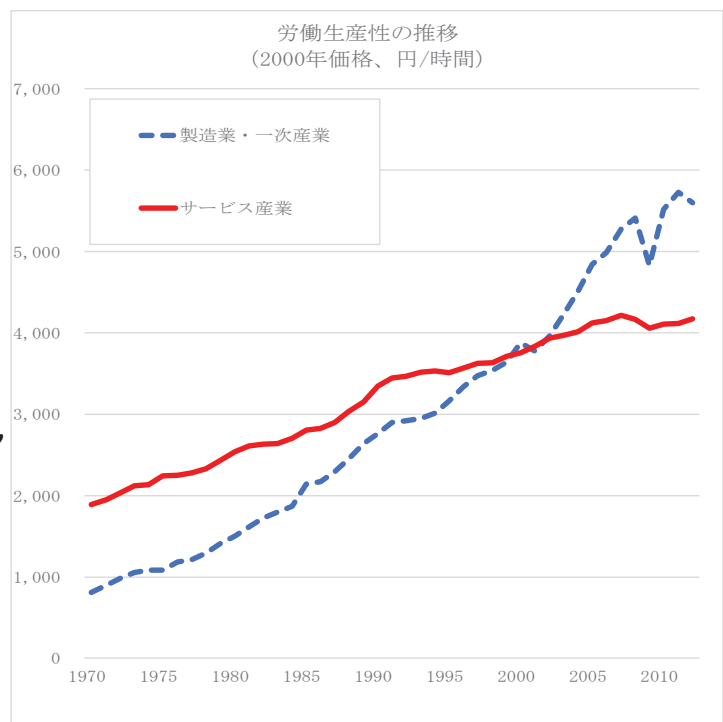
# サービス産業における価格と生産性の計測

深尾京司（一橋大学）

1

## 1. はじめに

- 多くの先行研究は、日本のサービス産業の生産性上昇率が遅く、また欧米諸国と比較して、その生産性水準は半分程度であるとの指摘をしてきた（Inklaar and Timmer 2008, Fukao 2013, 経済産業省 2013, Jorgenson, Nomura and Samuels 2016）。
- 生産性の時間を通じた変化に関する推計は、物価統計やGDP統計に依存する。



出所：深尾（2017）。原データは一橋大学・経済産業研究所のJIPデータベース2015。

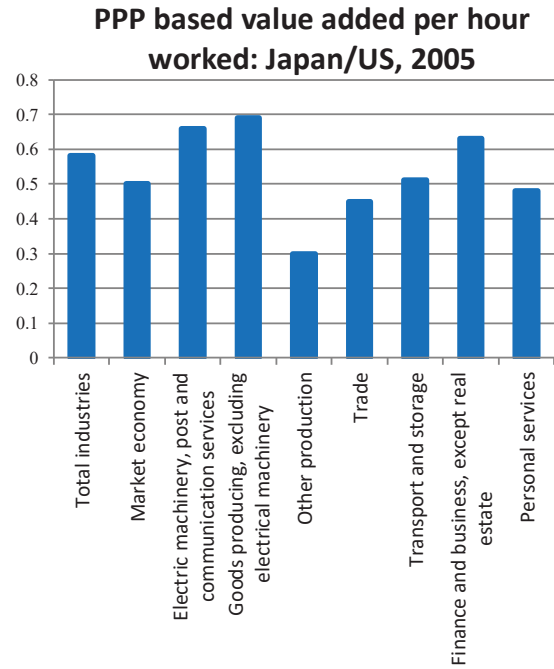
2

# ICP-PPPs as a basis for International Comparisons of Productivity

- Previous studies report lower service sector productivity in Japan compared to the US.

(Inklaar and Timmer 2008, Ministry of Economy, Trade and Industries 2013, Jorgenson, Nomura and Samuels 2016)

- These studies heavily rely on PPPs from the International Comparison Program (ICP) to compare sectoral gross output and input between Japan and the US.



Source: Inklaar and Timmer (2008)

3

## 1. はじめに

サービス産業の生産性は本当に低いのか（サービス品質を反映した生産性計測、他産業・国際比較における課題）

広義のサービス産業と建設業（経済全体のうち一次産業と製造業以外）は、GDPの8割を占めるが、そのうち半分（GDPの4割）は、実質生産や質の計測に深刻な問題がある。

	Gross value added share in GDP			Man-hour input share in the total economy		
	US (2010)	UK (2010)	Japan (2012)	US (2010)	UK (2009)	Japan (2012)
Construction	3.6%	7.0%	6.1%	5.9%	8.2%	9.0%
Wholesale and retail	9.7%	10.8%	13.4%	13.5%	14.4%	14.4%
Education	5.9%	6.8%	3.5%	8.2%	6.9%	3.2%
Health care and social work	12.6%	8.1%	6.0%	17.9%	10.9%	10.6%
Public administration and defense, compulsory social security	4.2%	5.3%	9.3%	3.4%	5.7%	5.5%
Total	36.0%	37.9%	38.2%	48.9%	46.1%	42.7%

Source: Fukao, et al. (2016)

4

# 1. はじめに

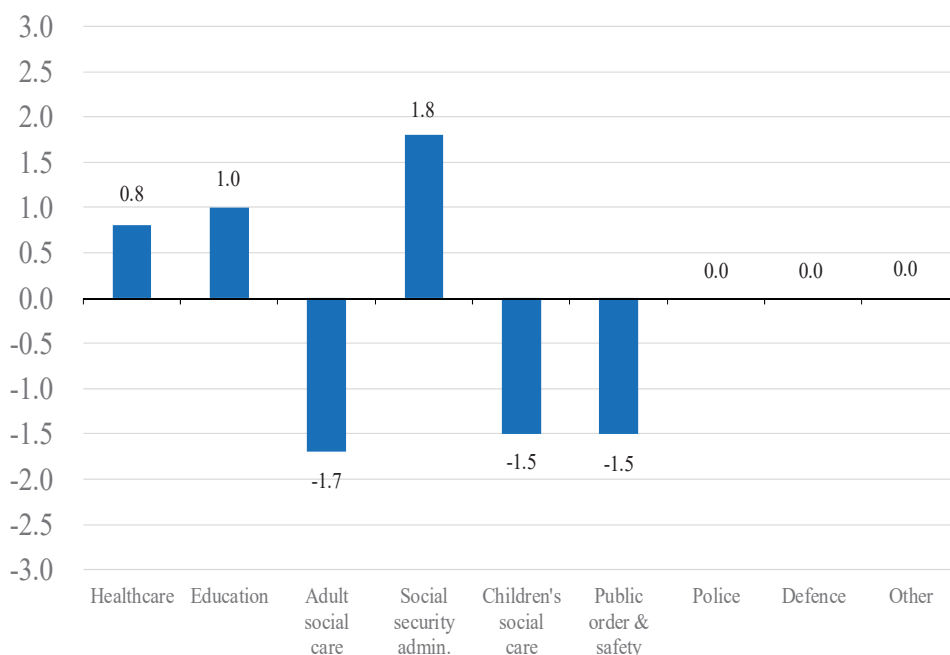
- 産業・企業レベルで生産性の上昇を計測するには、実質生産量変化のデータが必要である。その基礎となる日本の国民経済計算統計において、公務、教育の大部分、建設、社会福祉など、GDPの2割強を占める活動については、名目生産額を実質化するための適切な価格データ作成が困難であるとして、名目生産コストを、投入生産要素の価格指数で割った生産要素投入指数が実質生産指数の代わりに使われている。つまり、労働や資本の投入量で生産量を測っている（インプット＝アウトプット アプローチ）。このため、これらの産業では生産性の上昇が定義によってほぼゼロになる。

←多くの先進諸国では、価格データの新規作成（例：建築・土木）、アウトプットの数量指数（例：卒業者数）とサービスの質指数（例：学力テストの平均点）の組み合わせによる実質生産の把握、等が進められている（Atkinson 2005、OECDによる計測方法に関するマニュアル作成、欧州委員会におけるSPINTANプロジェクト等）。日本ではこの分野の研究・政府の取組が立ち後れている。

5

## 2. サービス産業の生産性計測の課題（続）

英国公的サービス業におけるTFP上昇：1997－2012年、年率%



Source: ONS (2015)

6

# 1. はじめに

## 報告の構成

第2節 日本政府による物価と実質生産計測における課題

第3節 サービス産業における生産性水準の国際比較における課題

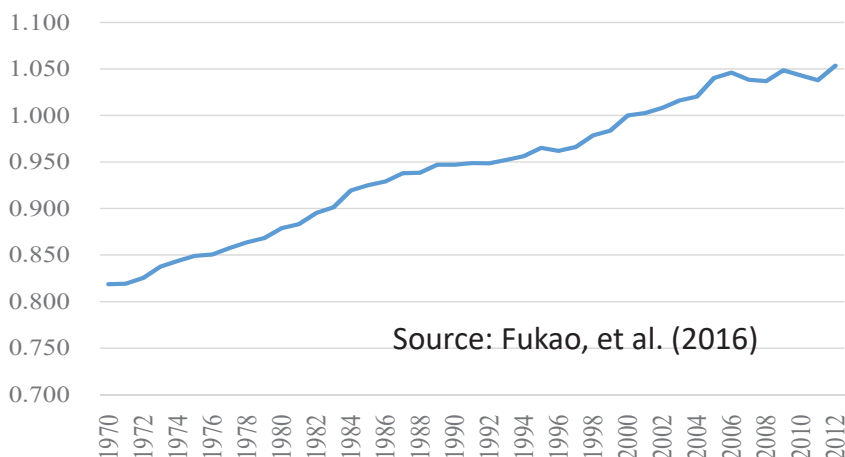
7

## 2. 日本政府による物価と実質生産計測における課題

### 建設業

日本のGDP統計では、建設業や私立大学の教育等については、コストアプローチを採用しているのに、労働の質向上を考慮していない。建設業におけるこの無視により、政府・JIPデータベースは1973-2012年における日本全体のGDP成長とTFP上昇を1.7%ポイント過小に推計していると考えられる。

建設業における労働の質の推移：2000年=1、JIPデータベース

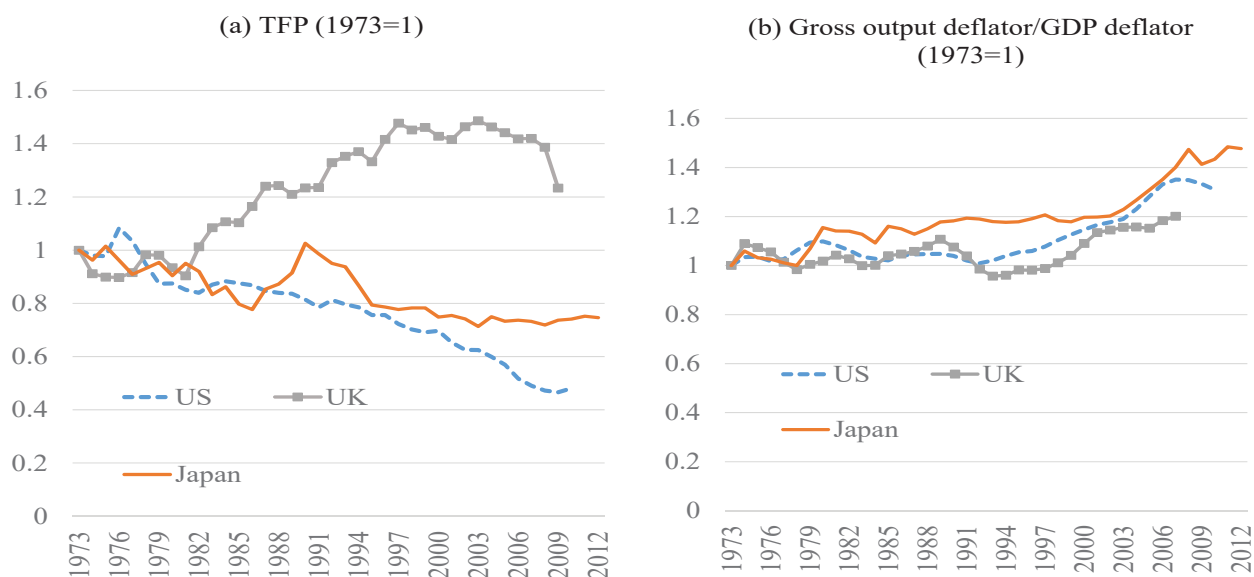


8

## 2. 日本政府による物価と実質生産計測における課題

建設物の物価統計がある米・英のうち、米国については、日本より観察されるTFP上昇が特に高いわけではない。

### 建設業：日米英比較



Source: Fukao, et al. (2016)

9

## 2. 日本政府による物価と実質生産計測における課題

- 卸・小売、医療などGDPの約2割を占める活動についても、**生産額を実質化するための物価統計に深刻な問題**がある。

商業：サービスの質（消費者への近接性、営業時間、取引形態等）変化の計測が必要（日本銀行調査統計局の企業向けサービス価格指数における新しい試み）。

医療：質の変化（疾患毎の死亡率の低下や生活の質の向上）を調整した生産量指標に基づいて生産性を計測する必要。

## 2. サービス産業の生産性計測の課題（続）

### 卸・小売業

OECD/Eurostat (2014)は、扱っている商品1単位あたりの商業サービスの質が不変なら、

商品1単位あたりのマージン価格 =  
商品1単位あたりの販売価格 - 商品1単位あたりの仕入価格

を商業サービスの価格とするのが適当と推奨。米国とカナダのGDP統計は、この方式に移行済み。

日本をはじめ他の多くの国は、商品価格を商業サービスの価格としている（日銀は最近、一部商品の卸売業について、上記推計を試行）。マージン率（（販売価格 - 仕入価格） / 仕入価格）が変化すると、米加と日本の結果は大きく異なりうる。

11

## 2. サービス産業の生産性計測の課題（続）

### 卸・小売業：2つのアプローチの違い

仕入価格不変の下で、同じ取引形態における商業のTFPが2倍となり、商品1単位取引のための生産要素投入量が半分になり、完全競争の下で、商業マージン率も半分になると、

米国ではデフレーターが半分になるため、商業の実質アウトプット（商業マージン / 商業デフレーター）は不変、TFPは2倍になる。

日本方式では、デフレーターは不変、実質アウトプット（商業マージン / 商業デフレーター）は半分となるため、TFPは不変となる。

なお、マージン率が高い取引形態へのシフトは、日本でも米国でも実質生産の拡大として認識される。

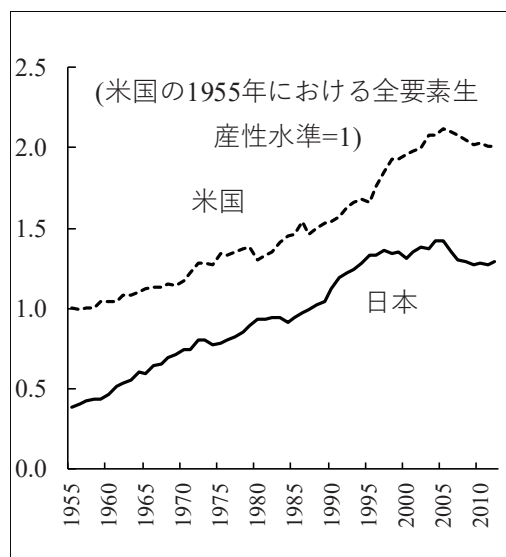
米国では、ヘドニック・アプローチによる質の計測も試行されている。

12

## 2. サービス産業の生産性計測の課題（続）

米国では、TFP上昇が1990年代末より加速。新方式がいつまで遡及されているか、要確認。

卸・小売業：日米比較



出所：Jorgenson, Nomura and Samuels (2016).

13

### ICP-PPPs as a basis for International Comparisons of Productivity - continued

- As part of the ICP, the OECD requests governments of the participating countries to conduct price surveys to collect prices of specified items (specifications for each good and service are prescribed). Based on these reports, the OECD compiles the PPP data of the ICP.

For example, in the case of railway transportation in urban areas, the item for pricing is specified as

“an area ticket that allows changing to another mode of transport (such as a bus or tram) with a validity of 60 to 120 minutes for one ride, weekdays at 5pm”

- As this example shows, specifications of items are mainly based on European experience. Moreover, quality differences in the provision of services, such as the frequency of trains, delays, crimes, accidents, the cleanliness of trains, etc., are not taken into account (Tsukada 2017).

14

## How can we account for quality differences in price comparisons?

- There can be many factors that determine “quality”.
- Such factors are usually very hard to identify and measure.
- Service is a package of various unobservable factors.

### Ask consumers directly

Conduct surveys on consumer preferences

15

## Objective of the paper

- We would like to quantify the welfare differences between US and Japan caused by differences in quality of services in US and Japan using quality adjusted quantity index numbers

$$Q_{US,Japan}^{QA} = Q_{US,Japan} |_{quality\_unadjusted} \times \frac{Quality_{Japan}}{Quality_{US}}$$

- The quality un-adjusted quantity index is derived using PPP from ICP

$$Q_{US,Japan} |_{quality\_unadjusted} = \frac{\sum_{i=1}^N P_{iJapan} q_{iJapan} / PPP_{US,Japan}}{\sum_{i=1}^N P_{iUS} q_{iUS}}$$

The objective is to estimate the *quality adjustment factor* using consumer surveys

16



# Identification Procedure (1)

Suppose services of the average Japanese quality were offered in the US in English.

If the Japanese service was better in quality than the corresponding US service, how much more would you be willing to pay for the Japanese service?



Relative MWP (or MRS) for Japanese Service Evaluated at the US Price by the US (price premium for higher quality of Japanese Services)



Relative MWP for JPN service by the US people =  $(1 + b_{US})$

17

- Q3** Suppose services of average Japanese quality were offered in the US in English.  
 If the Japanese service was better in quality than the corresponding US service, how much more would you be willing to pay for the Japanese service?  
 Conversely, if the Japanese service was worse in quality, how much cheaper would it have to be for you to choose it over the corresponding US service?  
 \* Please note that the numbers in the list below do not necessarily match the numbers in the explanation of service categories.  
 \*

	Japanese quality is worse and so I feel a discount is necessary	←How much cheaper would it have to be for you choose the Japanese service? How much more would you be willing to pay for the Japanese service? →													Japanese quality is better and so I would be willing to pay more
	60% or even more of a discount is necessary/will absolutely not use	-50%	-40%	-30%	-20%	-10%	0	+10%	+20%	+30%	+40%	+50%	Would be willing to pay 60% or even more		
1. Taxi Response to previous question: → (【Q2S1の選択内容】)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>		
2. Rental car Response to previous question: → (【Q2S2の選択内容】)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>		
3. Automobile repair Response to previous question: → (【Q2S3の選択内容】)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>		
4. Subway/urban commuter train Response to previous question: → (【Q2S4の選択内容】)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>		
5. Long-distance train Response to previous question: → (【Q2S5の選択内容】)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>		
6. Air travel Response to previous question: → (【Q2S6の選択内容】)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>		

18

## US-Japan Survey: Quality differences and willingness to pay

- Survey was supported by funding from Japan Productivity Center
- Internet surveys were conducted both in Japan and the United States in February-April, 2017.
- Sampling 20-60s, reflecting the age-gender distribution in the census.
- Japanese Sample: From individuals who stayed in the United States at least for a period of **three months** since April, 2012.

**Sample size: 519 (480 valid responses – eliminated extreme answers)**

- US Sample: Individuals who stayed in Japan for at least **one month** since April, 2012. (initially imposing staying for three months or longer, but it was very hard to collect enough sample size)

**Sample size: 528 (412 valid responses)**

19

## Service Industry

1	Taxi	15	Hotel (mid-range)
2	Rental car	16	Hotel (economy)
3	Automobile repair	17	ATM, money wiring service
4	Subway	18	Real-estate agent
5	Long-distance train	19	Hospital
6	Air travel	20	Postal mail
7	Parcel delivery service	21	Provider with a mobile phone line
8	Convenience store	22	TV reception service using cable, satellite, Wi-Fi, etc.
9	General merchandise store	23	Hair dressing/beauty services (including beauty salons)
10	Department store	24	Laundry
11	Coffee shop	25	Travel services
12	Hamburger restaurant	26	Electricity, gas, heat supply, sewerage and water distribution/pipe repairs & management
13	Casual dining restaurant	27	Museum/art gallery
14	Hotel (luxury)	28	University education

20

# Estimation of Quality Difference and Willingness to Pay

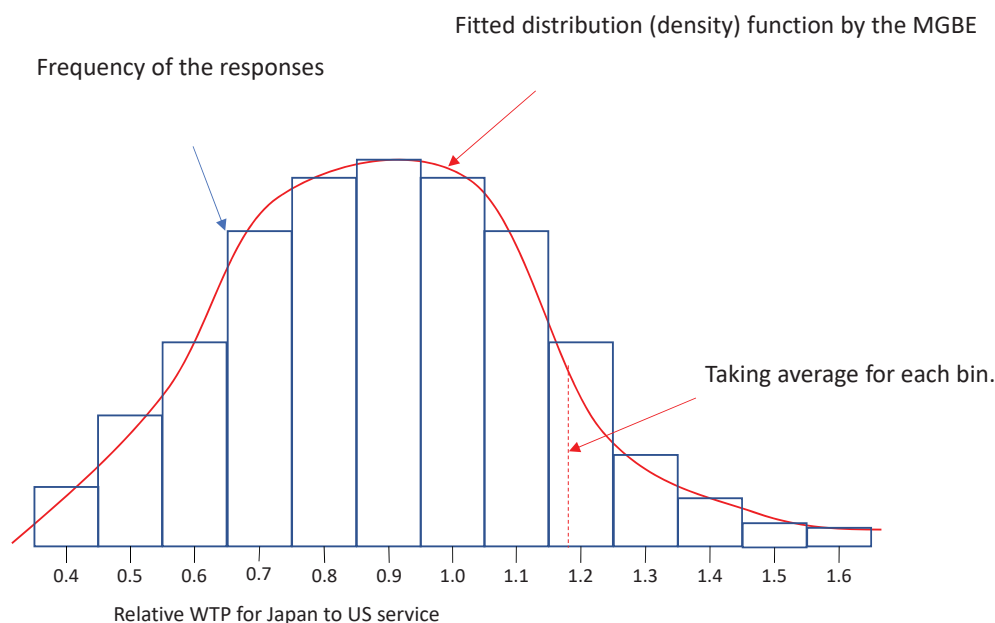
## Two Issues:

- 1) Questionnaire has responses in intervals – converting them to single values
  - Use average of the intervals but poses problems with the final open-ended interval
- 2) Differences between population and sample characteristics indicates that self-selection could induce biases into estimates

**We deal with both of these econometrically.**

21

## Curve Fitting to Interval and Open Ended Data



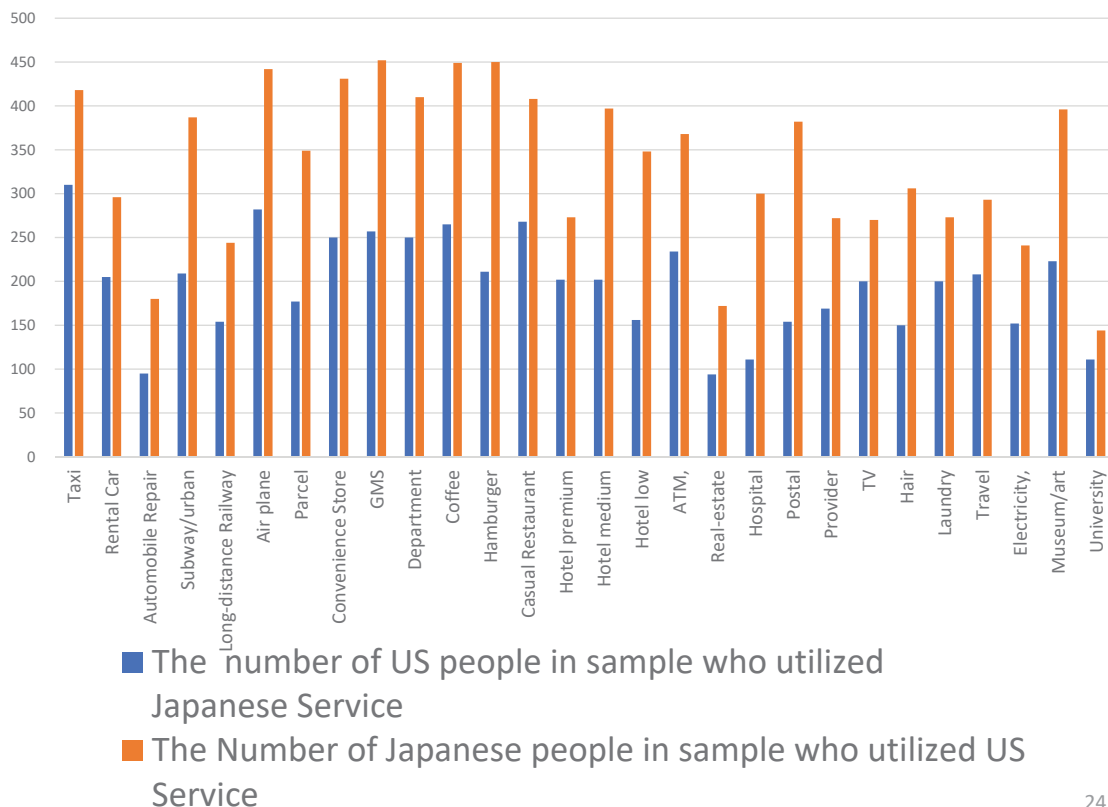
22

## Sample versus Population characteristics

	US		Japan	
	Survey	Nationwide	Survey	Nationwide
household income	\$107,902	\$53,889	¥9,772,578	¥5,458,000
age	35.522	37.6	44.315	46.4
female	0.473	0.508	0.500	0.514
famsize	3.145	2.64	3.042	2.38
univ graduate	0.553	0.205	0.702	0.299
marriage	0.326	0.524	0.704	0.589
Total Population		321419		127110

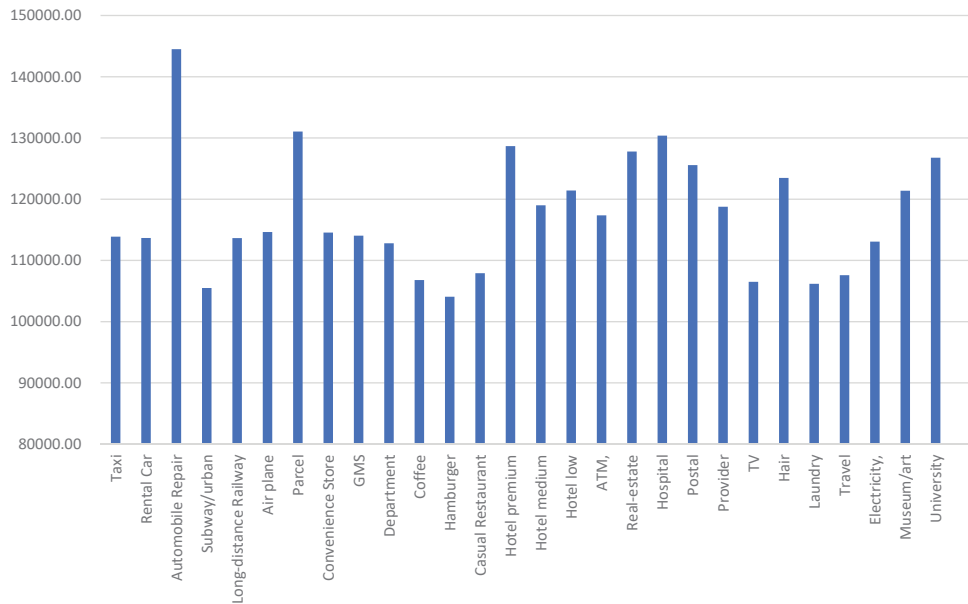
23

## Service Utilization



24

## Mean Income Differences (US)



The Average Income of US people who experienced Japanese services.

25

## Selection Biases

- The sample averages of income and other variables are different from those in the census and other survey.
- Two types of selection biases might exist
  - 1) Selection to visiting US or Japan
  - 2) Selection to utilizing particular service
- Unfortunately, 1) is very hard to deal with because of very tiny fraction of US people visit and stay in Japan for more than one month.
- We control for the second bias using Heckman's selection model.

26

## Estimation of Quality Difference and Willingness to Pay

- 1) Estimate both OLS and Heckman for each country and sector
- 2) Use the national average values for the covariates, construct the predicted values
- 3) If the inverse Mills ratio is significantly different from zero, use the predicted values from Heckman's model, otherwise, use estimates of OLS.

27

## Identification Procedure (2)

- From our survey, we can obtain two estimates of the relative price premium for Japanese Service
- Relative MWP for Japanese services by *US* people =  $(1 + b_{US})$
- Relative MWP for US services by Japanese people =  $(1 + b_{JPN})$
- Relative MWP for Japanese services by Japanese people =  $\frac{1}{(1+b_{JPN})}$

If preferences in both countries are identical,  $\frac{1}{(1+b_{JPN})} = (1 + b_{US})$

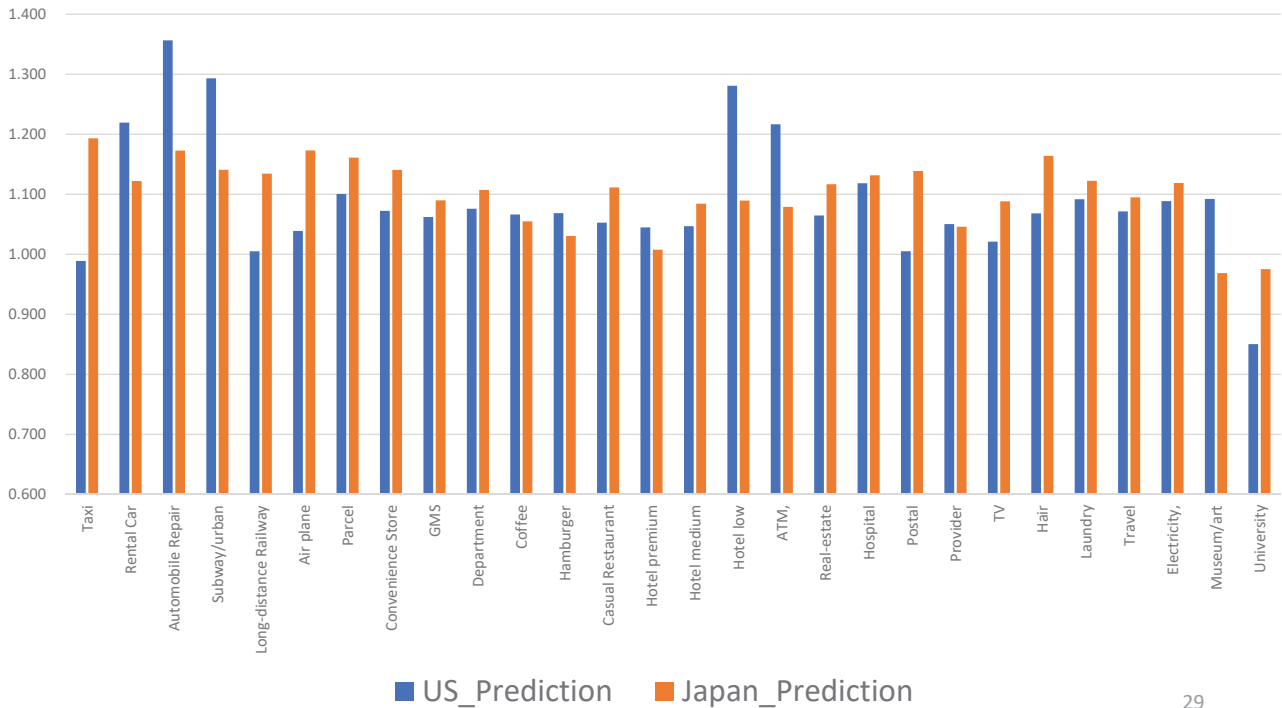
- As the quality adjustment ratio, we take the Geometric Mean of the two estimates:

$$\frac{(1+a_{JPN})}{(1+a_{US})} = \sqrt{\frac{(1+b_{JPN})}{(1+b_{US})}}$$

28

# Predicted National Average MWP service sectors - Japan/US

$$(1 + b_{JPN}) \text{ and } \left(\frac{1}{1+b_{US}}\right)$$

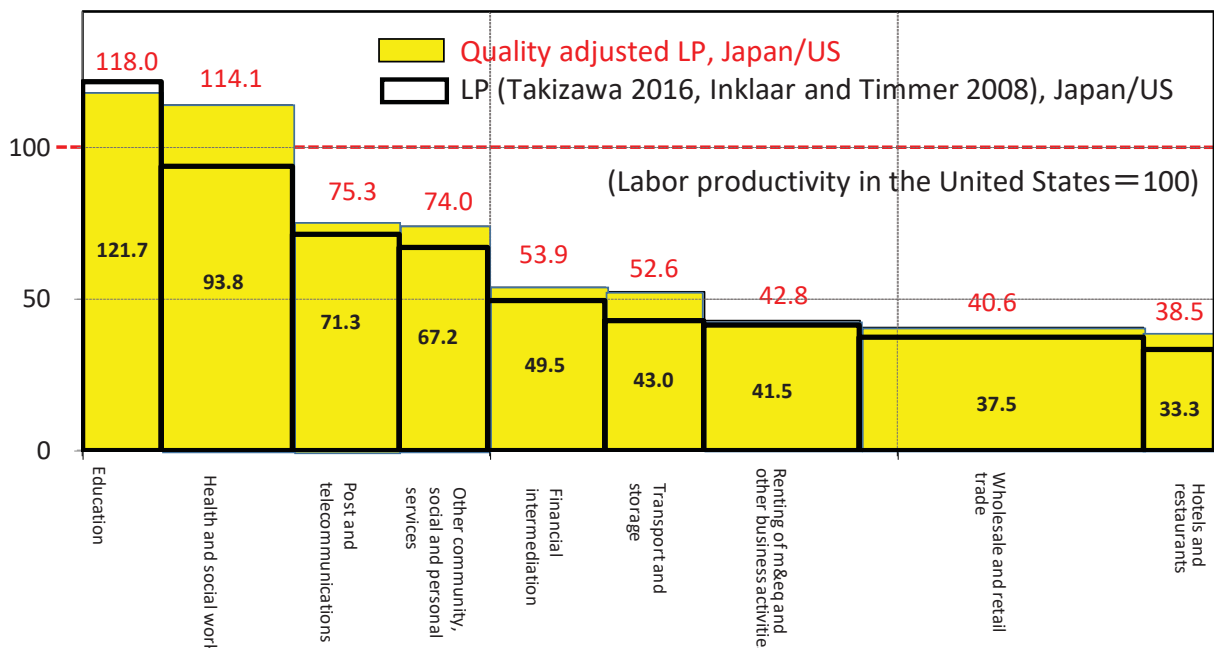


## Implication for Japan-US Labor Productivity Gap

Quality Adjusted Labor productivity gap between Japan and the United States and value added share (2010-2012)

Labor productivity, Japan/US (US=100)  
0 20

Value added share in Japan's total GDP  
40 Total = 55.5%



We did not make quality adjustment of intermediate inputs.



## Conclusions

- PPPs from ICP are used to convert service sector expenditures as well as outputs for international comparisons.
- While ICP uses Structured Product Descriptions to specify items for price surveys, these surveys do not adequately account for quality differences.
- To the extent quality differences are not captured, PPPs reflect both price as well as quality differences in the items priced.
- Quality differences are likely to be significant in service sector products (transport etc.) – at least anecdotal evidence suggests this.
- This paper represents first ever attempt to estimate PPPs for the services sector after adjustment for quality differences.

31

## Conclusions

- Conducted a special survey of consumers in Japan and USA who have spent a reasonable length of time in visitor countries
- The survey is facilitated by funding from Japan Productivity Center.
- Based on the analysis of data on differences in quality as perceived by consumers, a quality adjusted PPP is constructed.
- Econometric analysis is used for correcting sample selection bias.
- We make use of Sato-Vartia index as it allows for a simple multiplicative decomposition of quality effects.
- Our estimated effect of quality difference is about 10%.
- We are currently in the process of estimating the effect of quality differences in services sector on overall Household Consumption PPP.

32

## 参考文献

- 深尾京司 (2012) 『「失われた20年」と日本経済—構造的原因と再生への原動力の解明』, 日本経済新聞出版社.
- 深尾京司 (2017) 「サービス産業の生産性—正確把握へ統計改革急げ」2017年2月15日 日本経済新聞「経済教室」に掲載.
- 深尾京司・池内健太 (2017) 「サービス品質の日米比較～アンケート調査の結果とその含意～」, 『生産性レポート』第4号, 日本生産性本部 生産性総合研究センター.
- Fukao, Kyoji (2013). Explaining Japan's Unproductive Two Decades. *Asian Economic Policy Review*, vol. 8, no. 2, pp. 193–213.
- Fukao, Kyoji, Taisuke Kameda, Kota Nakamura, Ryoichi Namba and Masahiro Sato (2017) "Measurement of Deflators and Real Value Added in the Service Sector," 経済分析, 第194号, pp. 9-44.
- Gilmore, Teresa L., Amanda S. Lyndaker, Sarah J. Pack, and Simon N. Randrianarivel (2011). Annual Industry Accounts, Revised Statistics for 2003–2010. *Survey of Current Business*, December 2011, pp. 15–27.
- Inklaar, Robert and Marcel P. Timmer (2008). GGDC Productivity Level Database: International Comparisons of Output, Inputs and Productivity at the Industry Level. GGDC Research Memorandum, GD-104, Groningen Growth and Development Centre, University of Groningen.
- Jorgenson, Dale. W., Koji Nomura, and Jon D. Samuels (forthcoming) . A Half Century of Trans-Pacific Competition: Price Level Indexes and Productivity Gaps for Japanese and U.S. Industries, 1955–2012," in Dale W. Jorgenson, Kyoji Fukao, and Marcel P. Timmer, eds., *Growth and Stagnation in the World Economy*, Cambridge University Press.
- 経済産業省 (2013) 『通商白書2013年版』 (第3節 労働生産性及びTFPの国際比較) .

33

## 参考文献

- Mayerhauser, Nicole M. and Erich H. Strassner (2010). Preview of the Comprehensive Revision of the Annual Industry Accounts, Changes in Definitions, Classification, and Statistical Methods. *Survey of Current Business*, March 2010, pp. 1–16.
- 森川正之 (2014) 『サービス産業の生産性分析: ミクロデータによる実証』, 日本評論社.
- OECD/Eurostat (1997) *Construction Price Indices: Sources and Methods*, OECD.
- OECD-Eurostat (2012) *EUROSTAT-OECD Methodological Manual on Purchasing Power Parities (PPPs)*, 2012 edition, Publications Office of the European Union.
- OECD (2017) *Purchasing Power Parities (PPP) (indicator)*, <https://data.oecd.org/conversion/purchasing-power-parities-ppp.htm>より2017年7月25日ダウンロード.
- OECD/Eurostat (2014) *Eurostat-OECD Methodological Guide for Developing Producer Price Indices for Services: Second Edition*, OECD Publishing.
- 高山和夫・金田芳子・藤原裕行・今井玲子 (2013) 「平成17年基準改定等におけるGDPデフレーターの見直しとその影響について～内閣府経済社会総合研究所と日本銀行調査統計局の共同研究を踏まえた取り組み～」季刊国民経済計算, 第150号, pp. 15-34.
- 滝澤美帆 (2016) 「日米産業別労働生産性水準比較」『生産性レポート』第2号, 日本生産性本部, 生産性総合研究センター.
- 塚田武重 (2017) 「ICP (International Comparison Program) 国際比較プログラム～商品・サービスの地理的・文化的違いの妥協点をどこに求めるか～」総務省統計局『統計Today』No.117, <http://www.stat.go.jp/info/today/117.htm>より2017年7月24日ダウンロード.
- 統計改革推進会議 (2017) 「統計改革推進会議 最終取りまとめ」内閣官房統計改革推進室.

34

Estimating the Impacts of Program Benefits:  
Using Instrumental Variables with  
Underreported and Imputed Data\*

Melvin Stephens Jr.

Takashi Unayama

*University of Michigan*

*Hitotsubashi University*

*and NBER*

This Version: December 26, 2017

---

\*Stephens: Department of Economics, University of Michigan, 611 Tappan St., 341 Lorch Hall, Ann Arbor, MI 48109-1220, e-mail: mstep@umich.edu and National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA. Unayama: Institute of Economic Research, Hitotsubashi University, Naka 2-1, Kunitachi, Tokyo, Japan, e-mail: unayama@ier.hit-u.ac.jp. Tom Eldridge provided excellent research assistance. We thank Gary Engelhardt as well as seminar participants at Illinois, Michigan, Virginia, Williams, and the NBER Summer Institute for helpful suggestions. We also thank the Statistical Bureau of the Japanese Government for allowing access to the Family Income and Expenditure Survey data. A part of this project is financially supported by KAKENHI (15H03357, 15H01943).

**Estimating the Impacts of Program Benefits:  
Using Instrumental Variables with Underreported and Imputed Data**

**Abstract**

Survey non-response has risen in recent years which has increased the share of imputed and underreported values found on commonly used datasets. While this trend has been well-documented for earnings, the growth in non-response to government transfers questions has received far less attention. We demonstrate analytically that the underreporting and imputation of transfer benefits can lead to program impact estimates that are substantially overstated when using instrumental variables methods to correct for endogeneity and/or measurement error in benefit amounts. We document the importance of failing to account for these issues using two empirical examples.

# 1 Introduction

Vast economic literatures estimate the impacts of government benefits, typically using instrumental variables (IV) methods that treat benefit amounts as an endogenous regressor since program participation is often a choice (e.g., see surveys by Krueger and Meyer 2002; Currie 2004). Benefits reported on household surveys are typically measured with error and these errors are not likely to be classical as it is quite common for benefit amounts to be underreported (understated) or contain imputed values. We demonstrate analytically and via two empirical examples that IV estimation in such cases tends to overstate, sometimes substantially, the causal effect of program benefits.

Benefits are routinely imputed when households acknowledge receiving a benefit but do not recall the amount.<sup>1</sup> The top left corner of Figure ?? shows the well-known substantial increase in earnings imputations in the CPS (Lillard, Smith, and Welch 1986; Hirsch and Schumacher 2004; Bollinger and Hirsch 2006; Heckman and LaFontaine 2006).<sup>2</sup> The Figure also shows the far less appreciated fact that benefit imputations have increased just as dramatically over this period.<sup>3</sup>

A related issue is the underreporting of benefits in surveys. For example, the Consumer Expenditure Survey requires a single valid non-zero report from a major income source to deem a household as a “complete income reporter,” potentially ignoring many other income sources (Paulin and Ferraro 1994). Meyer, Mok, and Sullivan (2009) find that total benefits received, computed by aggregating and appropriately weighting survey responses, fall short of administrative records of total benefit disbursements even when including imputations.

These types of measurement error yield important inconsistencies in empirical analysis. E.g.,

---

<sup>1</sup>Many researchers fail to acknowledge imputed data. Surveying articles that use the Current Population Survey (CPS) as the primary data source and were published in 2004 and 2013, inclusive, we find only 19 percent (16 out of 86 articles) mention imputed values. Even when acknowledged, some studies still treat imputed values as actual data. The eight journals surveyed are the *American Economic Review* (except *Papers and Proceedings* issues), *Industrial and Labor Relations Review*, the *Journal of Human Resources*, the *Journal of Labor Economics*, the *Journal of Public Economics*, *Labour Economics*, the *Quarterly Journal of Economics*, and the *Review of Economics and Statistics*.

<sup>2</sup>A sharp rise in earnings imputations is also found in the 1990s in the CPS Outgoing Rotation Group (Bollinger and Hirsch 2006). Determining which earnings values are imputed in the March CPS becomes less transparent beginning in 1988. See <http://www.psc.isr.umich.edu/dis/data/kb/answer/1349>.

<sup>3</sup>Meyer, Mok, and Sullivan (2009) present a related set of results in terms of dollars imputed rather than individuals. Prior to 1988, unemployment insurance and worker’s compensation benefits are combined with other benefits. Prior to 1982, the CPS imputation codes for AFDC/TANF do not match the codebook values. Figure ?? imputation rates account for item non-response and whole supplement non-response, the roughly 10% of households that do not provide sufficient data for the March supplement. The variable FL-665, a flag for whole supplement non-response, does not appear on the public-use CPS data until 1991 although it does appear on the Unicon CPS files beginning in 1988. We thank Jay Stewart of the Bureau of Labor Statistics for directing us to these pre-1991 data.

since CPS earnings imputations do not account for union status, imputed earnings are uncorrelated with union status. As a result, Hirsch and Schumacher (2004) and Bollinger and Hirsch (2006) find that OLS estimates of the union wage gap are substantially understated (attenuated) when including imputed earnings as compared to only using non-imputed earnings observations.

We show that underreporting and imputation can lead IV estimates to dramatically overstate the impacts of transfer programs. For example, if the instrument is based on program rules that vary across states and over time, imputed benefit values are not correlated with the instrumental variable if the imputation procedure does not condition on state of residence. The first stage estimated impact of the instrument on benefit amounts generally will be attenuated when using imputed benefits and, since the IV estimate is the ratio of the reduced form to the first stage coefficients on the instrument, the IV estimate will exceed its true value. When the instrument is uncorrelated with the imputed values and missing observations are randomly assigned, we show that the probability limit of the IV estimator exceeds the true IV parameter by a factor of  $1/p$  where  $p$  is the fraction of households correctly reporting benefits. Since only two-thirds of recent CPS households correctly report benefits, IV estimates generated using imputed benefits are biased upwards by 50 percent. Benefit underreporting has a similar impact on the IV estimator.

If the non-reporting is randomly assigned, a straightforward empirical solution is to only use the non-imputed sub-sample. If values instead are missing at random (i.e., random after conditioning on covariates), methods which account for selection on observable characteristics such as inverse propensity score weighting can be applied. With selection on unobservables, estimates using the non-imputed sample are also inconsistent. We briefly discuss possible solutions in such instances.

We present two examples to demonstrate the empirical importance of these estimation issues. The first example uses the U.S. Social Security “notch” which Englehardt, Gruber, and Perry (2005) exploit to examine the impact of Social Security income on the propensity of the elderly to live independently. Since Social Security benefit imputations in the CPS use broad age categories rather than exact age, we find that the IV estimates are biased upwards by 20 to 30 percent. Our second example is a test for “excess sensitivity” among Japanese households in which monthly consumption changes are regressed on monthly income changes using the predictable pattern of child benefit payments as an instrument. Since only one quarter of eligible households report

receiving these payments, the IV estimate is overstated by more than a factor of three.

The measurement error induced by underreporting and imputation is akin to “mean reverting” measurement error (Bound and Krueger 1991; Bound, Brown, Duncan, and Rodgers 1994).<sup>4</sup> Berger, Black, and Scott (2000) analyze the inconsistency of the IV estimator when using a noisy measure to instrument for another noisy measure when both suffer from mean reverting measurement error.<sup>5</sup> In our analysis, this inconsistency arises even when the instrument is correctly measured as is typical when benefit rules vary by well-measured characteristics such as age and state of residence. Our results easily extend to situations where the outcome of interest is underreported or imputed.

## 2 Econometric Framework

### 2.1 Model Setup

We focus on the population regression model for a continuous outcome  $y$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \tag{1}$$

where  $x$  is an endogenous, continuous regressor such that  $Cov(x, u) \neq 0$ .<sup>6</sup>

Suppose that  $z$  is a valid, continuous instrumental variable for  $x$  such that  $Cov(x, z) \neq 0$  and  $Cov(z, u) = 0$ . The first stage and reduced form equations are, respectively,

$$x = \pi_0 + \pi_1 z + \epsilon \tag{2}$$

$$y = \delta_0 + \delta_1 z + \varepsilon \tag{3}$$

Since  $z$  is assumed to be exogenous and free from measurement error, the OLS estimators for the coefficients on  $z$  in equations (2) and (3) are consistent as long the left-hand side variables in each equation are free of measurement error or suffer from classical measurement error. In addition, under these conditions, the IV estimator for  $\beta_1$ , which can be written as  $\hat{\delta}_1/\hat{\pi}_1$ , is also consistent.

---

<sup>4</sup>Gibson and Kim (2010) discuss a related issue for errors from using long-term retrospective recall data.

<sup>5</sup>See Card (1996) and Kane, Rouse, and Staiger (1999) for related analyses.

<sup>6</sup>It is straightforward to extend our analysis to include exogenous covariates and to account for binary variables.



Suppose the data contain an indicator,  $s_i$ , for whether the endogenous regressor,  $x$ , is an actual report,  $s_i = 1$ , or an underreport/imputed value,  $s_i = 0$ .<sup>7</sup> Writing  $\hat{\pi}_1$  as a weighted average of the OLS estimators for each sub-group defined by  $s_i$  yields

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_1 &= \frac{\sum_i (z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}{\sum_i (z_i - \bar{z})^2} \\
&= \frac{\sum_i s_i (z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x}) + \sum_i (1 - s_i)(z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}{\sum_i (z_i - \bar{z})^2} \\
&= \frac{\sum_i s_i (z_i - \bar{z})^2}{\sum_i (z_i - \bar{z})^2} \cdot \frac{\sum_i s_i (z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}{\sum_i s_i (z_i - \bar{z})^2} + \frac{\sum_i (1 - s_i)(z_i - \bar{z})^2}{\sum_i (z_i - \bar{z})^2} \cdot \frac{\sum_i (1 - s_i)(z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})}{\sum_i (1 - s_i)(z_i - \bar{z})^2} \\
&= \frac{SS_{z,s=1}}{SS_z} \cdot \hat{\pi}_{1,s=1} + \frac{SS_{z,s=0}}{SS_z} \cdot \hat{\pi}_{1,s=0}
\end{aligned} \tag{4}$$

Thus, the OLS estimator for the first stage slope coefficient,  $\hat{\pi}_1$ , is a weighted average of the corresponding estimators when the model is estimated separately for each group,  $\hat{\pi}_{1,s=1}$  and  $\hat{\pi}_{1,s=0}$ , where the weights are the share of the variation in the instrument,  $SS_z$ , belonging to each group.<sup>8</sup>

## 2.2 Interpreting the IV estimator

Suppose that  $s_i$  is randomly assigned and  $p = P[s = 1]$  is the probability of providing an actual report. The first stage slope estimator using the sample of actual reporters,  $\hat{\pi}_{1,s=1}$ , is a consistent estimator of  $\pi_1$ . In addition, the weights in the final line of (4),  $\frac{SS_{z,s=1}}{SS_z}$  and  $\frac{SS_{z,s=0}}{SS_z}$ , are consistent estimators of  $p$  and  $1 - p$ , respectively. However, the corresponding estimator for the under/imputed reporters,  $\hat{\pi}_{1,s=0}$ , depends upon the corresponding underreporting or imputation process.

One common imputation procedure, the ‘‘hot deck,’’ selects a replacement amount from a ‘‘donor’’ with the same values for a small set of characteristics. Hirsch and Schumacher (2004) and Bollinger and Hirsch (2006) note that this procedure does not preserve the covariance between the

<sup>7</sup>Most datasets contain flags to indicate which observations are imputed and which are not. This set-up is also useful for understanding the impact of underreporting even though this behavior typically is not explicitly flagged.

<sup>8</sup>The analysis focuses on imputed/underreported values of  $x$  but can be extended to either  $y$  or  $z$ . Typically, the instruments for benefits depend on well-measured demographic characteristics. E.g., Medicaid eligibility may depend on a child’s age and the earned income tax credit (EITC) depends upon the family’s number of children. Thus, it is likely that the endogenous regressor will be underreported or imputed while the instrumental variable is not.

allocated variable and the characteristics in the data that are left out of the imputation procedure. If the imputed value of  $x$  does not depend upon  $z$ , the correlation between  $x$  and  $z$  among the imputed observations will be quite small, if not zero.<sup>9</sup> Thus,  $\hat{\pi}_{1,s=0} \approx 0$  and, per equation (4), the probability limit of  $\hat{\pi}_1$  will equal  $p\pi_1 + (1-p) \cdot 0 = p\pi_1$ .<sup>10</sup>

For underreporting, suppose that observed  $x$  is a constant fraction,  $\theta$ , of actual  $x$ . It is straightforward to show that  $plim(\hat{\pi}_1)$  for underreporters is  $\theta \cdot \pi_1$  and, thus, for the full sample  $plim(\hat{\pi}_1) = p\pi_1 + (1-p)\theta\pi_1 < \pi_1$ . Alternatively, when failing to report benefits (i.e.,  $\theta = 0$ ), perhaps when payments are small or received infrequently, the probability limit of  $\hat{\pi}_1$  falls to  $p\pi_1$ .

The impact of underreported or imputed values of  $x$  on the IV estimator can be seen by substituting (4) and an analogous expression for the reduced form estimator into the IV estimator

$$\hat{\beta}_1^{IV} = \frac{\hat{\delta}_1}{\hat{\pi}_1} = \frac{\frac{SS_{z,s=1}}{SS_z} \cdot \hat{\delta}_{1,s=1} + \frac{SS_{z,s=0}}{SS_z} \cdot \hat{\delta}_{1,s=0}}{\frac{SS_{z,s=1}}{SS_z} \cdot \hat{\pi}_{1,s=1} + \frac{SS_{z,s=0}}{SS_z} \cdot \hat{\pi}_{1,s=0}} \quad (5)$$

As discussed above, the denominator converges to values smaller than  $\pi_1$  when the endogenous regressor is underreported or imputed. The reduced form slope estimates,  $\hat{\delta}_{1,s=1}$  and  $\hat{\delta}_{1,s=0}$ , for the actual and under/imputed reporters, respectively, are consistent if  $y$  is neither imputed nor underreported. Thus, the probability limit of the IV estimator exceeds  $\beta_1$  and equals  $\beta_1/p > \beta_1$  if underreporters all report no benefits or if the imputations are uncorrelated with the instrument.<sup>11</sup>

If the non-reporting of values is randomly assigned across observations (i.e., missing completely at random), then a practical solution to generate consistent IV estimates is to simply restrict the analysis to only non-imputed/non-underreported observations.<sup>12</sup> Alternatively, the availability of administrative data can provide a straightforward re-scaling of the first stage estimate when non-

---

<sup>9</sup>Bollinger and Hirsch (2006) note that some correlation between the imputed  $x$ 's and  $z$  will occur if the covariates used in the imputation process for  $x$  are correlated with instrumental variable.

<sup>10</sup>In general, whether or not the probability limit of  $\hat{\pi}$  exceeds  $\pi$  depends upon the imputation procedure. Bollinger and Hirsch (2006) and Heckman and LaFontaine (2006) show that CPS earnings imputations pool GED recipients with high school graduates and those attending, but not graduating from, a post secondary institution. Regressions yield larger GED returns among those with imputed wages relative to those who provide wage information ( $plim(\hat{\pi}_1) > \pi_1$ .)

<sup>11</sup>Extending the analysis to include exogenous regressors,  $\mathbf{w}$ , is straightforward using the Frisch-Waugh-Lovell Theorem. The OLS estimate for the coefficient on  $x$  when regressing  $y$  on  $x$  plus a vector of covariates  $\mathbf{w}$  is numerically equivalent to first separately regressing  $y$  and  $x$  on  $\mathbf{w}$  and then using the resulting residuals in a simple regression. As analogous procedure is available for 2SLS, we can again apply (5) but must compute the weights using the shares of the variation in the residualized values of the instrument  $z$  between the actual and underreported/imputed sub-samples.

<sup>12</sup>As a referee noted, Two Sample IV (Angrist and Krueger 1992) using the full sample for the reduced form and the non-imputed sample for the first stage may provide an efficiency gain over 2SLS with only non-imputed data.

reporting is random. If the non-reporting of values follows the selection on observables assumption, a number of straightforward methods are applicable: apply inverse propensity score weighting to the non-imputed sample (Bollinger and Hirsch 2006), construct imputations using the instruments in the imputation process (Hirsch and Schumacher 2004; Heckman and Lafontaine 2006), and implement the “general correction” formula of Bollinger and Hirsch (2006) to adjust the estimates for observable differences between the groups defined by  $s_i$ . When implementing these methods, the studies listed above do not find substantively different results between using the non-imputed sample only and correcting for selection on observables.

Additional methods may prove useful when confronted with non-random non-response. Recent estimation methods have focused on providing consistent point estimates when data are missing as a function of the outcomes only (Tang, Little, and Raghunathan 2003; Ramalho and Smith 2013) rather than as a function of the regressors as with the selection on observables assumption.<sup>13</sup> Another option is to construct bounds for  $\pi_1$  which, since using the full sample yields consistent estimates of  $\delta_1$ , will help produce bounds on  $\beta_1$ . Since most government benefits have a natural set of bounds due to programmatic rules, it may be possible to adapt methods developed by Manski (1997) and Kline and Santos (2013) to generate bounds on  $\pi_1$  or use the approach of Manski and Pepper (2000) to derive bounds on  $\beta_1$ .<sup>14</sup> We do not pursue these approaches in the current paper.

### 3 Empirical Examples

#### 3.1 The Impact of the Social Security Notch Using Imputed Benefits

The U.S. Social Security “notch” generated a sizable change in Social Security (hereafter S.S.) benefits for the affected birth cohorts (Krueger and Pischke 1992).<sup>15</sup> Englehardt, Gruber, and Perry (2005) (hereafter EGP), using data from the 1980-1999 March CPS supplements, investigate the impact of S.S. income on the probability that elderly-headed families live independently.<sup>16</sup> As OLS estimates of this relationship are likely inconsistent because S.S. benefits are a function

---

<sup>13</sup>These methods are related to those used in the literature on choice based sampling.

<sup>14</sup>See Kreider et al (2012) for a recent application of bounding when SNAP (food stamp) benefits are mis-reported.

<sup>15</sup>The Social Security Administration provides details of the notch at <http://www.ssa.gov/history/pdf/notch.pdf>

<sup>16</sup>EGP limit their analysis to families containing a S.S. recipient who is a male or never married female age 65 and up or is a widowed or divorced female age 62 and up. Their paper provides details of sample construction.

of lifetime earnings (e.g., wealthier individuals have higher benefits and are more likely to live independently), EGP use the variation across birth cohorts driven by the notch to instrument for S.S. benefits. Our analysis is likely important in this case since the share of S.S. benefit recipients with imputed benefits in the CPS rises from 20% to nearly 30% during this period.

To create their instrument, EGP construct a lifetime earnings profile based on the median male earner in the 1916 birth cohort. They use this profile to compute the S.S. benefit for every birth cohort from 1900-1933, using the Consumer Price Index (CPI) to deflate earnings across time. By fixing the earnings profile, the instrumental variable only reflects changes in the programmatic rules across birth cohorts. The solid line in Figure ?? shows the instrument by birth cohort.<sup>17</sup>

Imputations in the March CPS arise from two types of non-response. Item non-response arises when the respondent reports receiving a benefit but does not provide an amount. Whole supplement non-response occurs when households finish the basic CPS interview but do not participate in the March Supplement. As whole supplement non-response has remained constant at roughly ten percent, the recent increase in non-reporting is driven by item non-response.<sup>18</sup>

The CPS uses the hot deck imputation method to allocate missing values by taking a value from a donor observation with the same values for a subset of observable characteristics. For the March CPS supplement, all donors are drawn from the same year. To broaden the scope of potential matches, continuous match characteristics are collapsed into categorical values (e.g., age) while some values of a single categorical characteristic are combined (e.g., race/ethnicity).<sup>19</sup>

Age is used in the hot deck procedure to impute missing S.S. benefits. For item non-response, the imputation procedure uses seven age categories for selecting a donor: less than 35, 35 to 54, 55 to 61, 62 to 64, 65 to 69, 70 to 74, and 75+. For whole supplement non-response, the procedure always groups those ages 65 and up. The long and short dashed lines in Figure ?? show average S.S. income by birth cohort for non-imputed and imputed values, respectively. Actual S.S. income reports exhibit strong evidence of the notch while the imputed values do not.

---

<sup>17</sup>We thank Gary Englehardt for sharing the values of the instrument by birth cohort.

<sup>18</sup>Prior to 1988, information on whole supplement imputation was contained in the data allocation flag for each income measure. In subsequent years, there is a single flag indicating whole supplement non-response.

<sup>19</sup>We thank Ed Welniak for providing us with the internal Census Bureau documents detailing the hot deck procedure beginning with the March 1989 CPS and retroactively applied to the March 1988 CPS. These documents are available from the authors. We have not been able to determine the imputation procedures used in earlier years.

EGP estimate the equation

$$P_{i,t} = \theta SSIncome_{i,t} + \beta \mathbf{X}_{i,t} + \gamma_i + \alpha_t + \phi_i + u_{i,t} \quad (6)$$

where  $P_{i,t}$  is an indicator for having a shared living arrangement;  $SSIncome_{i,t}$  is family S.S. income in thousands of dollars;  $\mathbf{X}_{i,t}$  includes indicators the head's and spouse's (if present) education, spouse's age (if present), marital status (married, widowed, and divorced), white, and female;  $\gamma_i$  is a full set of indicators for the age (age+3 for widowed and divorced women) from ages 65 to 90;  $\alpha_t$  is a set of survey year indicators, and  $\phi_i$  is a set of indicators for the nine Census divisions.<sup>20</sup>

Table 1 presents our results.<sup>21</sup> Applying OLS to equation (6) shows that the probability of living in a shared arrangement falls as S.S. income increases. The impact is over twice as large in the non-imputed sample (column (2)) than in the imputed sample (column (3)), consistent with an attenuation bias due to including those with allocated benefits.

The first stage estimates vary as predicted by our analytical results. The estimated effect of the instrument on S.S. income is nearly 20% larger in the non-imputed sample than in the full sample, consistent with the share of S.S. benefit imputations during this period. Relatedly, the first stage relationship is more than three times larger for the non-imputed sample than the imputed sample.

As the shared living arrangements measure is based on the household roster, there is no reason to expect the reduced form estimate to depend upon whether S.S. income is imputed. While the reduced form estimate in the imputed sample is larger than the non-imputed sample estimate, the standard errors are sufficiently large that these differences are not statistically meaningful.

The final row of Table 1 presents the 2SLS estimates. The 2SLS estimate of -0.023 when using the full sample is over 25% larger than the estimate of -0.018 using the non-imputed sample only. Assuming that S.S. benefits are missing at random, the results from the full sample substantially overstate the efficacy of S.S. benefits in reducing shared living arrangements.<sup>22</sup>

<sup>20</sup>Our analysis differs from EGP's in two ways. First, we use the 1900-1930 birth cohorts rather than the 1900-1933 cohorts. Second, whereas EGP use age-by-year of birth cells, we use individual-level data to match our analytical results. Cell-level results are quite similar to our findings shown here (see Stephens and Unayama 2015a).

<sup>21</sup>Our estimates are weighted by the individual sampling weight for the S.S. recipient. The standard errors are clustered at the year of birth level. As equation (6) includes a number of exogenous covariates, we apply the Frisch-Waugh-Lovell theorem as described earlier and use the resulting residuals to estimate the first stage and reduced form models in order to be consistent with the decomposition shown in equation (5).

<sup>22</sup>When converted to elasticities, following EGP, we find a full sample elasticity of -0.53 which is 25% larger than our

Finally, we use inverse propensity score weighting (IPW) to correct for selection on observable characteristics (Bollinger and Hirsch 2006). We estimate a probit using an indicator for reporting an actual S.S. value as the outcome and use the same regressors as in equation (6). The IPW estimates (column (4)) are nearly identical to the non-imputed sample only estimates (column (2)).

### 3.2 Excess Sensitivity and the Underreporting of Japan’s Child Benefit

A number of developed countries provide transfers based the age and number of children in a family (OECD 2011). In Japan, child benefits are paid three times a year, in equal amounts, in February, June, and October. While the Life-Cycle/Permanent Income Hypothesis (LCPIH) predicts that households will smooth consumption in response to predictable changes in income, a number of papers find that consumption is sensitive to the timing of income receipt including various types of government transfer payments (Stephens 2003; Shapiro 2005; Mastrobouni and Weinberg 2009; Stephens and Unayama 2011) and paychecks (Stephens 2006).

Japan introduced its child benefit system in 1972 by providing benefits to households with three or more children, extending to two child families in 1986, and to one child families in 1992.<sup>23</sup> Child benefits were means tested until 2009. Benefits initially continued until the child was fifteen but this age limit was lowered to three in 1986 before being incrementally raised over multiple years and again reached age fifteen in 2009. Benefits were relatively stable in real terms in the 1970s and 1980s, increased in 1992 and again in the mid and late 2000s, before subsequently decreasing. These benefits constitute over three percent of family income (Stephens and Unayama 2015b).

We test whether consumption exhibits “excess sensitivity” using monthly panel data from the Japanese Family Income and Expenditure Survey (JFIES) during 1992-2009 when all families with children are eligible for benefits and benefits are means tested. Families are surveyed in the JFIES for six consecutive months and are instructed to enter all expenditures and income into a daily diary. Our data contains detailed expenditure and income categories at a monthly frequency.<sup>24</sup>

Child benefits are recorded as part of an “other social security” variable which contains all social welfare benefits except public pension payments. In benefit distribution months, only 24% of

---

elasticity of -0.41 for the non-imputed sample. Stephens and Unayama (2015a) provide details of these calculations.

<sup>23</sup>Stephens and Unayama (2015b) provide a more detailed discussion of Japan’s child benefit system.

<sup>24</sup>Additional details regarding the JFIES are given in Stephens and Unayama (2011).

eligible households report positive benefits amounts with 70% of positive reports exactly matching the child benefit value predicted by programmatic rules (i.e., based on age and number of children) and 20% of positive reports being too high, likely due to receiving additional transfer benefits. Only 4% of households report benefit receipt in non-benefit distribution months.

We regress monthly non-durable consumption changes on monthly income changes and, since income changes may reflect unexpected information (e.g., job loss), instrument for income changes using the monthly child benefit disbursement pattern.<sup>25</sup> Specifically, we estimate the equation

$$\Delta C_{i,t} = \alpha_0 + \alpha \Delta HHincome_{i,t} + \gamma \mathbf{X}_{i,t} + u_{i,t} \quad (7)$$

where  $\Delta C_{i,t}$  is the change in non-durable consumption from month  $t-1$  to month  $t$ ,  $\Delta HHincome_{i,t}$  is the change in household income between adjacent months, and  $\mathbf{X}_{i,t}$  are additional controls for monthly consumption growth including calendar year and month indicators, survey month indicators, the change in the number of household members, and the age of the household head and its square. The substantial amount of child benefit underreporting reduces the endogenous variable,  $\Delta HHincome_{i,t}$ , which makes our analytical results relevant for this analysis.<sup>26</sup>

Table 2 reports the tests of excess sensitivity.<sup>27</sup> Using our full sample (column (1)), the OLS estimate of the marginal propensity of consume out of income is 0.086. After instrumenting for income changes, we find a relatively large and significant estimate of 0.171. A finding of this magnitude typically is considered to be evidence of a substantial violation of the LCPIH.

The full sample first stage estimate is 0.283 although, in the absence of underreporting, we would expect this coefficient to equal one, i.e., income increasing one for one with benefits.<sup>28</sup> Thus, the large degree of underreporting severely attenuates the first stage estimate. Furthermore, since the IV estimate is the ratio of the reduced form estimate to the first stage estimate, in this example

---

<sup>25</sup>Non-durable expenditure is the outcome commonly used in the literature (e.g., Stephens and Unayama 2011). Upon entry into the JFIES, households report total household income for the twelve months prior to the survey period. We use this measure to determine whether households are above or below the means test threshold.

<sup>26</sup> $HHincome_{i,t}$  includes all monthly household income sources except bonus income. Bonuses are typically received in June (a child benefit month) and/or December. The first stage estimates are sensitive to including bonuses although they remain substantially less than one and the corresponding IV estimates are still biased upwards.

<sup>27</sup>The standard errors are clustered at the household level.

<sup>28</sup>One possibility is that child benefits crowd out other sources of income, e.g., earnings are reduced as a behavioral response to child benefits. Even if benefits lead households to work less, it seems very unlikely that these work effort reductions would exactly coincide with the months of benefit receipt rather than be spread throughout the year.



we would expect the IV estimate to simply equal the reduced form estimate in the absence of underreporting. A comparison of the IV and reduced form estimates indicates that underreporting inflates the causal estimate by more than a factor of three and yields a quite different substantive interpretation of the deviation of behavior from the standard model.<sup>29</sup>

One theoretical mechanism for excess sensitivity is that liquidity constrained households respond to anticipated income changes. Following Zeldes (1989), we split the sample based upon whether the household is above (unconstrained) or below (constrained) current year median sample income. For both types of households we find evidence of excess sensitivity in the reduced form estimates in Table 2. However, we find similar attenuated first stage estimates and dramatically overstated 2SLS estimates for both groups due to benefit underreporting.

Assuming that underreporting occurs randomly, we examine a “correct reports” sample defined as observations where the “other social security” amount matches the amount computed for the instrument. We only lose roughly one-third of the sample as benefit changes are zero for the majority of months. The OLS estimate for the correct reports sample (column (4)) is similar to the full sample estimate. Moreover, consistent with the prediction that one yen of child benefits raises family income by one yen, we cannot reject the null that the first stage estimate is one.

However, the remaining estimates in column (4) suggest that the correct reports sample estimates are subject to selection on unobservables. The reduced form estimate for this sample is twice as large as the corresponding full sample estimate. Adjusting for selection on observables (column (5)) yields similar results. One possibility is households that are most likely to report child benefits are more likely to change their spending due to benefits. Clearly, only using non-missing observations is not a universal panacea for addressing underreported and imputed data.

## 4 Discussion

The continuing rise in survey non-response has increased the share of observations with imputed and underreported values for government benefits. We demonstrate analytically that the underreporting

---

<sup>29</sup>One concern is that we may misclassify ineligible households as being eligible due to mis-measured household income. However, we split the sample between high and low income households below in order to examine whether the response can be attributed to liquidity constraints, we find nearly identical first stage estimates for both samples.

and imputation of government transfers can lead to a substantial overstatement of the causal effect of government transfers when applying instrumental variables methods to correct for the endogeneity and/or measurement error. Our empirical findings confirm these concerns.

We conclude with some observations for empirical research. First, researchers should pay close attention to the magnitude of the first stage estimates in addition to the strength of the instruments. Second, when non-reporting is not random, caution needs to be used when dropping non-responders as illustrated by our child benefit example. Third, researchers should take care to construct correct variance estimates when using imputed data, possibly through adjusted variance formulas (Abadie and Imbens 2012) or bootstrap methods (Shao and Sitter 1996). Finally, it is important to understand the imputation procedures a data provider uses. For example, for the four benefit items in the March CPS that use state of residence for imputations, this information is collapsed into five broad groupings which do not reflect geographic location, are constant over time and, thus, are unlikely to be correlated with the state-year variation used in many IV applications.

## Bibliography

- Abadie, Alberto and Guido W. Imbens (2012) “A Martingale Representation for Matching Estimators,” *Journal of the American Statistical Association*, 107(498):833-43.
- Angrist, Joshua D. and Alan B. Krueger (1992) “The Effect of Age at School Entry on Educational Attainment: An Application of Instrumental Variables with Moments from Two Samples,” *Journal of the American Statistical Association*, 87(418):328-36.
- Black, Dan A., Mark C Berger, and Frank A Scott (2000) “Bounding Parameter Estimates with Nonclassical Measurement Error,” *Journal of the American Statistical Association*, 95(451):739-48.
- Bollinger, Christopher R. and Barry T. Hirsch (2006) “Match Bias from Earnings Imputation in the Current Population Survey: The Case of Imperfect Matching,” *Journal of Labor Economics*, 24(3):483-519.

- Bound, John, Charles Brown, Greg J. Duncan and Willard L. Rodgers (1994) "Evidence on the Validity of Cross-Sectional and Longitudinal Labor Market Data," *Journal of Labor Economics*, 12(3):345-68.
- Bound, John and Alan B. Krueger (1991) "The Extent of Measurement Error in Longitudinal Earnings Data: Do Two Wrongs Make a Right?" *Journal of Labor Economics*, 9(1):1-24.
- Card, David (1996) "The Effect of Unions on the Structure of Wages: A Longitudinal Analysis," *Econometrica*, 64(4):957-79.
- Currie, Janet (2004) "The Take Up of Social Benefits," *National Bureau of Economic Research Working Paper No. 10488*.
- Engelhardt, Gary V., Jonathan Gruber, and Cynthia D. Perry (2005) "Social Security and Elderly Living Arrangements: Evidence from the Social Security Notch," *The Journal of Human Resources*, 40(2):354-72.
- Gibson, John, and Bonggeun Kim. "Non-Classical Measurement Error in Long-Term Retrospective Recall Surveys," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 72(5): 687-95.
- Heckman, James J., and Paul A. LaFontaine (2006) "Bias-Corrected Estimates of GED Returns," *Journal of Labor Economics*, 24(3):661-700.
- Hirsch, Barry T. and Edward J. Schumacher (2004) "Match Bias in Wage Gap Estimates Due to Earnings Imputation," *Journal of Labor Economics*, 22(3):689-722.
- Kane, Thomas J., Cecilia Elena Rouse, and Douglas Staiger (1999) "Estimating Returns to Schooling When Schooling is Misreported," *National Bureau of Economic Research Working Paper No. 7235*.
- Kline, Patrick and Andres Santos (2013) "Sensitivity to Missing Data Assumptions: Theory and an Evaluation of the U.S. Wage Structure," *Quantitative Economics*, 4(2):231-67.
- Kreider, Brent, John V. Pepper, Craig Gundersen, and Dean Jolliffe (2012) "Identifying the Effects

- of SNAP (Food Stamps) on Child Health Outcomes When Participation Is Endogenous and Misreported,” *Journal of the American Statistical Association*, 107:499, 958-75.
- Krueger, Alan B. and Bruce D. Meyer. (2002) “Labor Supply Effects of Social Insurance,” *Handbook of Public Economics, Vol. 4, Part 7*, Chapter 33.
- Krueger, Alan B. and Jörn-Steffen Pischke. (1992) “The Effect of Social Security on Labor Supply: A Cohort Analysis of the Notch Generation”, *Journal of Labor Economics*, 10(4):412-37.
- Lillard, Lee, James P. Smith, and Finis Welch (1986) “What Do We Really Know about Wages? The Importance of Nonreporting and Census Imputation,” *Journal of Political Economy*, 94(3):489-506.
- Manski, Charles F. (1997) “Monotone Treatment Response,” *Econometrica*, 65(6):1311-34.
- Manski, Charles F. and John V. Pepper (2000) “Monotone Instrumental Variables: With an Application to the Returns to Schooling,” *Econometrica*, 68(4):997-1010.
- Mastrobuoni, Giovanni and Matthew Weinberg (2009) “Heterogeneity in Intra-Monthly Consumption Patterns, Self-Control, and Savings at Retirement,” *American Economic Journal: Economic Policy*, 1(2):163-89.
- Meyer, Bruce D., Wallace K. C. Mok and James X. Sullivan (2009) “The Under-Reporting of Transfers in Household Surveys: Its Nature and Consequences,” *National Bureau of Economic Research Working Paper No. 15181*.
- Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). 2011. Doing Better for Families. OECD Publishing.
- Paulin, Geoffrey D. and David L. Ferraro (1994) “Imputing income in the Consumer Expenditure Survey,” *Monthly Labor Review*, 117(12):23-31.
- Ramalho, E.A. and Smith, R.J. (2013) “Discrete choice nonresponse”, *Review of Economic Studies*, 80(1), 343-64.

- Shao, Jun and Randy R. Sitter (1996) "Bootstrap for Imputed Survey Data," *Journal of the American Statistical Association*, 91(435):1278-88.
- Shapiro, Jesse M. (2005) "Is There a Daily Discount Rate? Evidence from the Food Stamp Nutrition Cycle," *Journal of Public Economics*, 89(2-3):303-25.
- Stephens Jr., Melvin (2003) "'3rd of tha Month': Do Social Security Recipients Smooth Consumption Between Checks?" *American Economic Review*, 93(1):406-22.
- Stephens Jr., Melvin (2006) "Paycheque Receipt and the Timing of Consumption," *The Economic Journal*, 116(513):680-701.
- Stephens Jr., Melvin and Takashi Unayama (2011) "The Consumption Response to Seasonal Income: Evidence from Japanese Public Pension Benefits," *American Economic Journal: Applied Economics*, 3(4): 86-118.
- Stephens Jr., Melvin and Takashi Unayama (2015a) "Estimating the Impacts of Program Benefits: Using Instrumental Variables with Underreported and Imputed Data," *National Bureau of Economic Research Working Paper No. 21248*.
- Stephens Jr., Melvin and Takashi Unayama (2015b) "Child Benefit Payments and Household Wealth Accumulation," *Japanese Economic Review*, 66(4):447-65.
- Tang, Gong, Little, Roderick J.A., and Trivellore E. Raghunathan (2003) "Analysis of multivariate missing data with nonignorable nonresponse," *Biometrika*, 90(4):747-64.
- Van Lancker, Wim, Joris Ghysels, and Bea Cantillon (2012) "An International Comparison of the Impact of Child Benefits on Poverty Outcomes for Single Mothers," *Centre for Social Policy Working Paper No. 12/03*.
- Zeldes, Stephen P. (1989) "Consumption and Liquidity Constraints: An Empirical Investigation," *Journal of Political Economy*, 97(2):305-46.

**Table 1 - Social Security Notch Regressions**

Sample:	Pooled	Non-Imputed S.S. Income	Imputed S.S. Income	Non-Imputed S.S. Income IPW
	(1)	(2)	(3)	(4)
OLS	-0.010 (0.0005)	-0.012 (0.0005)	-0.005 (0.0008)	-0.011 (0.0005)
First Stage (Residuals)	0.227 (0.050)	0.267 (0.056)	0.070 (0.040)	0.270 (0.059)
Reduced Form (Residuals)	-0.0052 (0.0026)	-0.0048 (0.0023)	-0.0071 (0.0045)	-0.0049 (0.0022)
2SLS	-0.023 (0.014)	-0.018 (0.010)	-0.097 (0.068)	-0.018 (0.010)
N	256,710	203,983	52,727	203,983

Notes: Each estimate in the Table is from a separate regression. The dependent variable is an indicator whether the family is living in a shared arrangement. The OLS and 2SLS estimates are the coefficients on family S.S. income and also include controls listed in the text. The first stage and reduced form estimates are the coefficient on the S.S. instrument based on the Frisch-Waugh-Lovell decomposition. Standard errors are clustered at the year of birth.

**Table 2 - Excess Sensitivity Regressions**

Sample:	Full	Below Median Income	Above Median Income	Correct Reports	Correct Reports IPW
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
OLS	0.086 (0.009)	0.079 (0.010)	0.090 (0.013)	0.087 (0.011)	0.090 (0.011)
2SLS	0.171 (0.083)	0.135 (0.080)	0.220 (0.144)	0.086 (0.038)	0.094 (0.039)
First Stage	0.283 (0.032)	0.312 (0.047)	0.253 (0.043)	1.07 (0.045)	1.10 (0.046)
Reduced Form	0.048 (0.024)	0.042 (0.025)	0.056 (0.037)	0.093 (0.041)	0.103 (0.044)
N	186,383	93,063	93,320	122,217	122,217

Notes: Each estimate in the Table is from a separate regression. The dependent variable is the change in in non-durable consumption from month  $t-1$  to  $t$ . The OLS and 2SLS estimates are the coefficients on the change in reported other social security income from month  $t-1$  to  $t$ . The first stage and reduced form estimates are the coefficient on the programmatic child benefit change from month  $t-1$  to  $t$ . Additional controls are listed in the text.

Figure 1: March CPS Share Imputed Among Those With Positive Amounts 1988-2013

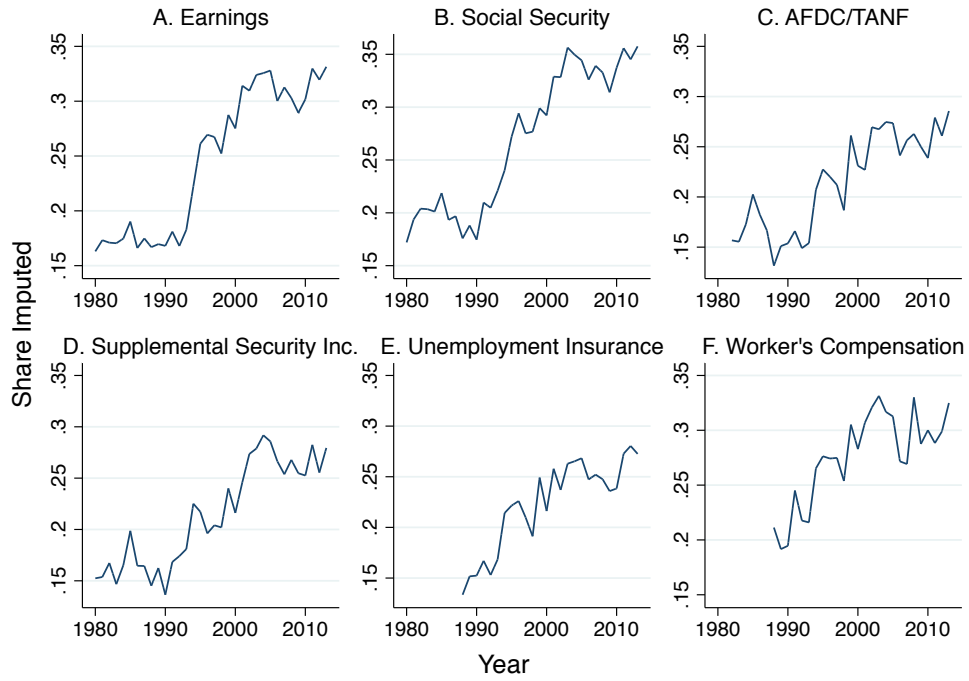
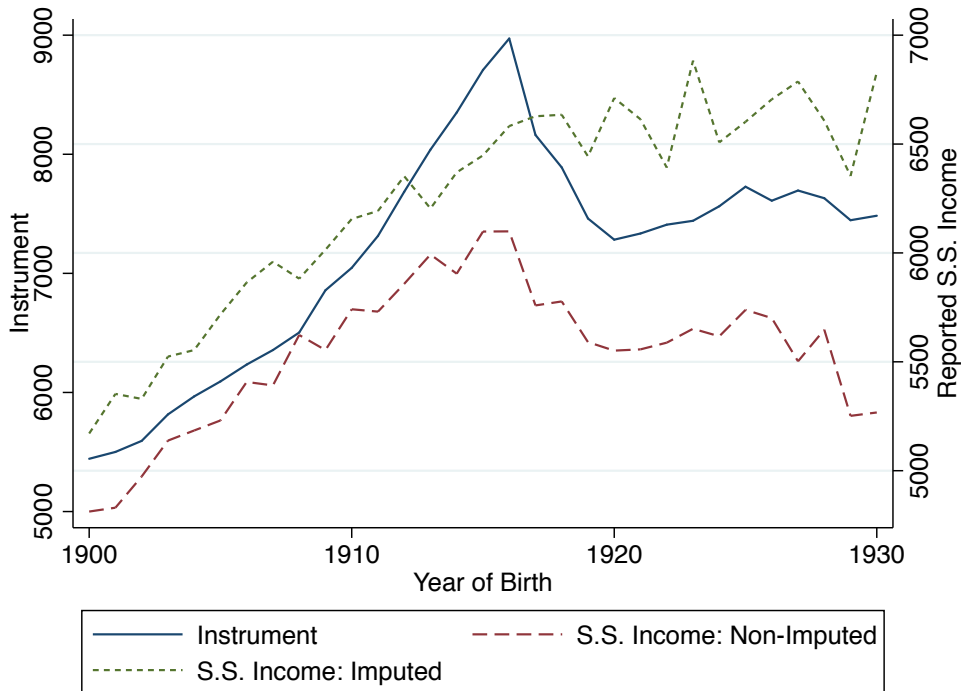


Figure 2: CPS Social Security Income and the Instrument by Year of Birth





# 世代間資産移転と相続税

北村行伸  
一橋大学経済研究所

## 家計資産統計

- 家計の保有する資産については、国民経済計算（SNA統計）の貸借対照表の中で、国民資産・負債残高が報告されている。
- わが国では、日本銀行が1905年に「国富調査」を始め、1970年の経済企画庁の調査まで12回行われてきたが、1970年の調査以来、大規模な国富調査は行われていない。
- 現在、遺産相続が行われた土地について相続登記されていない所有者不明の土地が私有地の20%にも上っていることが社会問題化している（吉原（2017））。

## 家計資産の推移

- 国民資産・負債についての概観

2014年度のSNA統計によれば、国民資産残高は9684.4兆円（内、非金融資産2741.7兆円、金融資産6942.7兆円）。負債は6575.9兆円である。

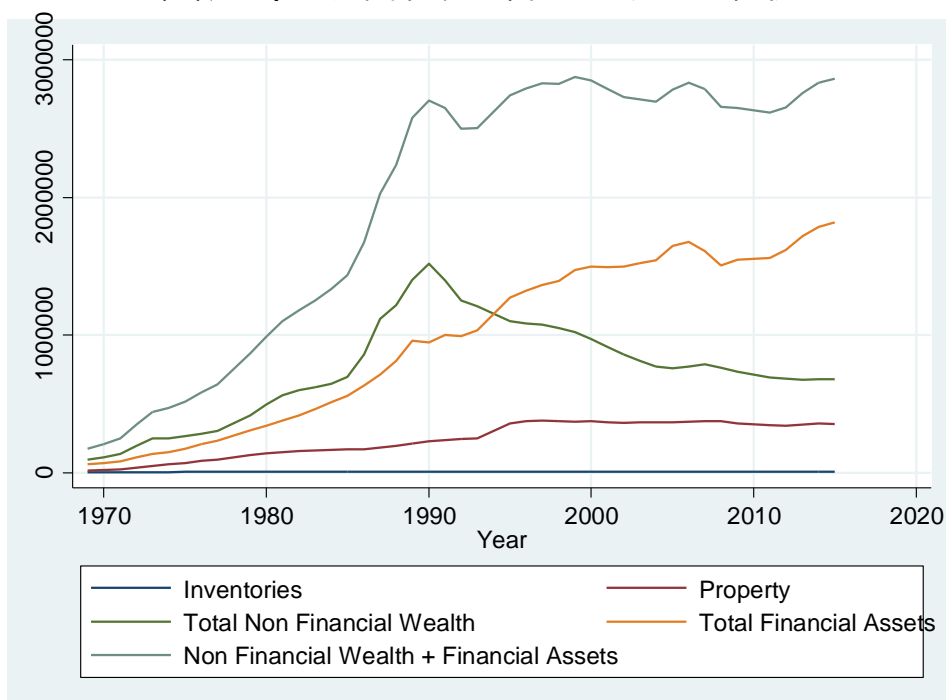
- 部門別正味資産

2014年度のSNA統計によれば、資産から負債を差し引いた正味資産を部門別に見ると、家計は2359.4兆円、金融機関は139.7兆円、非金融法人は548.2兆円、一般政府は-13.5兆円となっている。

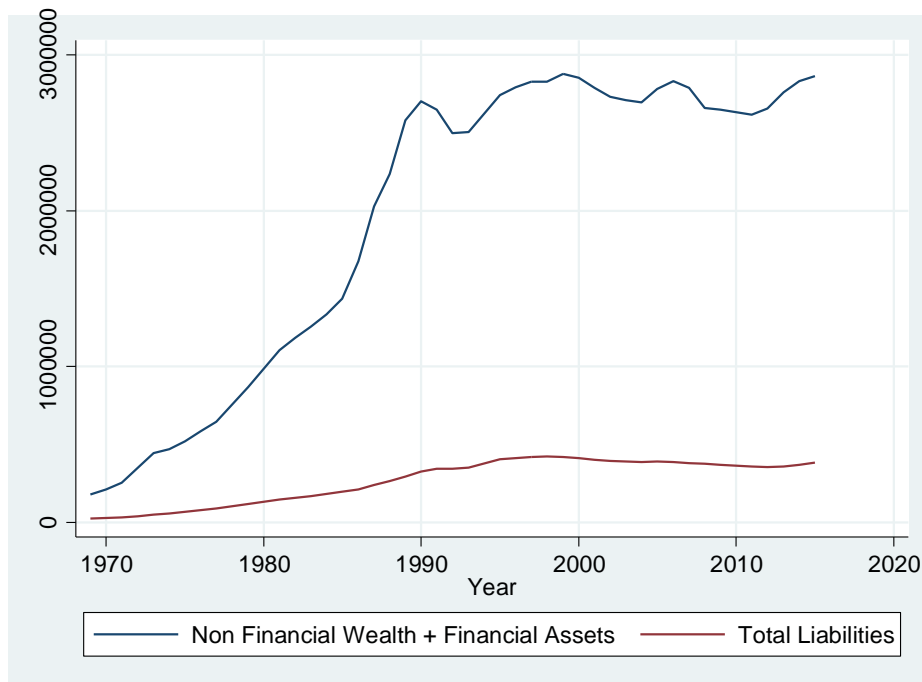
- 家計の資産・負債残高

家計の資産残高は2727.1兆円（内、非金融資産1031.6兆円、金融資産1695.5兆円）。負債残高は367.7兆円で正味資産2359.4兆円。

図表1. 家計資産名目残高の推移



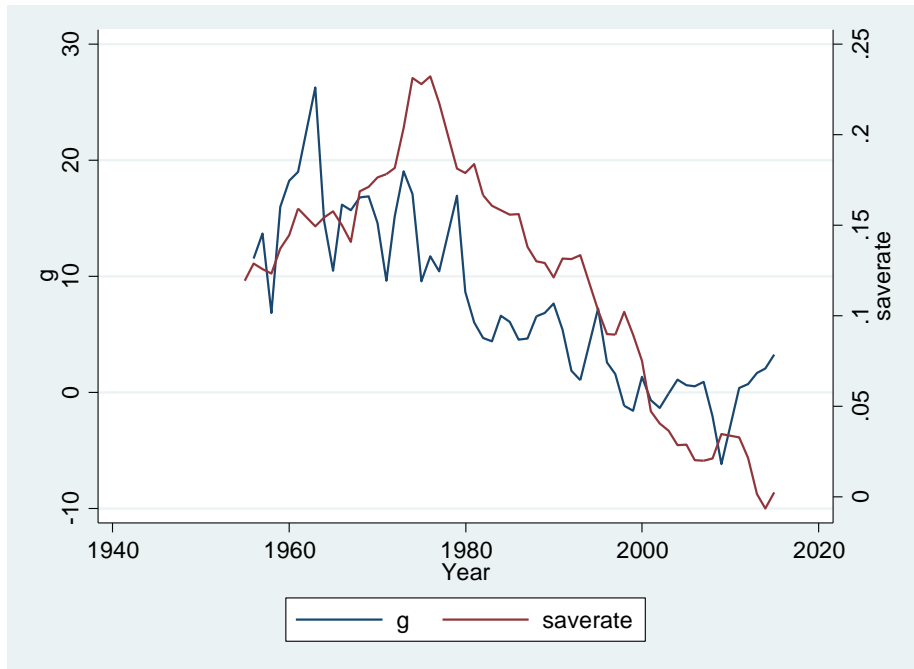
図表2. 家計名目総資産と負債の推移



## 家計貯蓄モデルとの関係

- 1950年代より現在に至るまで、家計の消費・貯蓄モデルの主流はライフサイクル仮説（恒常所得仮説）、遺産動機仮説の3つ、特にライフサイクル仮説と恒常所得仮説を1モデルと考えると、2つのモデルについて論じられてきた。
- 家計部門の資産残高は1969年度末で176.85兆円、非金融資産112.6兆円、金融資産64.26兆円、負債残高24兆円、正味資産152.87兆円であったことを思えば、日本家計は高度成長期を通して、戦争で資産を失い、ほぼゼロの状態から資本蓄積を行ってきたことは疑いない。
- 現在進行中の少子高齢化の下でも、家計部門の資産残高は減っていないとすれば、資産は世代間、家計間で移転されていると考えられる。

図表3. 家計貯蓄率と経済成長率



遺産相続および相続税・贈与税への関心の高まり



## なぜ相続に関心を払うのか（1）

- 相続という行動は何を目的としているのか？家族内での世代間生活水準の確保を通じた家系の維持や家族経営事業（農業を含む）の承継。
- 経済が定常状態に入った時には、フローでの貯蓄は低下し、資産蓄積は進まないが、資産移転が行われることで、ライフサイクルのステージが異なる経済主体に資産の所有権が移る。経済社会的に何が起こるのか？
- 高度成長期（1950－80年代）から低（ゼロ）成長期（1990－2010年代）を経験することで、経済環境の変化が貯蓄や資産蓄積行動に及ぼす影響を識別できるようになった。高度成長期の資産蓄積に対する解釈としての遺産動機を統計的に検証するチャンス。

## なぜ相続に関心を払うのか（2）

- 貯蓄モデルとして見直した場合、恒常所得・ライフサイクル仮説と遺産動機仮説の大きな違いは、前者が主としてフロー概念の分析であるのに対して、後者は主としてストック概念の分析であるということにある。
- 会計学の概念を援用すれば、前者が損益計算書内での議論であるのに対して、後者は貸借対照表と損益計算書を合わせて用いている複式簿記のような考え方をしている。
- 家計行動は、土地や家屋と言った実物資産、その他の耐久消費財を保有して基本的な生活水準を維持しながら、金融資産によっていざという時の支出に備え、日常の支出はフロー所得の中で収支尻を合わせていると考えるのが一般的。
- 相続はその資産が世代間で移転される生涯に数度の機会。

## 相続の概要（1）

- 近年高齢化の影響で年間死亡者数が120万人を超えるようになり、相続件数も増えている（2013年で126.8万人）。
- 死亡者のうち相続税課税対象になる件数の比率は2013年で4.3%と極めて低い。この数字は、バブル経済のピーク期に当たる1987年に7.9%の最高値を記録して以来低下し、2000年代に入ってから低迷している。
- 納税者の73%が2億円以下の遺産額であり、10億円を超える遺産額を受け取った人は全体の0.4%程度。
- 相続税課税対象になった人の一人当たりの相続税額の最高額はバブル経済のピークが過ぎた1991年に7011.2万円で、実効税率22.2%を記録している。2013年で20%を超える実効税率に該当するのは7億円超の相続額受け取る者。

## 相続の概要（2）

- 死亡した人の内、相続税の対象とならない残り95%の相続資産額はどのくらいあるのだろうか？後で説明するように、2015年1月より相続税制度が改正され、相続人が1人の最もシンプルなケースで課税控除額は3600万円まで免税となり、それ以下の遺産額を受け取った家族は相続税は払っていない。
- 税務当局もそれらの無税者の相続に関するデータは公表していないし、基本的に税務データとして収集していない（ただ、死亡が確認された後、税務署から納税が必要かどうかの確認はあるので、ある程度の情報は蓄積しているはずである）。
- 少額であれ、遺産相続を受け取っているとすれば、これを推計する必要がある。誰も墓場まで資産を持っていけないので、必ず資産の移転は発生している。
- 対応：相続を受けた人にアンケート調査をして平均遺産相続額を聞くか実際の家計資産データから推計する。

## 相続の概要（3）

- アンケート調査（家計経済研究所『消費生活に関するパネル調査』（第11回調査（2004年）以後）、内閣府経済社会総合研究所（2010）、フィデリティ退職・投資教育研究所レポート（2012）、第一生命『中高年者の遺産相続に関する調査』（2007）等）
- 例えば、2012年に5500人の相続人に対してアンケートを行ったフィデリティ退職・投資教育研究所レポートによると、相続額の平均は3172万円、中央値が862万円である。そのうち、親子間の相続額の中央値は1002万円、配偶者間の相続額の中央値は1999万円であり、これに配偶者相続人数53.2万人、親子間相続人数278万人をそれぞれ掛けて足し合わせて年間相続総額は**38.5兆円**程度であると推計している。

## 相続の概要（4）

- Piketty (2010)はフランスの相続に関する長期データ（1820－2008）と追加的推計を用いて、次のような指標を計算。
- $B_t/Y_t = \mu_t m_t W_t/Y_t \Leftrightarrow b_{yt} = \mu_t m_t \beta_t$ 

ここで、 $B_t$ =年間遺産相続額、 $Y_t$ =国民所得、 $W_t$ =家計総資産、 $m_t$ =死亡確率、 $\mu_t$ =被相続人平均資産/相続人平均資産、 $b_{yt}=B_t/Y_t$ =年間遺産相続額/国民所得、 $\beta_t = W_t/Y_t$ =家計総資産/国民所得
- $b_{wt} = \frac{B_t}{W_t} = \mu_t m_t$ 

ここで、 $b_{wt}$ =年間遺産相続資産比率、 $e_t=W_t/B_t$ =資産回転率（乗数）

## データ

- Piketty (2010) の指標を計算するためには、年間遺産相続額を推計する必要があるが、他の指標は国民経済計算や人口統計、金融統計から使える。
- 年間遺産相続額の計算においては、遺産相続だけではなく、贈与も含める。また相続は配偶者間、親子間、親族間でも行われるため、その実態についている程度の情報が必要になる。
- 全国消費実態調査（総務省）1984-2014年（7回分 30年間）
- 人口動態統計（厚生労働省）
- 国民経済計算（内閣府）毎年

## 遺産相続額の推計方法

- Piketty (2010) の定義によれば、年間遺産相続・贈与額は被相続者の死亡時点の正味総資産（実物資産に金融資産から負債を引いた正味金融資産を加えたもの）、あるいは他の被相続者が存命中に年間に行った贈与の合計を指す。
- 被相続者の一人当たり正味総資産保有額は『全国消費実態調査』より年齢階層毎に計算でき、かつ年齢階層別の死亡者数は『人口動態統計』に記載されている。一人あたりの正味純資産に年齢階層別死亡数を掛け合わせて、集計すれば、年間遺産相続額を一応求められる。
- 年間での贈与総額の推計をしてそれを年間遺産相続額と加えれば求める年間遺産相続・贈与額が得られる簡易な計算のよれば70兆 - 80兆円ぐらいの規模と推計されている。

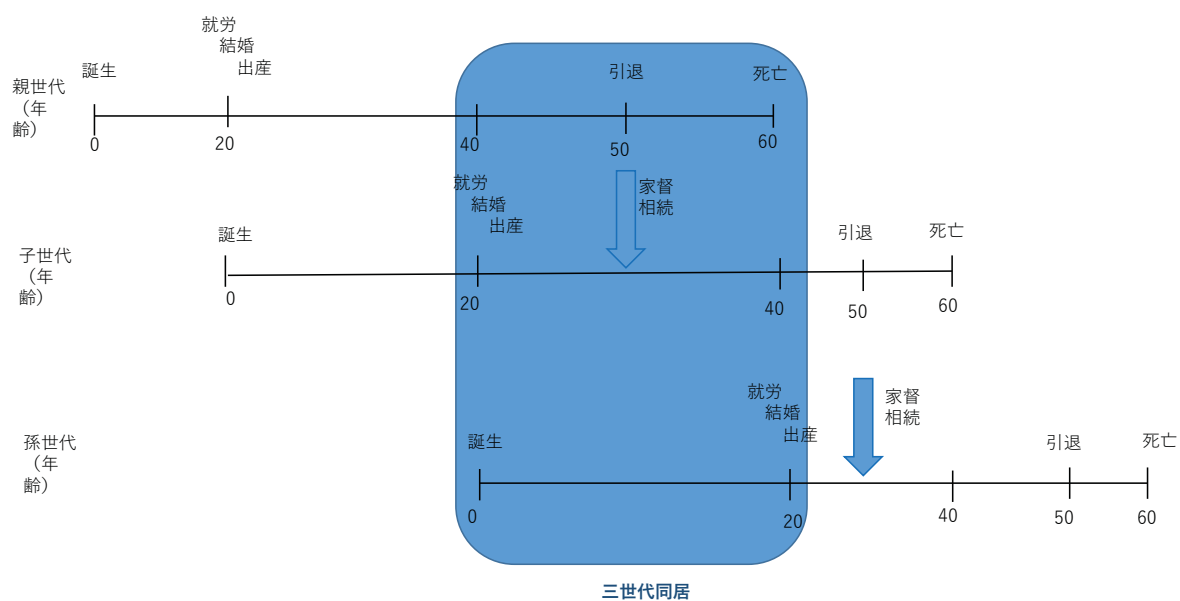


## 相続の推計戦略（1）

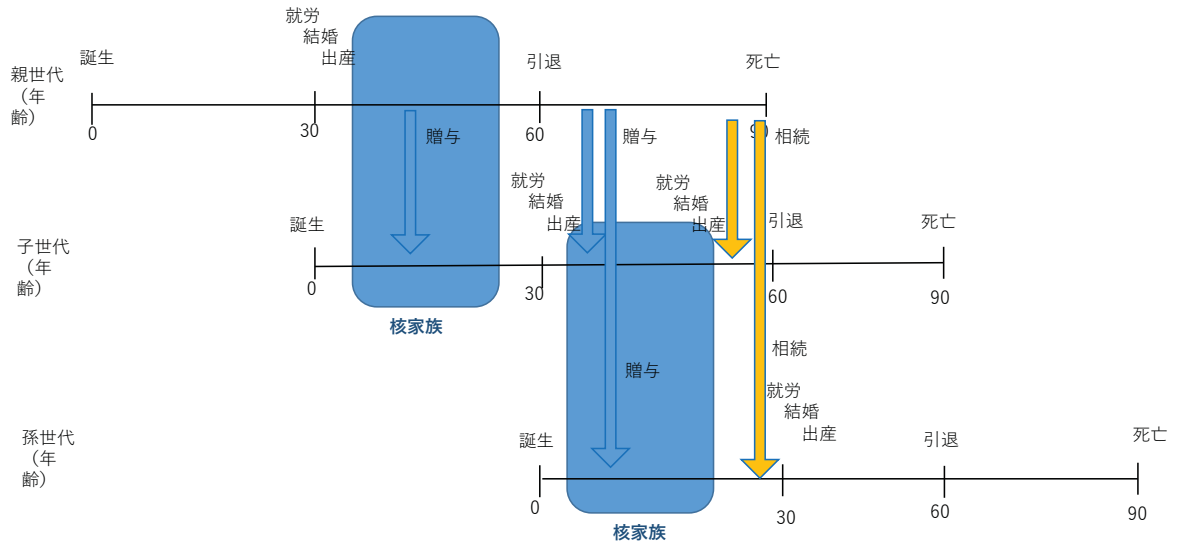
- Piketty (2010)の手法

$e_t = W_t / B_t =$  資産回転率（乗数）を世代交代の1期間の長さであると解釈すると、 $e_t =$  平均出産年齢として、 $B_t = W_t / e_t$  として求める。日本の平均出産年齢は過去20年ばかりは29 - 30歳程度である。

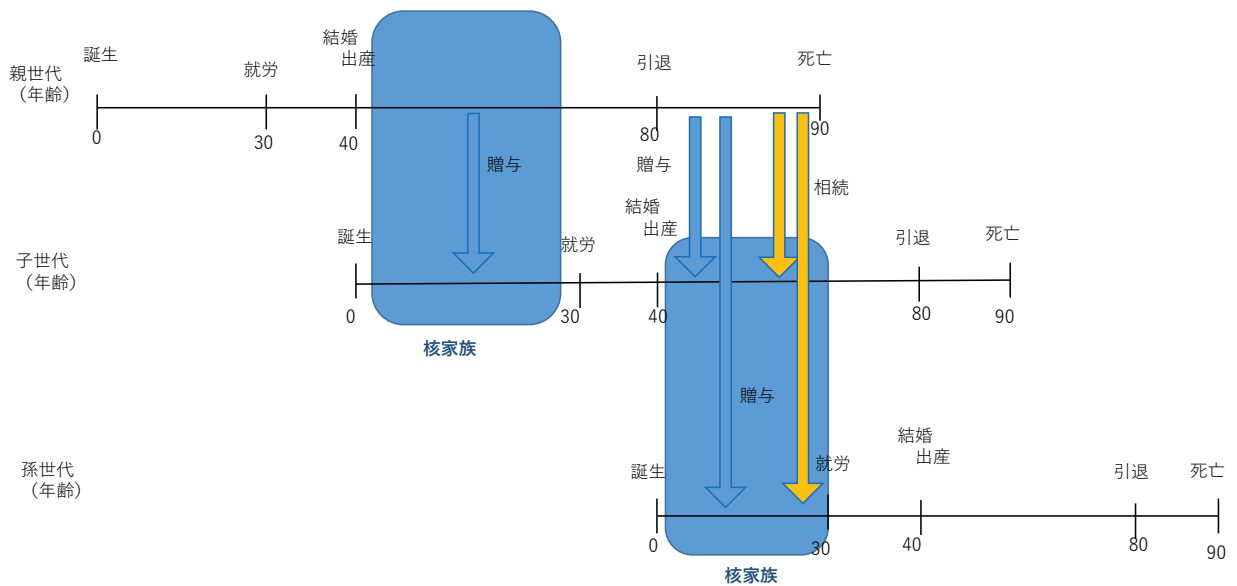
図表4. 古典的な結婚・出産タイミング下での重複世代モデル（1世代20年、生涯60年時代）



図表5. 現代的な結婚・出産タイミング下での重複世代モデル  
(1世代30年、生涯90年時代)



図表6. 結婚タイミング先延ばし下での重複世代モデル  
(1世代40年、生涯90年時代)



## 遺産相続の指標: フランス

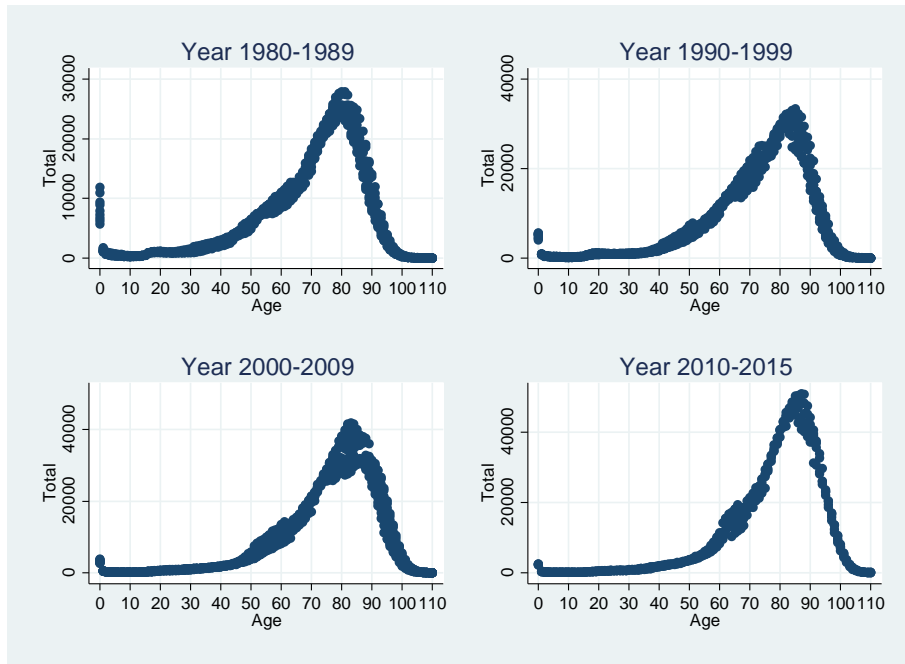
- Piketty(2010)によれば、フランスの数値は次のようになっている。
- 年間遺産相続額/国民所得 $b_{yt}=B_t/Y_t$ は20.3% (1820)、22.7% (1910-13)、14.5% (2008) であり、年間遺産相続資産比率 $b_{wt}=B_t/W_t$ は3.7% (1820)、3.5% (1910-13)、2.6% (2008) である。資産回転率 $e_t$ は27year (1820)、28.9year(1910-13)、38.7 year (2008)である。
- この間、フランスでは遺産相続の占める割合が20世紀半ばにかけて低下し、その後上昇しつつあるというのがPikettyの推論である。

## 相続の推計戦略 (2)

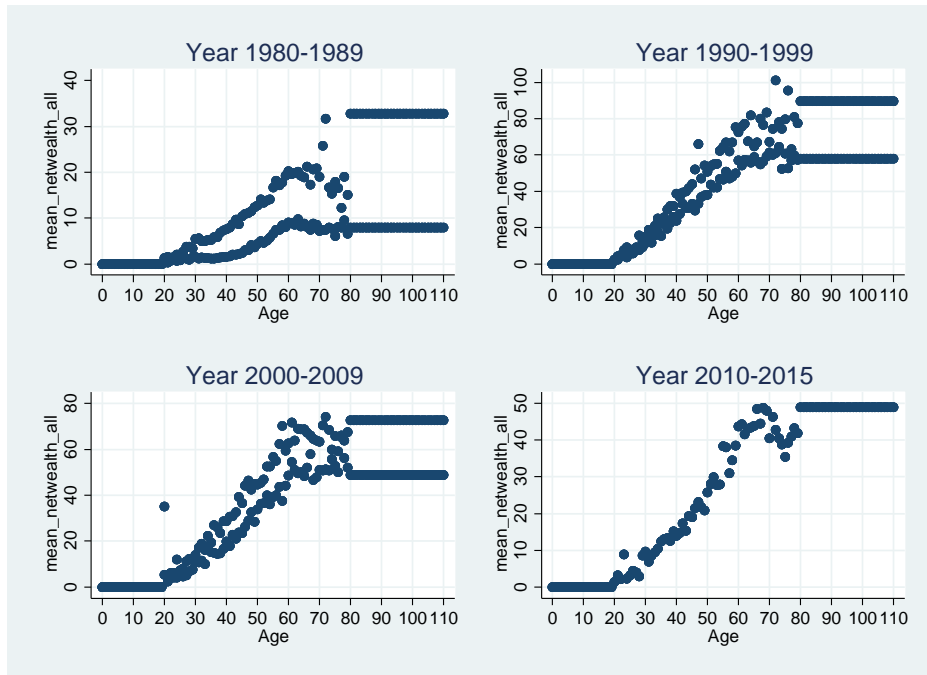
- ミクロデータからの積み上げ法

全国消費実態調査の年齢階層別正味資産保有額の平均値を求め、それに年間年齢階層別死亡者数を掛け合わせて、年間遺産相続額を推計する。ここには、表面的には贈与は含まれていない。贈与部分はPikettyの手法との階差を取ることで、推計する。

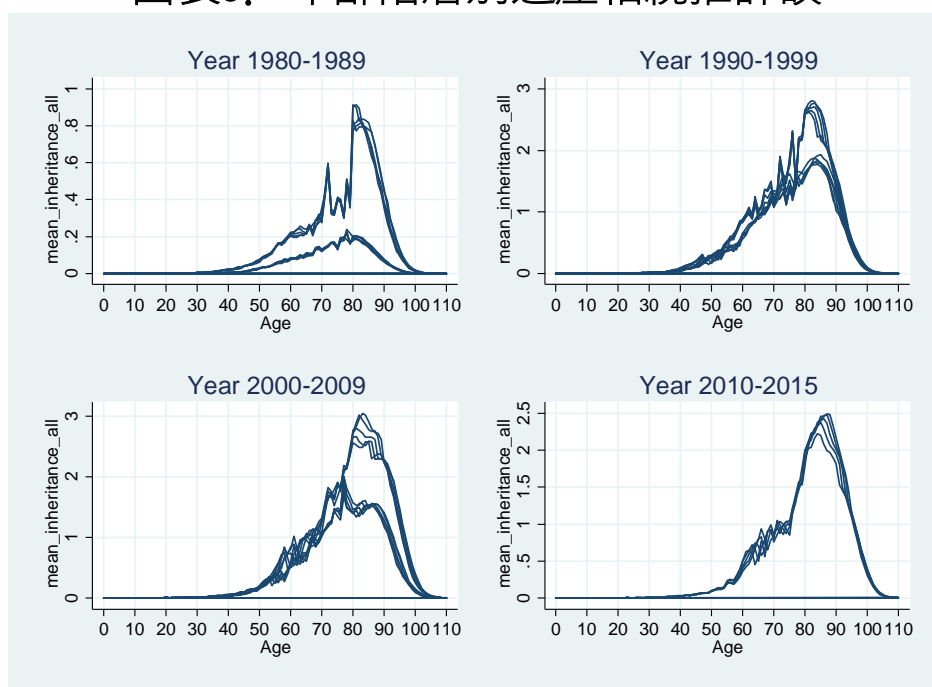
図表7. 年齢別階層別死亡者数



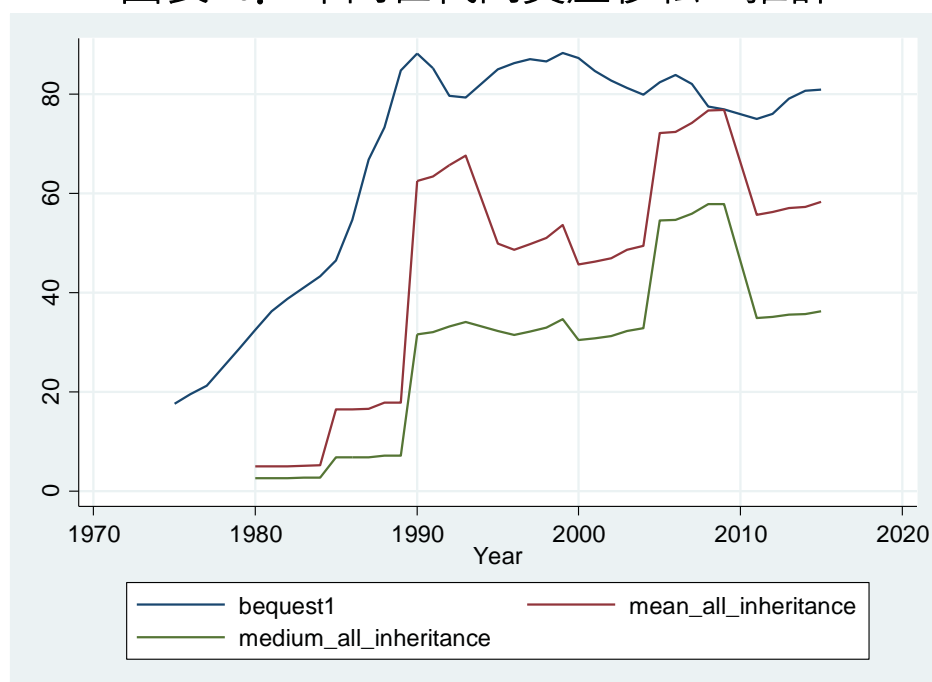
図表8. 年齢階層別正味資産保有額



図表9. 年齢階層別遺産相続推計額



図表10. 年間世代間資産移転の推計



## 図表11. 世代間資産移転の推計

(trillion yen 兆円)

Year年	Bequest 世代間移転	Inheritance 遺産相続	Gifts 生前贈与
1980-1984	38.34	5.09	33.26
1985-1989	65.16	17.06	48.10
1990-1994	83.57	65.34	18.23
1995-1999	86.60	50.57	36.02
2000-2004	83.10	47.76	35.74
2005-2009	80.48	74.41	6.06
2010-2015	78.30	56.90	21.41
Average 平均	73.73	45.47	28.26

### 遺産相続の指標：日本

- 日本では、Piketty (2010)の手法で、1969 - 2014年まで毎年推計すると年間相続額が65兆円から87兆円程度であることがわかった（図表10参照）。
- ミクロデータに基づく積み重ね（ミクロデータに基づく推計には改善の余地があり、今後の課題として残っている）では、同期間に47兆円から74兆円程度である（図表11参照）。
- 図表10から明らかなように、両者の動きはかなり連動でいており、従来指摘されてきた年間相続額よりかなり大きい。35 - 50兆円は課税対象から外れた移転である（図表11参照）
- 贈与として移転されているものは、高齢者の消費として扱われることがほとんどで、税の対象としては扱われていない。贈与税についての扱いが大きな課題として残っている。

## 相続税の考え方（1）

- 相続税には国際的に統一した課税方式がある訳ではない。それぞれの国の相続の複雑さや民法などの歴史的経緯を反映している。大別すると遺産を残す人（被相続人）が納税義務を負うと考える**遺産税方式**と遺産を受取る人（相続人）が納税義務を負うと考える**取得税方式**に分かれる。
- **遺産税方式**では遺産額に応じて課税され、残りを遺産分割するというもので、アメリカ、イギリス、オーストラリア、ニュージーランドなど英米法諸国で採用されている。税込中立的であり、かつ税務行政上の負担は軽い。
- **取得税方式**は先に遺産を分割し、その後、相続人の取得分に応じて課税される。ドイツ、フランスなどで採用。遺産分割によって納税額を減らすことができる税込の下方バイアスがある。

## 相続税の考え方（2）

- 我が国の方法は**法定相続分方式**と呼ばれている。この方式では、法定相続人に対して法定相続に応じて仮分割し、それに累進税率を乗じて税額を決め、その後、遺産分割をして、分配額に応じて、先に決まった税額が割り振られるという仕組みである。
- 法定相続分方式は、相続人を納税義務者としながらも、**取得税方式**には徹しておらず、実際の納税額と取得相続額が対応していないということで相続人間の水平的公平性が保たれていないという指摘がある。
- この方式の利点は税額を遺産額と法定相続人という恣意性の少ない要因で比較的短期間に決められるという税務行政上の簡便さにある。

## 相続税の考え方（3）

- 税制改革を巡る議論の中で、2008年1月には政府税調は現行の法定相続分方式から取得税方式に改めることを検討するとしたが、同年12月には自民党税調が現行制度からの改革に消極的であることを表明した。
- 民主党は2008年12月の党税制改革案で遺産課税方式への転換を主張している。
- 学界ではマーリーズ・レビュー（2011）などを中心に「機会の平等」という観点から取得税方式への支持が多い。
- ただ、個人の財産権を尊重する英米法では遺産を自らの意思（遺言）によって決めている被相続人が納税するという遺産税方式の考え方が歴史的には自然であるとされてきた。

## 相続税の考え方（4）

- 相続に遺族の扶養や社会扶助の役割を重視したフランスやドイツでは取得税方式が導入されている。
- 日本は戦前の旧民法下では、長男の一括家督相続という制度であり、相続人間での不平等は著しかった。戦後の民法では、これを改革し、相続人間での扱いは極めて平等なものとなった。むしろ遺言書を残して被相続人が指定した遺産分配に対する異議申し立て（遺留分減殺請求）ができる。
- 自民党は一度は政府税調で取得税方式への移行を表明しながら、最近では法定相続分方式を強化するような税制改革を行っている。
- グローバル化の現在、相続税に関する国際的な共通認識、制度設計が求められている。



## 相続税の考え方（5）

- Piketty(2010)の議論にあったように、相続総額は生前贈与も含めて考えるべきであるが、この贈与額を正確に把握することは難しい。既に見たように一般に意識されているより多くの贈与が行われている可能性が高い。
- 日本の場合、教育費は大学院まで親が出すことが普通であり、その他関連の塾や海外での語学研修などについても同様に親が出している場合が多い。これらは税法上、贈与とは見なされず、親の消費と見なされている。
- 現行の贈与税は、（1）**相続時精算課税制度**と（2）**暦年課税制度**に分かれている。
- （1）2500万円までの贈与は特別控除額として贈与財産額から控除し、被相続人が亡くなった時に、特別控除額を超えた贈与額を加算して相続税額を計算する。

## 相続税の考え方（6）

- （2）贈与額から毎年110万円まで基礎控除を受けることができ、それを超える場合には、申告して超過累進税率に従って納税する。被相続人が亡くなった場合、この制度を適用した贈与は相続財産として加算する必要はない。

税務統計によれば、（2）の制度を利用するケースが（1）の6倍程度ある。いずれにしても贈与税として把握されている贈与額は贈与全体からするとかなり少ない。

- 2015年の改革では（1）の制度を用いて20歳以上の孫への2500万円までの教育費贈与が認められた。

## 相続税の考え方（7）

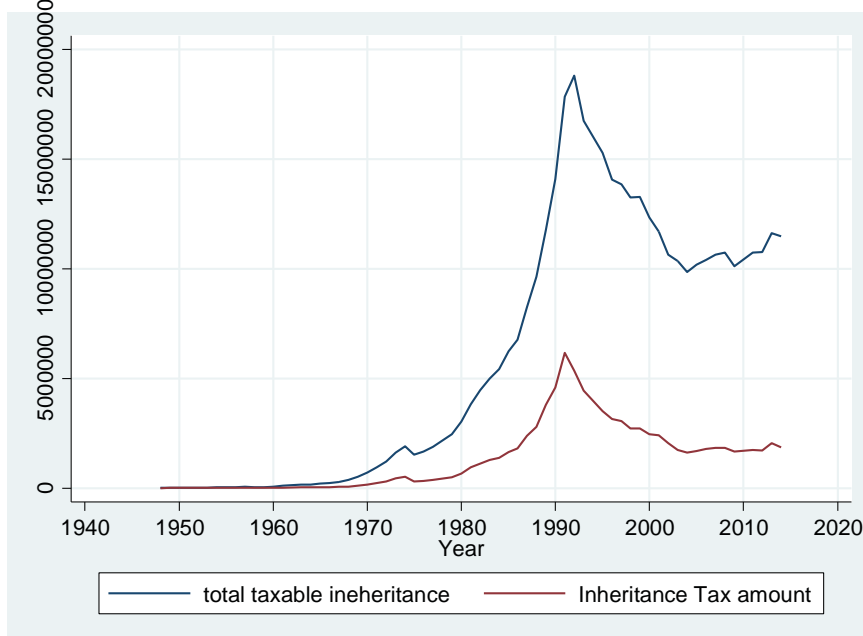
- 高齢化、晩婚化の帰結として、遺産相続のタイミングが人生後半にずれ込んでいる。
- 親が80歳後半まで生きると、相続が起こるのは、子供が若くて50歳代後半から60歳代前半である。子供のライフサイクルの中で、一番資金・資産需要が高いのが40歳代後半から50歳代前半だとすると、死後相続から生前贈与へのシフトを促すような仕組みを考えた方が望ましい。
- このような資産再分配を税制によって促進させることはできるだろうか？住宅の親子間スワップなどは考えてもいいのではないだろうか。
- 自営業（農業）は税制が有効な事業継承を阻害しているのではないか？

図表12. 相続税の課税状況の推移

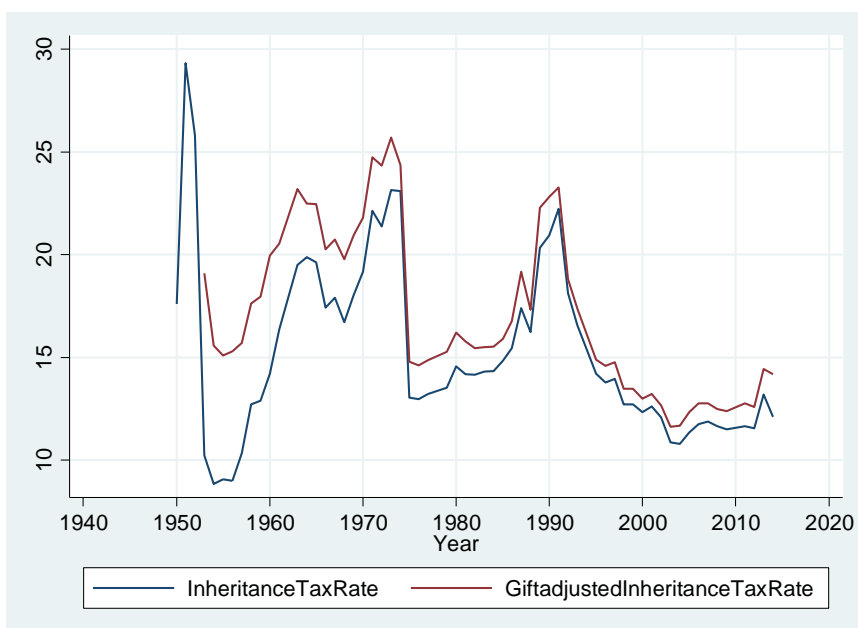
区分	相続税									
	死亡者数・課税件数等				課税価格			相続税額		
年分	死亡者数 (a)	課税件数 (b)	(b)÷(a)	被相続人 1人当 り法定相 続人数	合計額 (c)	被相続人1 人当たり金 額	納付税額 (d)	被相続人 1人当 り金額	(d)÷(c)	
	人	件	%	人	億円	万円	億円	万円	%	
昭和										
58	740,038	39,534	5.3	4.10	50,021	12,653	7,153	1,809.0	14.3	
59	740,247	43,012	5.8	4.00	54,287	12,621	7,769	1,806.0	14.3	
60	752,283	48,111	6.4	4.00	62,463	12,983	9,261	1,925.0	14.8	
61	750,620	51,847	6.9	3.99	67,637	13,045.6	10,443	2,014.2	15.4	
62	751,172	59,008	7.9	3.93	82,509	13,982.6	14,343	2,430.7	17.4	
63	793,014	36,468	4.6	3.68	96,380	26,428.6	15,629	4,285.5	16.0	
平成										
元	788,594	41,655	5.3	3.90	117,686	28,252.5	23,930	5,744.9	20.3	
2	820,305	48,287	5.9	3.86	141,058	29,212.4	29,527	6,114.8	20.9	
3	829,797	56,554	6.8	3.81	178,417	31,548.0	39,851	7,011.2	22.2	
4	856,643	54,449	6.4	3.85	188,201	34,564.7	34,099	6,262.5	18.1	
5	876,532	52,677	6.0	3.81	167,545	31,665.9	27,766	5,251.5	16.6	
6	875,933	45,335	5.2	3.79	145,454	32,084.4	21,058	4,644.9	14.5	
7	922,738	50,729	5.5	3.72	152,998	30,159.9	21,730	4,283.3	14.2	
8	896,211	48,476	5.4	3.71	140,774	29,039.9	19,376	3,997.0	13.8	
9	913,402	48,605	5.3	3.68	138,635	28,522.8	19,339	3,978.8	13.9	
10	936,484	49,526	5.3	3.61	132,468	26,747.1	16,826	3,397.4	12.7	
11	982,031	50,731	5.2	3.59	132,899	26,157.3	16,876	3,326.5	12.7	
12	961,653	48,463	5.0	3.55	123,409	25,464.7	15,213	3,139.0	12.3	
13	970,331	46,012	4.7	3.52	117,035	25,435.7	14,771	3,210.2	12.6	
14	982,379	44,370	4.5	3.46	106,397	23,979.4	12,663	2,899.0	12.1	
15	1,014,951	44,438	4.4	3.40	103,582	23,309.4	11,263	2,534.6	10.9	
16	1,026,602	43,468	4.2	3.35	98,618	22,677.0	10,651	2,449.1	10.8	
17	1,083,796	45,152	4.2	3.33	101,953	22,579.9	11,567	2,561.8	11.3	
18	1,084,450	45,177	4.2	3.26	104,056	23,032.9	12,234	2,708.1	11.8	
19	1,108,334	46,820	4.2	3.20	106,557	22,758.9	12,666	2,705.3	11.9	
20	1,142,407	48,016	4.2	3.17	107,482	22,384.7	12,517	2,606.8	11.6	
21	1,141,865	46,439	4.1	3.13	101,230	21,798.6	11,632	2,504.7	11.5	
22	1,197,012	49,891	4.2	3.08	104,630	20,971.7	11,753	2,355.7	11.2	
23	1,253,066	51,559	4.1	3.03	107,468	20,843.7	12,516	2,427.5	11.6	
24	1,256,359	52,572	4.2	3.00	107,718	20,489.6	12,446	2,367.4	11.6	
25	1,268,436	54,421	4.3	2.97	116,381	21,385.3	15,366	2,823.5	13.2	

(備考) 1. "死亡者数(a)"は「人口動態統計(厚生労働省)」により、その他の係数は「国税庁統計年報書」による。  
 2. "被相続人1人当たりの法定相続人数"は、当初申告ベースの係数である(修正申告を含まない)。ただし、昭和63年分には、更正の請求により納付税額がゼロとなったものの係数が含まれている。  
 3. "課税件数(b)"は、相続税の課税があった被相続人の数である。  
 4. "課税価格(c)"および"納付税額(d)"には更正・決定分を含む。また、"納付税額(d)"には納税猶予額を含まない。

図表13. 課税対象相続額と相続納税額



図表14. 実効相続税率



図表15. 相続税の合計課税価格階級別の課税状況等  
(平成25年分)

合計課税価格 階級区分	件数		納付税額		平均 課税価格 (a)	平均 納付税額 (b)	負担割合 (b)/(a)
	件数	累積割合	税額	累積割合			
	件	%	億円	%	万円	万円	%
～1億円	13,843	25.4	181	1.2	8,374	131	1.6
～2億円	25,959	73.1	1,680	12.1	13,830	647	4.7
～3億円	7,286	86.5	1,677	23.0	24,159	2,302	9.5
～5億円	4,310	94.4	2,371	38.5	37,847	5,501	14.5
～7億円	1,397	97.0	1,532	48.4	58,418	10,963	18.8
～10億円	822	98.5	1,505	58.2	82,253	18,308	22.3
～20億円	612	99.6	2,126	72.1	134,499	34,746	25.8
～100億円	173	99.9	1,718	83.2	325,505	99,308	30.5
100億円超	19	100.0	2,577	100.0	3,189,053	1,356,142	42.5
合計	54,421		15,367		21,362	2,824	13.2

(備考) 1. 「国税庁統計年報書」による。  
2. 当初申告ベースの係数である(修正申告を含まない)。

(出典) 財務省 ([http://www.mof.go.jp/tax\\_policy/summary/property/138.htm](http://www.mof.go.jp/tax_policy/summary/property/138.htm))

## 2015年相続税改革 (1)

- 2015年1月より相続税制が変わった。具体的には基礎控除がそれまでの「5000万円＋法定相続人数×1000万円」であったものが、「3000万円＋法定相続人数×600万円」に引き下げられ、最高税率は50%から55% (6億円超に対して) に引き上げられた。
- その結果、国税庁によれば、2015年中に亡くなった人 (約129万人) のうち、相続税の課税対象となる遺産を残した人 (10万3千人) の割合は、前年の4.4%から8.0%に急増した。
- 地域別に見ると、東京 (15.7%)、神奈川 (12.4%)、千葉 (8.3%) と首都圏での増加が大きいことがわかる。相続税制で把握された遺産総額は14兆5554億円 (26.8%増) で、相続税額は約1兆8116億円 (30.3%増) なので、実効平均税率は12.45%となる。

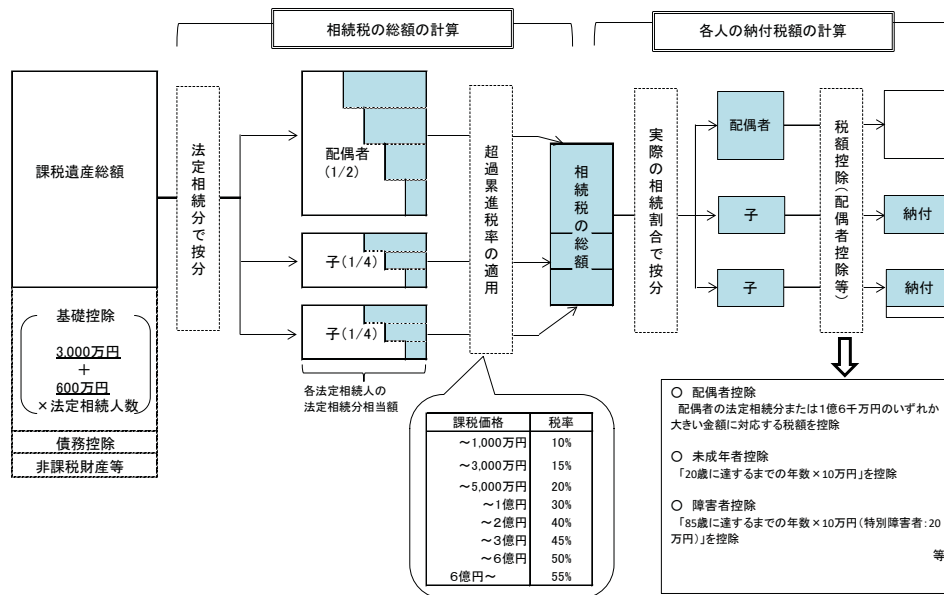
## 2015年相続税改革（2）

- 2015年の相続税改革は一般的には基礎控除が引き下げられ、最高税率が引き上げられるなど、増税の方向に舵を切ったとされるが、未成年者の税額控除を1年につき6万円から10万円に引き上げたり、小規模宅地特例により、土地評価の減額割合80%適用の限度面積が240平米から330平米に拡大された。
- 事業承継税制として、非上場株式等についての相続税及び贈与税の納税執行猶予及び免除の特例の適用要件の緩和や手続きの簡素化が認められた。
- 世界的な相続税改革の方向性については、70年代にカナダ、オーストラリア、90年代にニュージーランド、2000年代にスウェーデン、ポルトガル、オーストリア、マレーシア、インド、香港、シンガポールが相続税を廃止した。一方、アメリカ、イギリス、フィンランド、フランス、アイスランド、日本では税率を引き上げ、控除を引き下げたりして課税強化を行っている（図表15. 参照）。

### 図表16. 相続税の主な改正内容

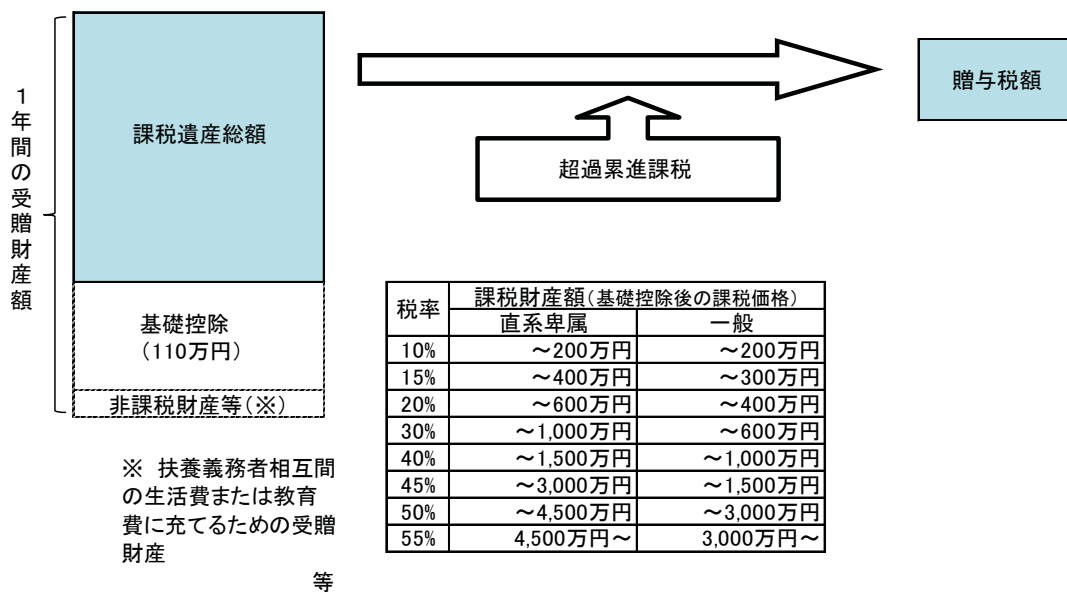
区分	抜本改正前	抜本改正 (1988年12月) (1988年1月1日以降適用)	1992年度改正 (1992年1月1日以降適用)	1994年度改正 (1994年1月1日以降適用)	2003年度改正 (2003年1月1日以降適用)	2010年度改正 (2010年4月1日以降適用)	2013年度改正 (2015年1月1日以降適用)
(1) 遺産に係る基礎控除							
定額控除	2,000万円	4,000万円	4,800万円	5,000万円	同左	同左	3,000万円
法定相続人数比例控除	400万円×法定相続人の数	800万円×法定相続人の数	950万円×法定相続人の数	1,000万円×法定相続人の数	同左	同左	600万円×法定相続人の数
(2) 税率	10%	200万円以下 10%	400万円以下 10%	700万円以下 10%	800万円以下 10%	1,000万円以下 10%	1,000万円以下 10%
	15 "	500万円 " 15 "	800万円 " 15 "	1,400万円 " 15 "	1,600万円 " 15 "	3,000万円 " 15 "	3,000万円 " 15 "
	20 "	900万円 " 20 "	1,400万円 " 20 "	2,500万円 " 20 "	3,000万円 " 20 "	5,000万円 " 20 "	5,000万円 " 20 "
	25 "	1,500万円 " 25 "	2,300万円 " 25 "	4,000万円 " 25 "	5,000万円 " 30 "	1億円 " 30 "	1億円 " 30 "
	30 "	2,300万円 " 30 "	3,500万円 " 30 "	6,500万円 " 30 "	1億円 " 40 "	2億円 " 40 "	2億円 " 40 "
	35 "	3,300万円 " 35 "	5,000万円 " 35 "	1億円 " 40 "	2億円 " 50 "	3億円 超	3億円 超
	40 "	4,800万円 " 40 "	7,000万円 " 40 "	1億5,000万円 " 40 "	2億円 " 50 "	4億円 " 50 "	4億円 " 50 "
	45 "	7,000万円 " 45 "	1億円 " 45 "	2億円 " 60 "	20億円 " 60 "	20億円 超	20億円 超
	50 "	1億円 " 50 "	1億5,000万円 " 50 "	2億7,000万円 " 50 "	70 " 70 "	20億円 超	20億円 超
	55 "	1億4,000万円 " 55 "	2億円 " 55 "	3億5,000万円 " 55 "			
	60 "	1億8,000万円 " 60 "	2億5,000万円 " 60 "	4億5,000万円 " 60 "			
	65 "	2億5,000万円 " 65 "	5億円 " 65 "	10億円 " 65 "			
	70 "	5億円 " 70 "	5億円 超 70 "	10億円 超 70 "			
	75 "	5億円 超					
		(14段階)	(13段階)	(13段階)	(9段階)	(6段階)	(8段階)
(3) 配偶者に対する相続税額の軽減	遺産の2分の1または4,000万円のいずれか大きい金額に対応する税額まで控除	配偶者の法定相続分または8,000万円のいずれか大きい金額に対応する税額まで控除	同左	配偶者の法定相続分または1億6,000万円のいずれか大きい金額に対応する税額まで控除	同左	同左	同左
(4) 死亡保険金の非課税限度額	250万円×法定相続人の数	500万円×法定相続人の数	同左	同左	同左	同左	同左
(5) 死亡退職金の非課税限度額	200万円×法定相続人の数	500万円×法定相続人の数	同左	同左	同左	同左	同左
(6) 税額控除							
未成年者控除	20歳までの1年につき3万円	20歳までの1年につき6万円				同左	20歳までの1年につき10万円
障害者控除	70歳までの1年につき3万円	70歳までの1年につき6万円	同左	同左	同左	85歳までの1年につき6万円	85歳までの1年につき10万円
特別障害者控除	70歳までの1年につき6万円	70歳までの1年につき12万円				85歳までの1年につき12万円	85歳までの1年につき20万円

図表17. 現行の相続税の仕組み



(出典) 財務省 ([http://www.mof.go.jp/tax\\_policy/summary/property/135.htm](http://www.mof.go.jp/tax_policy/summary/property/135.htm))

図表18. 贈与税の暦年課税制度の仕組み



(出典) 財務省 ([http://www.mof.go.jp/tax\\_policy/summary/property/153.htm](http://www.mof.go.jp/tax_policy/summary/property/153.htm))

## 最適相続税の理論（1）

- 各国の相続税制度はかなりばらついており、所得税や消費税のように、国際的にほぼ統一した制度的な枠組みがあるわけではない。
- その中で、Piketty and Saez (2013a)は最適所得税の枠組みとFarhi and Werning (2010)を拡張して、最適相続税の理論を提案している。
- 簡便な仮定の下で、最適税率は正であり、もし相続の税率弾力性が低く、相続の分布が集中しており、かつ社会が相続を受けられないような貧者への再分配を望むのであれば、最高税率は50－60%であってもおかしくないという結果を得ている。

## 最適相続税の理論（2）

- 有名なChamley (1986)やJudd(1985)の「資本（相続）課税は長期的には税率0であるべきだ」という結果と対照的である。
- モデルの中で税率0でないためには、（1）所得に経済主体個別のショックが起こる、（2）想定外相続、（3）被相続人が税引き後遺産額にこだわる、（4）長期的な厚生最大化、（5）固定的な税率、（6）政府のコミットメント不足、などの条件が加えられている。
- 実際に、ある国家は相続税を廃止しており、他の国家は相続税を強化しており、理論的あるいは実証的に議論されているというより、きわめて政治的判断に基づいて相続税制は決められている。

## 最適相続税の理論（3）

- 近年では、政策をエビデンスに基づいて立案しようという機運が高まってきており、統計データの充実が望まれている。
- 国税庁の保有している相続関連の税務データが利用可能になれば、遺産相続という行動に対して、現状よりも深い理解に達することは可能であろう。
- しかし、よりディープなパラメータである、相続の税率弾力性などは概念としては理解できるが、実証的に検証することはほぼ不可能に近いように思われる。贈与は長期にわたって調整可能であり、税率弾力性を推計することも可能。
- 現状では、財政専門家の知見を集めて、経済社会のあり方に関して合意を得ながら、個別の税制の改革を行っていくしかないだろう。

## 世代間移転再考（1）

- 資産の再分配の考え方

相続は家族内で異時点間の資源分配をすることで、保険で対応できないような個別ショックに備えるという意味合いがある反面、社会的な資源分配からすると非効率な分配になっている可能性が高い。相続という機会をとらえて、多少の社会的再分配を行うことは望ましいのではないだろうか。

- 家族内での世代間移転と社会への再分配（寄付）をどのようにバランスさせるか？

寄付行為を強制化するのではなく、むしろ自由化して所得控除の対象にするなどの工夫が必要。また寄付受入れ機関の条件緩和も望まれる。



## 世代間移転再考（２）

- 教育投資を社会で行おうという政策をどう考えたらいいのか？

家族でサポートしていた教育投資はどうするのか？増税して、政府の教育投資に回すのか、親は、自分の子供を行かせたい学校に寄付することを好むのではないか？教育の品質の確保と、学校間競争による質の格差の発生はどう考えればいいのか？

- 人口減少は世代間移転にどのような影響を与えるだろうか？

遺産相続資産のシェアが土地資産から金融資産に移ってきている。親と子の居住地が離れている場合、親の土地住宅資産や事業は維持管理が難しくなる（空き家問題、事業承継問題）。日経新聞によれば、法定相続人がいない遺産の国庫納付が年400億円となり10年間で2.5倍になっている（2017年4月16日付）。

## 参考文献（１）

- Atkinson, A.B., Backus, P.G. and Micklewright, J.(2009) "Charitable Bequests and Wealth at Death in Great Britain", University of Southampton, Southampton Statistical Sciences Research Institute, Working Paper A09/03
- Backus, Peter (2010) "Is Charity a Homogeneous Good?", Warwick Economic Research Papers, No.951.
- Barro, Robert (1976) "Are Government Bonds net Wealth?" *Journal of Political Economy*, 82(6), 1095-1117.
- Beckert, Jens (2004) *Inherited Wealth*, Princeton University Press.
- Bertocchi, G.(2011) "The Vanishing Bequest Tax: The Comparative Evolution of Bequest Taxation in Historical Perspective", *Economics & Politics*, 23.
- Bruce, Neil and Turnovsky, Stephen, J. (2012) "Social Security, growth, and Welfare in Overlapping Generations Economics with or without Annuities", mimeo, Department of Economics, University of Washington.
- Blanchard, Olivier J.(1985) "Debt, Deficits, and Finite Horizons", *Journal of Political Economy*. 93(2), pp.223-247.

## 参考文献（2）

- Chamley, Christophe. (1986) "Optimal Taxation of Capital Income in General Equilibrium with Infinite Lives", *Econometrica*, 54(3), 607-622.
- Chamley, Christophe. (2001) "Capital Income Taxation, Wealth Distribution and Borrowing Constraints", *Journal of Public Economics*, 79,55-69.
- Conesa, Juan Carlos, Kitao, Sagiri, and Krueger, Dirk.(2009) "Taxing Capital? Not a bad Idea After All!", *American Economic Review*, 99(1), 25-48.
- Cremer, Helmuth, Pestieau, Pierre, Rochet, Jean-Charles. (2003) "Capital Income Taxation When Inherited Wealth is not Observable", *Journal of Public Economics*, 87, 2475-2490.
- Cunliffe, John and Erreygers, Guido (eds) (2013) *Inherited Wealth, Justice and Equity*, Routledge.
- De la Croix, David. (2015) "Did longer Lives Buy Economic Growth? From Malthus to Lucas and Ben-Porath", Discussion Paper 2015-12, Institute de Recherches Economiques et Sociales de l'Universite catholique de Louvain.
- Diamond, Peter A.(1965) "National Debt in a Neoclassical Growth Model", *American Economic Review*, 55, 1126-1150.

## 参考文献（3）

- Doepke, Matthias and Zilibotti, Fabrizio. (2012) "Parenting with Style: Altruism and Paternalism in Intergenerational Preference Transmission", mimeo.
- Duff, D.G.(2005) "The Abolition of Wealth Transfer Taxes: Lessons from Canada, Austrakia and New Zealand", *Pittsburgh Tax Review*, 71, 71 – 120.
- Ewald, Christian-Oliver, Nolan, Charles and Zhang, Aihua.(2015) "Debt, Deficits, and Finite Horizons: The Continuous Time Stochastic Case", mimeo.
- Farhi, Emmanuel and Werning, Iván (2010) "Progressive Estate Taxation", *Quarterly Journal of Economics*, May 2010, pp.635-673.
- Farhi, Emmanuel and Werning, Iván (2013) "Estate Taxation with Altruism Heterogeneity", *American Economic Review, Papers and Proceedings*, 103(3), 489-495.
- Farhi, Emmanuel and Werning, Iván (2014) "Bequest Taxation and r-g", Harvard and MIT, mimeo.
- Farmer, Roger E.A., Nourry, Carine and Venditti, Alain.(2011) "Debt, Defictis and Finite Horizons: The Stochastic Case", *Economics letters*, 111, 47-49.

## 参考文献（4）

- Hines, James, R, Jr. (2013) "Income and Substitution Effects of Estate Taxation", *American Economic Review*, 103(3), 484-488.
- Jappelli, T. et al. (2011) "Transfer Taxes and Inequality", GINI Discussion Paper, No. 21.
- Judd, Kenneth L.(1985) "Redistributive Taxation in A Simple Perfect Foresight Model", *Journal of Public Economics*, 28 , 59-83.
- Judd, Kenneth L.(1999) "Optimal Taxation and Spending in General Competitive Growth Models", *Journal of Public Economics*, 71, 1-26.
- Kocherlakota, Narayana R.(2010) *The New Dynamic Public Finance*, Princeton University Press.
- Kopczuk, Wojciech.(2013) "Incentive Effects of Inheritances and optimal Estate Taxation", *American Economic Review*, 103(3), 472-477.
- Kopczuk, Wojciech (2013) "Taxation of Intergenerational Transfers and Wealth", *Handbook of Public Economics*, Vol. 5, Chapter 6, 329-390
- McGarry, Kathleen. (2013) "The Estate Tax and Inter Vivos Transfers over Time", *American Economic Review*, 103(3), 478 -483.

## 参考文献（5）

- Levy, Gilberto and Levin, Bruce.(2014) *The Biostatistics of Aging*, Wiley.
- Liang, James, Wang, Hui and Lazear, Edward P.(2014) "Demographics and Entrepreneurship", NBER Working paper, No.20506.
- Lotka, Alfred J.(1922) "The Stability of the Normal Age Distribution", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol.8, No.11, pp.339-345.
- Lotka, Alfred J.(1939) "A Contribution to The Theory of Self-Renewing Aggregates, with special reference to Industrial Replacement", *The Annals of Mathematical Statistics*, 10, 1-25.
- Lotka, Alfred J.(1998) *Analytical Theory of Biological Populations*, Plenum press.
- Mierau, Jochen O. and Turnovsky, Stephen J. (2014) "Demography, Growth and Inequality", *Economic Theory*, 55, 29-68.
- Mirrlees, James A.(1972) "Population Policy and The Taxation of Family Size", *Journal of Public Economics*, 1, 169-198.

## 参考文献（6）

- Oxborrow, David and Turnovsky, Stephen J.(2015) “Closing the Small Open Economy Model: A Demographic Approach”, mimeo.
- Piketty, Thomas.(2010) “On the Long-Run Evolution of Inheritance: France 1820-2050”, *Quarterly Journal of Economics*, 126(3), 1071-1131.
- Piketty, Thomas and Emmanuel, Saez (2012) “A Theory of Optimal Capital Taxation”, NBER Working Paper Series, no.17989.
- Piketty, Thomas and Emmanuel, Saez (2013a) “A Theory of Optimal Inheritance Taxation”, *Econometrica*, 81(5), 1851-1886.
- Piketty, Thomas and Emmanuel, Saez (2013b) “Optimal Labour Income Taxation”, *Handbook of Public Economics*, vol.5, pp.391-474.
- Piketty, Thomas. (2014) *Capital in the Twenty-First Century*, Harvard University Press.
- Razin, Assaf and Sadka, Efraim (1995) *Population Economics*, MIT Press.
- Salanié, Bernard.(2003) *The Economics of Taxation*, MIT Press.

## 参考文献（7）

- Samuelson ,Paul, A.(1958) “An Exact Consumption-Loan model of Interest with or without the Social Contrivance of Money”, *Journal of Political Economy*, 66, 467-482.
- Sheshinski, Eytan. (2008) *The Economic Theory of Annuities*, Princeton University Press.
- Turnovsky, Stephen J.(2000) “Growth in an Open Economy: Some Recent Developments”, Working Papers-Research Series, No.5 (May 2000), National bank of Belgium.
- Werning, Iván (2011) “Nonlinear Capital Taxation”, MIT, mimeo.
- 石川大貴(2015)「遺産分布の推計」、比較統計システム論 課題論文
- 立岡健二郎(2013)「相続税の課税方式に関する理論的考察」、『JRIレビュー』、4（5）、88－110.
- 第一生命(2007)「中高年者の遺産相続に関する調査」、『第一生命NEWS宅配便』、2007年1月
- 内閣府政策統括官（経済財政－経済社会システム担当）（編）（2002）『日本の社会資本』、財務省印刷局

## 参考文献（8）

- 葉山元（2003）『国富消失』、新潮新書
- 増田寛也（編著）（2014）『地方消滅』、中公新書
- フィデリティ退職・投資教育研究所(2012)「日本の相続と投資の実態」、『フィデリティ退職・投資教育研究所レポート』、フィデリティ投信株式会社、2012年3月
- 堀雅博、濱秋純哉、前田佐恵子、村田啓子（2010）「遺産相続、学歴及び退職金の決定要因に関する実証分析-『家族関係、就労、退職金及び教育・資産の世代間移転に関するアンケート調査』の個票を用いて-」、ESRI Discussion Paper Series, No.254.
- 宮脇義男（2008）「相続税の課税方式に関する一考察」『税務大学校論叢』、57号、437-526
- 目良浩一、坂下昇、田中一行、宮尾尊弘（1992）『土地税制の研究』、日本住宅総合センター
- 吉原祥子（2017）『人口減少時代の土地問題』、中公新書

# 混合効果モデルと小地域統計

久保川達也  
(東京大学)

1 / 29

## [1] 地域統計と小地域推定

かつてカナダのトロントに滞在していたときに、Toronto Sun (地元の一般紙) の一面にトロント市の小地域別平均年齢の地図がカラーで掲載され、高齢化が進んでいる地域など一目瞭然にわかるものであった。

カナダ統計局には小地域統計の専門的なグループがあり、この分野の世界的リーダーである J.N.K. Rao はこうしたグループと関わりを持ち、現場と理論とを往復させながら研究を展開してきた。

我が国でも、地域別平均年齢の予測など地域統計の重要性は増している。小地域推定の研究分野は、時代の変化に伴う現場からの要請に応じて新たな統計手法の開発とそれに伴う理論研究や計算手法の展開を行いつつ発展している。

調査区全体の特性を調べるためにとられたデータを利用して、地域ごとの特性値を推定したい。

そのとき、狭い地域や人口が粗な地域に対しては十分なデータがとられていないため、その地域だけのデータでは特性値の十分な推測ができない。このような状況での推定問題を、小地域推定という。

2 / 29

## [2] 集計データを利用するためのモデル

小地域推定の問題を解決する方法は、周辺地域のデータを組み込んで推定精度を高めること。

そのために利用されるのが線形混合モデル (Linear Mixed Model, LMM) である。

Fay-Herriot モデル：集計データに基づいたモデル

$m$ ：小地域の個数， $i = 1, \dots, m$

$y_i$ ： $i$  番目の小地域の集計データ

$D_i$ ： $y_i$  の観測誤差分散

$\mathbf{x}_i$ ： $i$  番目の小地域の共変量データ

$$y_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + v_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$v_i$ ：変量効果  $\sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$      $\varepsilon_i$ ：観測誤差  $\sim \mathcal{N}(0, D_i)$

$\theta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + v_i$  とおくと， $\theta_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2)$

$\theta_i$  の Bayes 推定量：

$$\hat{\theta}_i^B(\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2) = E[\theta_i | y_i] = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \frac{\sigma_v^2}{D_i + \sigma_v^2} (y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$$

3/29

$\hat{\sigma}_v^2$ ： $\sigma_v^2$  の推定量

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\sigma}_v^2)$ ： $\boldsymbol{\beta}$  の GLS 推定量

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\sigma}_v^2) = \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{D_i + \hat{\sigma}_v^2} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top \right)^{-1} \sum_{i=1}^m \frac{1}{D_i + \hat{\sigma}_v^2} \mathbf{x}_i y_i$$

$\theta_i$  の経験最良線形不偏予測量 (EBLUP) もしくは経験ベイズ推定量：

$E[\theta_i | y_i]$  より

$$\hat{\theta}_i^{EBLUP} = \mathbf{x}_i^\top \widehat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{\hat{\sigma}_v^2}{D_i + \hat{\sigma}_v^2} (y_i - \mathbf{x}_i^\top \widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

問題点：

(a) 誤差分散  $D_1, \dots, D_m$  は既知と仮定して解析している。実際は未知なので、推定値を与える必要がある。地域毎の集計データについては、標本平均の値は報告されているが、地域毎の標本分散の値は提供されていないので、ベイズ推定のような model-based な推測方法を使うことができない。代わりに historical data から  $D_i$  を推定してやる必要がある。

(b) 隣り合う地域も離れた地域も同じ扱いをしており、空間的な情報を用いていない。

4/29



### [3] 混合効果モデルの役割

線形混合モデルと縮小推定： $y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + v_i + e_i$

(データ) = (固定効果：共通母数) + (変量効果) + (誤差項)

(共通母数) と (変量効果) が、安定した推定を与える役目を演ずる。

(1) 共通母数によるデータのプーリング。

$\boldsymbol{\beta}$  は全データ  $(y_1, \dots, y_m)$  の加重平均  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\sigma}_v^2)$  により推定されるので、 $y_i$  の期待値は  $\mathbf{x}_i^T \widehat{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\sigma}_v^2)$  なる安定した推定値で推定される。

母数を共通にとることによってデータをプーリングする作用が働き、結果として安定した推定が可能になる。

(2) 変量効果と縮小推定。

$v_i$  : 母数効果の場合。  $\theta_i$  は  $y_i$  で推定されるので、推定誤差が問題になる。

$v_i$  : 変量効果の場合。  $v_i$  は条件付期待値  $E[v_i|y_i] = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + D_i} (y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})$  によって予測される。  $y_i$  を安定した推定値の方向へ縮小することによりリスクの改善がなされる。

こうして、線形混合モデルにおいて変量効果が、 $y_i$  を縮小する作用を生むことがわかる。

5/29

### [4] 個票データを解析するためのモデル

Nested error regression model (枝分かれ誤差分散モデル)

有限母集団における各地域の平均の推定

$i = 1, \dots, m$ , Battese, Harter, Fuller (1988) のモデル

$(Y_{i1}, \dots, Y_{iN_i})$  : 第  $i$  郡の農作区画の総数を  $N_i$ , 第  $i$  郡, 第  $j$  区画の穀物の作付け面積を  $Y_{ij}$

$\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{in_i})^T$  :  $(Y_{i1}, \dots, Y_{iN_i})$  から抽出された  $n_i$  個のデータ

$\mu_i = \bar{Y}_i = N_i^{-1} (Y_{i1} + \dots + Y_{iN_i})$  を推定したい。

$Y_{ij}$  に線形混合モデルを当てはめる。

$$Y_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^T \boldsymbol{\beta} + v_i + e_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, N_i$$

超母集団の設定： $v_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ ,  $e_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$

$\mathbf{Y}_i^* = (Y_{i,n_i+1}, \dots, Y_{i,N_i})^T$  : 抽出されなかったデータ

$$\mu_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{N_i} + \frac{\sum_{j=n_i+1}^{N_i} Y_{ij}}{N_i} = \frac{n_i}{N_i} \bar{y}_i + \frac{\mathbf{j}_{N_i-n_i}^T \mathbf{Y}_i^*}{N_i}$$

と書けるので、 $\mathbf{y}_i$  に基づいて  $\mathbf{Y}_i^*$  を推定すればよい。

6/29



$\mathbf{y}_i$  を与えたときの  $\mathbf{Y}_i^*$  の条件付期待値  $E[\mathbf{Y}_i^*|\mathbf{y}_i]$  を用いて  $\mathbf{Y}_i^*$  を推定するのが自然。 $(\mathbf{y}_i', \mathbf{Y}_i^{*\prime})'$  の同時密度関数は、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{Y}_i^* \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_{N_i} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_i^* \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \right)$$

となる。ただし、 $\mathbf{x}_i^* = (\mathbf{x}_{i,n_i+1}^T, \dots, \mathbf{x}_{i,N_i}^T)^T$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_{11} = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{n_i} + \sigma_v^2 \mathbf{j}_{n_i} \mathbf{j}_{n_i}^T$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_{12} = \sigma_v^2 \mathbf{j}_{n_i} \mathbf{j}_{N_i-n_i}^T$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_{22} = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{N_i-n_i} + \sigma_v^2 \mathbf{j}_{N_i-n_i} \mathbf{j}_{N_i-n_i}^T$  である。

$$\mathbf{Y}_i^* | \mathbf{y}_i \sim \mathcal{N}_{N_i-n_i} \left( \mathbf{x}_i^{*\prime} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{12} \right)$$

より、 $\bar{\mathbf{x}}_i^* = (N_i - n_i)^{-1} \sum_{j=n_i+1}^{N_i} \mathbf{x}_{ij}$  とおくと、

$$E \left[ \sum_{j=n_i+1}^{N_i} Y_{ij} | \mathbf{y}_i \right] = E \left[ \mathbf{j}_i^{*\prime} \mathbf{Y}_i^* | \mathbf{y}_i \right] = (N_i - n_i) \left\{ \bar{\mathbf{x}}_i^{*\prime} \boldsymbol{\beta} + \frac{n_i \rho}{1 + n_i \rho} (\bar{y}_i - \bar{\mathbf{x}}_i' \boldsymbol{\beta}) \right\}$$

となり、観測されないデータの部分  $\sum_{j=n_i+1}^{N_i} Y_{ij}$  が

$$(N_i - n_i) \left\{ \bar{\mathbf{x}}_i^{*\prime} \boldsymbol{\beta} + \frac{n_i \rho}{1 + n_i \rho} (\bar{y}_i - \bar{\mathbf{x}}_i' \boldsymbol{\beta}) \right\}$$

7/29

で補間されることを意味する。従って、母集団平均  $\mu_i = \bar{Y}_i$  のベイズ予測量は

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_i(\rho) &= E[\bar{Y}_i | \mathbf{y}_i] = \frac{n_i}{N_i} \bar{y}_i + \frac{1}{N_i} E \left[ \sum_{j=n_i+1}^{N_i} Y_{ij} | \mathbf{y}_i \right] \\ &= \bar{\mathbf{x}}_{i(\rho)}' \boldsymbol{\beta} + \left\{ \frac{n_i \rho}{1 + n_i \rho} + \frac{n_i}{N_i} \frac{1}{1 + n_i \rho} \right\} (\bar{y}_i - \bar{\mathbf{x}}_i' \boldsymbol{\beta}) \end{aligned}$$

となる。ただし  $\bar{\mathbf{x}}_{i(\rho)} = \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{x}_{ij}$  である。

$\rho = \sigma_v^2 / \sigma_e^2$  とおくと  $\boldsymbol{\beta}$  の一般化最小 2 乗推定量 (GLS) は

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\rho) = \left( \sum_{i=1}^m \frac{n_i \bar{\mathbf{x}}_i \bar{\mathbf{x}}_i^T}{1 + n_i \rho} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{x}_{ij} \mathbf{x}_{ij}^T \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^m \frac{n_i \bar{\mathbf{x}}_i \bar{y}_i}{1 + n_i \rho} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{x}_{ij} y_{ij} \right)$$

で与えられる。

$\sigma_v^2, \sigma_e^2$  はそれぞれ分散の群間成分、群内成分と呼ばれ、こうした分散成分の推定方法には Henderson の方法、Rao の MINQUE 法など様々な手法が古くから提案されてきた。

ここでは、Prasad and Rao (1990) により与えられた、Henderson (Method III) に基づいた明示的な推定方法を紹介する。

8/29

$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{x}_{ij} - \bar{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{x}_{ij} - \bar{\mathbf{x}}_i)^\top$  においてそのランクを  $r$ , また一般化逆行列を  $\mathbf{B}^-$  とし,  $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{B}^- \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{x}_{ij} - \bar{\mathbf{x}}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i)$  とする。このとき,  $\sigma_e^2$  の不偏推定量は,  $N = \sum_{i=1}^m n_i$  に対して

$$\hat{\sigma}_e^2 = (N - m - r)^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \left\{ (y_{ij} - \bar{y}_i) - (\mathbf{x}_{ij} - \bar{\mathbf{x}}_i)^\top \tilde{\boldsymbol{\beta}} \right\}^2 \quad (1)$$

となる。一方,  $\sigma_v^2$  の推定については,  $\boldsymbol{\beta}$  の OLS  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$  を用いて

$$\hat{\sigma}_v^{2*} = N_*^{-1} \{ (\mathbf{y} - \mathbf{X} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}) - (N - p) \hat{\sigma}_e^2 \}$$

で与えられる。ここで,  $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{in_i})^\top$ ,  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^\top, \dots, \mathbf{y}_m^\top)^\top$ ,  $\mathbf{X}_i = (\mathbf{x}_{i1}^\top, \dots, \mathbf{x}_{in_i}^\top)^\top$ ,  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^\top, \dots, \mathbf{X}_m^\top)^\top$  とし,

$N_* = N - \sum_{i=1}^m n_i^2 \bar{\mathbf{x}}_i^\top (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \bar{\mathbf{x}}_i$  とする。 $\hat{\sigma}_v^{2*}$  は負の値を取り得るので  $\hat{\sigma}_v^2 = \max(0, \hat{\sigma}_v^{2*})$  を用いることになる。

$\rho = \sigma_v^2 / \sigma_e^2$  に  $\hat{\rho} = \hat{\sigma}_v^2 / \hat{\sigma}_e^2$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  に  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\rho})$  を代入すると, 母集団平均  $\mu_i = \bar{Y}_i$  の経験ベイズ予測量:

$$\tilde{\mu}_i(\hat{\rho}) = \bar{\mathbf{x}}_{i(p)}' \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\rho}) + \left\{ \frac{n_i \hat{\rho}}{1 + n_i \hat{\rho}} + \frac{n_i}{N_i} \frac{1}{1 + n_i \hat{\rho}} \right\} (\bar{y}_i - \bar{\mathbf{x}}_i' \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\rho}))$$

9/29

縮小推定量は,  $n_i$  もしくは  $\hat{\rho}$  が小さければ  $\bar{y}_i$  を  $\bar{\mathbf{x}}_i' \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\rho})$  の方向へ縮小することによって安定化を図っている。 $n_i$  が小さければ, データの不足を周辺もしくは全体のデータで補うことによって予測精度を高めていると解釈される。

問題点: (a) 個票データの利用の難しさ

(b) 欠損データに対応する共変量  $\mathbf{x}_{n_i+1}, \dots, \mathbf{x}_{N_i}$  のデータは利用可能か

応用例: 欠損データに対して補間して予測することができる。

$$E \left[ \sum_{j=n_i+1}^{N_i} Y_{ij} \mid \mathbf{y}_i \right] = (N_i - n_i) \left\{ \bar{\mathbf{x}}_i^{*'} \boldsymbol{\beta} + \frac{n_i \rho}{1 + n_i \rho} (\bar{y}_i - \bar{\mathbf{x}}_i' \boldsymbol{\beta}) \right\}$$

## [5] 様々な課題と解決策

### (1) 欠損データの補間

$(Y_{i1}, \mathbf{x}_{i1}), \dots, (Y_{iN_i}, \mathbf{x}_{iN_i}) : i = 1, \dots, m$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \tilde{Y}_{ij} > 0, \\ 0 & \text{if } \tilde{Y}_{ij} \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

ここで  $\tilde{Y}_{ij}$  は NERM に従う。

$$\tilde{Y}_{ij} = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + v_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, N_i,$$

変量効果  $v_i : v_i \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$ .

誤差変量  $\varepsilon_{ij} : -\varepsilon_{ij} \sim F(\cdot)$ , 分布関数 (正規, ロジスティック)

観測データ :  $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{in_i})^\top, (\mathbf{x}_{i1}, \dots, \mathbf{x}_{iN_i})$

欠損データ :  $\mathbf{Y}_i^* = (Y_{in_i+1}, \dots, Y_{iN_i})^\top$

予測したい量 :  $\bar{Y}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij}$

$$\bar{Y}_i = \frac{n_i}{N_i} \bar{y}_i + \frac{Y_{i,n_i+1} + \dots + Y_{i,N_i}}{N_i}, \quad \bar{y}_i = n_i^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

11/29

ベイズ予測量 :

$$\begin{aligned} \widehat{\bar{Y}}_i(\boldsymbol{\beta}, \tau^2) &= \frac{n_i}{N_i} \bar{y}_i + \frac{1}{N_i} \sum_{j=n_i+1}^{N_i} E[Y_{ij} | \mathbf{y}] \\ &= \frac{n_i}{N_i} \bar{y}_i + \frac{1}{N_i} \sum_{j=n_i+1}^{N_i} \frac{\int F(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + v_i) G(v_i | \boldsymbol{\beta}, \tau^2) dv_i}{\int G(v_i | \boldsymbol{\beta}, \tau^2) dv_i} \end{aligned}$$

ここで,  $v_i$  の確率密度関数  $g(v_i | \tau^2)$  に対して

$$G(v_i | \boldsymbol{\beta}, \tau^2) = g(v_i | \tau^2) \prod_{j=1}^{n_i} \left[ \left\{ F(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + v_i) \right\}^{y_{ij}} \left\{ 1 - F(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + v_i) \right\}^{1-y_{ij}} \right]$$

である。  $\boldsymbol{\beta}, \tau^2$  を周辺分布の対数尤度

$$\sum_{i=1}^m \log \left\{ \int \prod_{j=1}^{n_i} \left[ \left\{ F(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + v_i) \right\}^{y_{ij}} \left\{ 1 - F(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + v_i) \right\}^{1-y_{ij}} \right] g(v_i | \tau^2) dv_i \right\}$$

から  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\tau}^2$  で推定すると, 経験ベイズ予測量  $\widehat{\bar{Y}}_i^{EB} = \widehat{\bar{Y}}_i(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\tau}^2)$  が得られる。

12/29

## (2) ベンチマーク問題と制約付きベイズ推定

$$i = 1, \dots, m, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^\top$$

$$y_i | \theta_i \sim \mathcal{N}(\theta_i, D_i), \quad \theta_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2)$$

[1] 問題点：平均が一致しない。

$m$  個の地域全体の平均を経験ベイズ推定値で構成してみると、全体の標本平均の値と一致しないという問題がある

$w_i = \frac{D_i^{-1}}{\sum_{j=1}^m D_j^{-1}}$  を重みとして加重平均をとったもの  $\bar{y}_w = \sum_{i=1}^m w_i y_i$  で全体の平均を推定する。

$$\sum_{i=1}^m w_i \hat{\theta}_i^{EB} \neq \sum_{i=1}^m w_i y_i$$

問題によっては、各地域の推定値の加重平均が全体の標本平均と一致することが要請されており、この要請に応えるために各地域のベイズ推定値を調整することをベンチマーク問題という。

13/29

[2] 問題点：ベイズ推定値は縮小し過ぎる傾向にある。

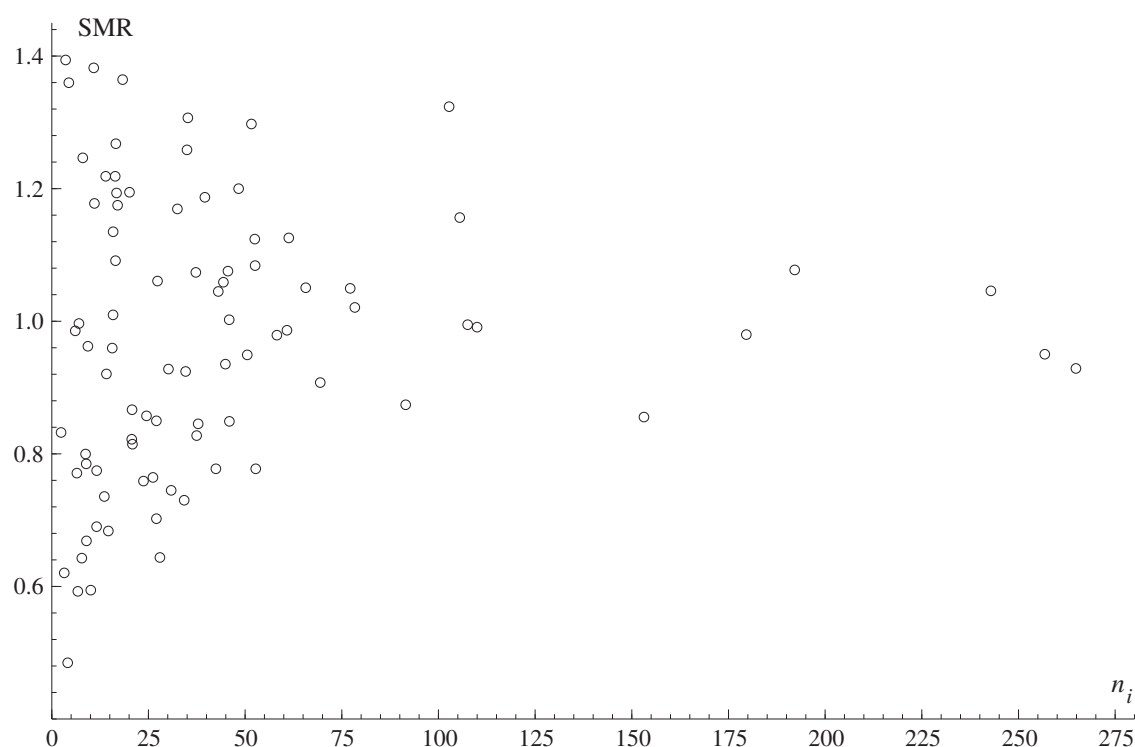
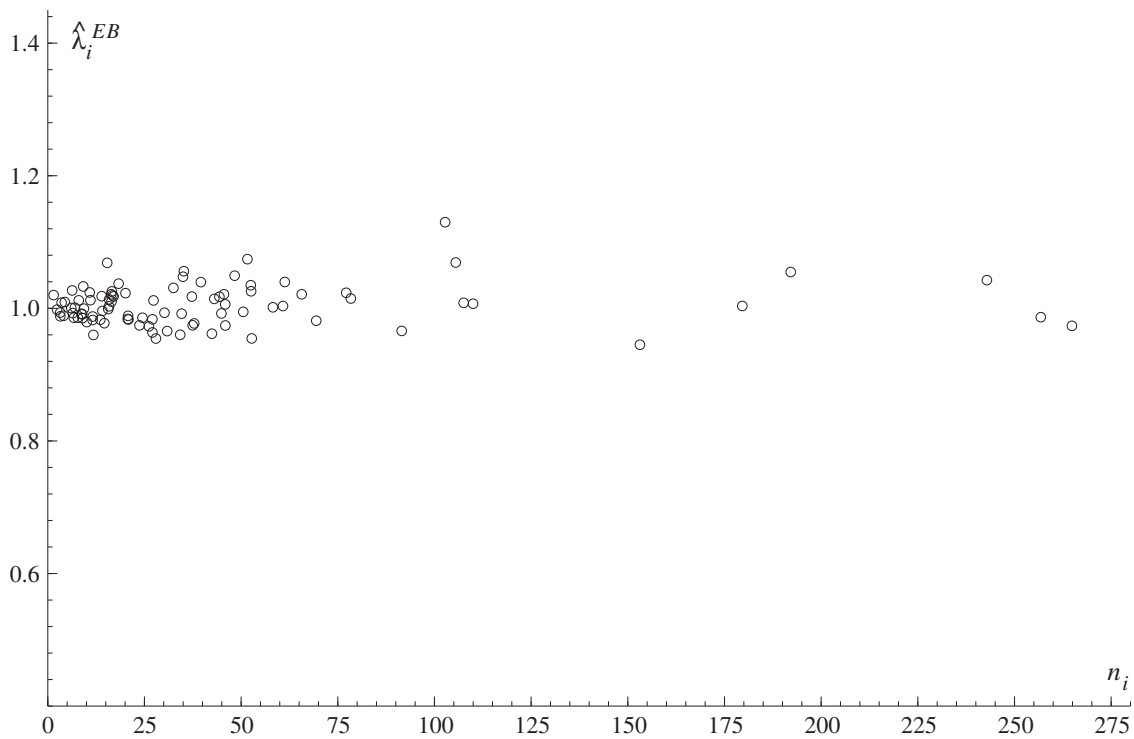


Figure: 埼玉県における胃がんによる女性死亡リスク SMR に関する市町村別プロット

14/29



**Figure:** 埼玉県における胃がんによる女性死亡リスク EB に関する市町村別プロット

Louis (1984) : ベイズ推定値の平均・分散を事後分布の平均・分散と比較する。 $\hat{\theta}_i^B = E[\theta_i | \mathbf{y}]$

$$(B1) \sum_{i=1}^m w_i \hat{\theta}_i^B = \sum_{i=1}^m w_i E[\theta_i | \mathbf{y}]$$

$$(B2) \sum_{i=1}^m w_i \{\hat{\theta}_i^B - \bar{\hat{\theta}}_B\}^2 \leq \sum_{i=1}^m w_i E\{[\theta_i - \bar{\theta}]^2 | \mathbf{y}\}$$

ただし、 $\bar{\hat{\theta}}_B = \sum_{i=1}^m w_i \hat{\theta}_i^B$ ,  $\bar{\theta} = \sum_{i=1}^m w_i \theta_i$

実際、不等式 (B2) は次から従う。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m w_i E\{[\theta_i - \bar{\theta}]^2 | \mathbf{y}\} &= \sum_{i=1}^m w_i \{\hat{\theta}_i^B - \bar{\hat{\theta}}_B\}^2 + \sum_{i=1}^m w_i \text{Var}(\theta_i - \bar{\theta} | \mathbf{y}) \\ &\geq \sum_{i=1}^m w_i \{\hat{\theta}_i^B - \bar{\hat{\theta}}_B\}^2 \end{aligned}$$

この不等式は、ベイズ推定値の分散が事後分布の分散より小さいことを意味している。

[3] 解決策：制約付きベイズ推定法

$$(\text{平均制約}) \sum_{i=1}^m w_i \hat{\theta}_i^{CB} = \sum_{i=1}^m w_i y_i$$

$$(\text{分散制約}) \sum_{i=1}^m w_i \{\hat{\theta}_i^{CB} - \bar{\hat{\theta}}_{CB}\}^2 = \sum_{i=1}^m w_i \{\hat{\mu}_i^B - \bar{\hat{\theta}}_B\}^2 + \sum_{i=1}^m w_i (1 - w_i) \frac{D_i \sigma_v^2}{D_i + \sigma_v^2}$$

ラグランジュの未定乗数法で解く。

$$L(\hat{\theta}_1^{CB}, \dots, \hat{\theta}_m^{CB}, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^m E[(\hat{\theta}_i^{CB} - \theta_i)^2 | \mathbf{y}] - \lambda_1 \left\{ \sum_{i=1}^m w_i \hat{\theta}_i^{CB} - \sum_{i=1}^m w_i y_i \right\} \\ - \lambda_2 \left\{ \sum_{i=1}^m w_i \{ \hat{\theta}_i^{CB} - \bar{\theta}_{CB} \}^2 - \sum_{i=1}^m w_i \{ \hat{\mu}_i^B - \bar{\theta}_B \}^2 - \sum_{i=1}^m w_i (1 - w_i) \frac{D_i \sigma_v^2}{D_i + \sigma_v^2} \right\}$$

の最小化問題を解いたものを制約付きベイズ推定量という。

$$\hat{\theta}_i^{CB} = \hat{\theta}_i^B + \{a_B - 1\} \left\{ \hat{\theta}_i^B - \sum_{j=1}^m w_j \hat{\theta}_j^B \right\} + \sum_{i=1}^m w_i (y_i - \hat{\theta}_i^B)$$

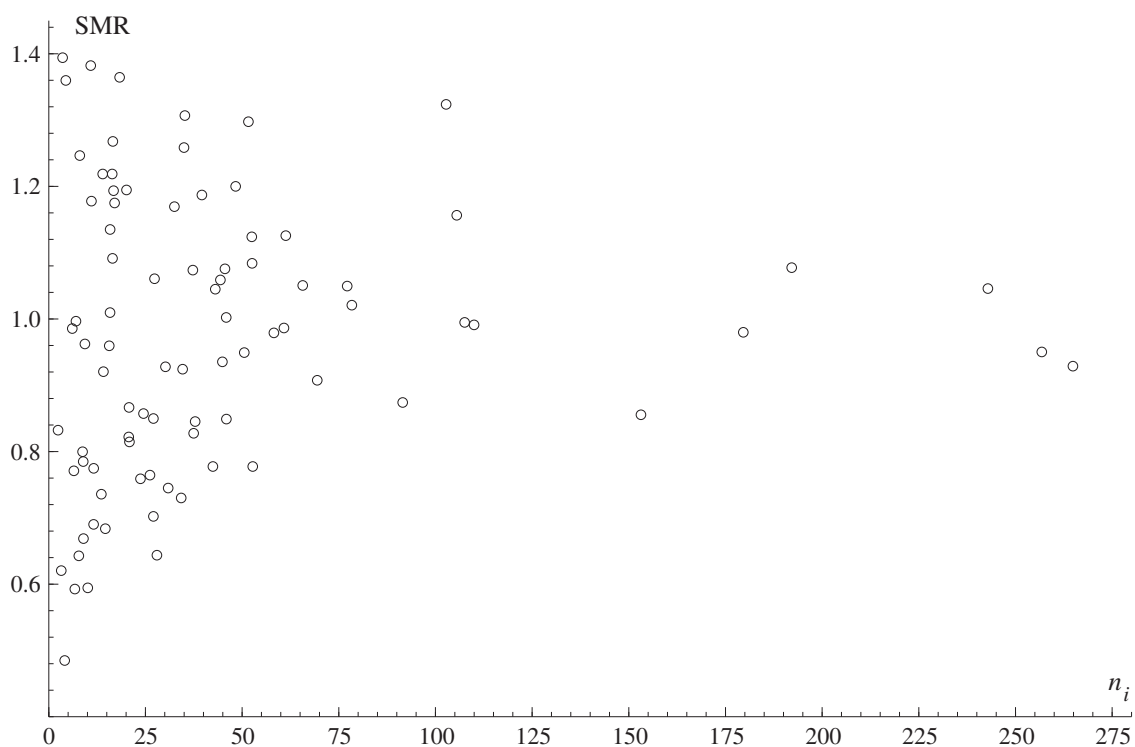
ここで、 $\Delta_v = \sum_{i=1}^m w_i (1 - w_i) \frac{D_i \sigma_v^2}{D_i + \sigma_v^2}$  に対して

$$\{a_B\}^2 = 1 + \frac{\Delta_v}{\sum_{i=1}^m w_i \{ \hat{\theta}_i^B - \sum_{j=1}^m w_j \hat{\theta}_j^B \}^2}$$

更なる問題点： $y_i > 0$  のときには変換が必要。制約条件  $\hat{\theta}_i^{CB} > 0$  を課す必要。Ghosh, Kubokawa and Kawakubo(2015)

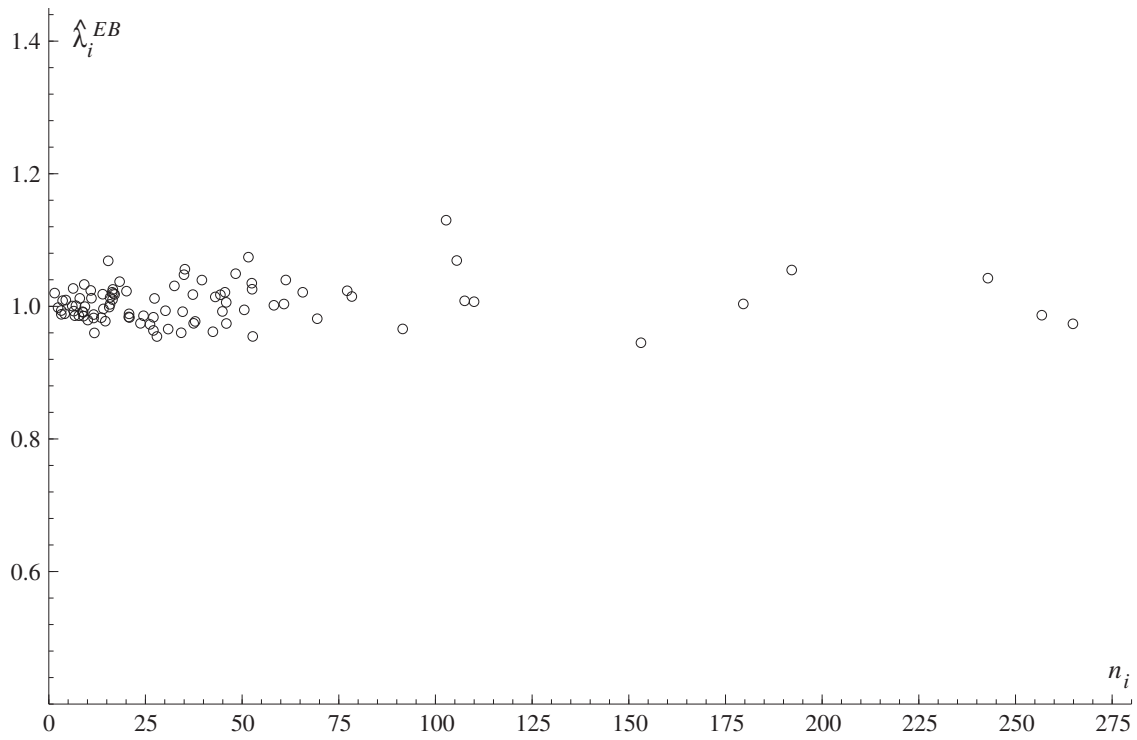
利点：モデルの間違った設定に対する頑健性を与えている。

17/29

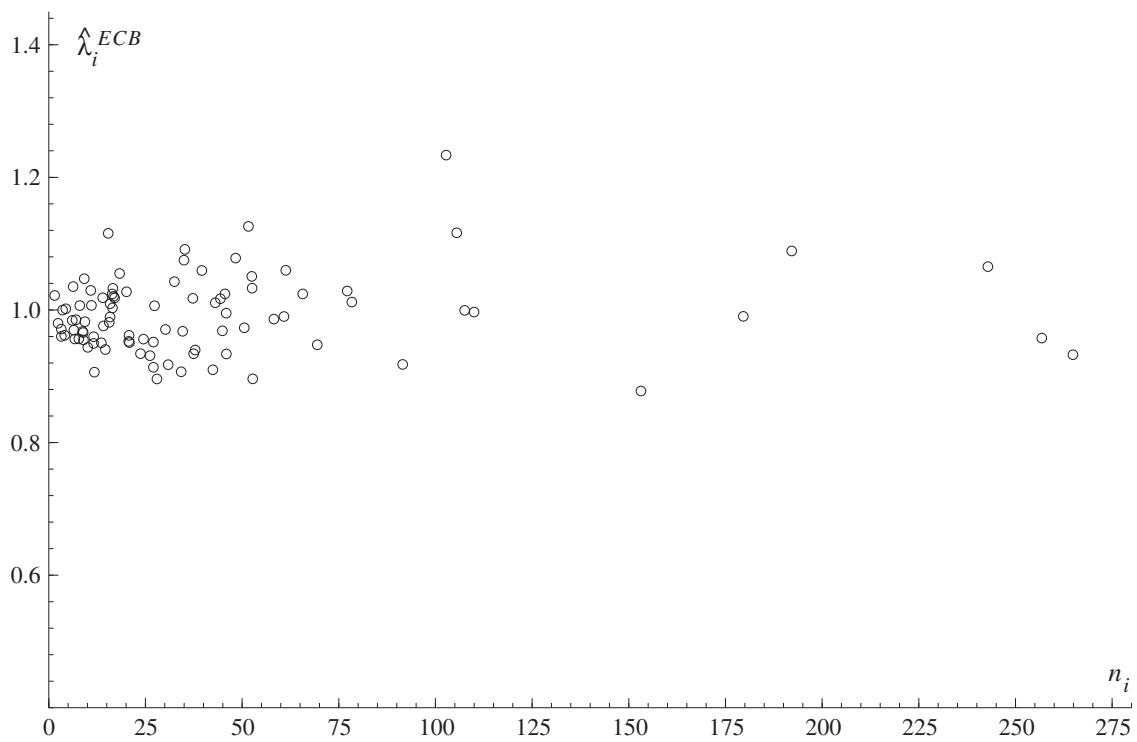


**Figure:** 埼玉県における胃がんによる女性死亡リスク SMR に関する市町村別プロット

18/29

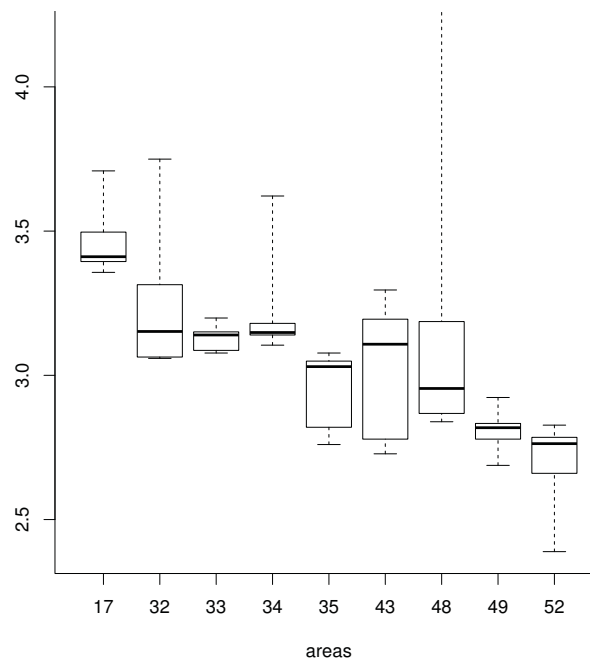


**Figure:** 埼玉県における胃がんによる女性死亡リスク EB に関する市町村別プロット



**Figure:** 埼玉県における胃がんによる女性死亡リスク CEB に関する市町村別プロット

### (3) 不均一分散をもつモデルへの拡張



**Figure:** Boxplots of the Posted Land Price Data for Selected Areas

21/29

地域レベルモデル :  $i = 1, \dots, m$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^\top$   
 $y_i | \theta_i \sim \mathcal{N}(\theta_i, \sigma_i^2)$ ,  $\theta_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2)$

$S_i^2$  を  $\sigma_i^2$  の推定量とする。  $n_i S_i^2 / \sigma_i^2 \sim \chi_{n_i}^2$

問題点 :  $n_i$  が小さいとき,  $S_i^2$  は一致性がない。予測量に一致性がない。  
 解決策 :  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2$  に制約を入れる。

(a) 等号制約 (強い制約) :  $\sigma_1^2 = \dots = \sigma_m^2 = \sigma^2$

(b) 変量分散モデル :  $\sigma_i^{-1} \sim \text{Gamma}(a, b)$ ,  $(a, b)$  : 未知

近似ベイズ推定量 : 平均と分散の2重縮小推定 Tamae and Kubokawa (2015)

$$\hat{\theta}_i^{AB} = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \frac{\hat{\sigma}_v^2}{\hat{\sigma}_v^2 + (n_i S_i^2 + 2/b)/(n_i + a/2)} (y_i - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$$

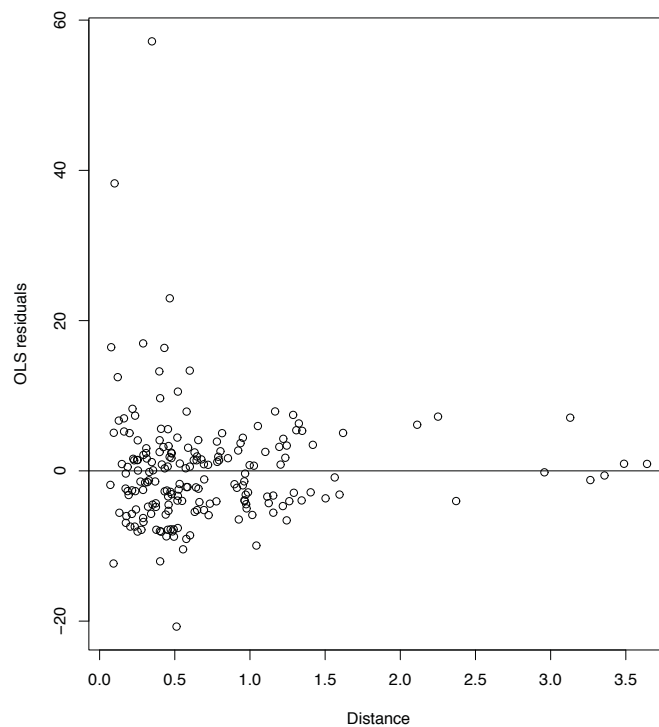
(c) 分散関数モデル : Sugasawa and Kubokawa (2017)

$$\sigma_i^2 = g(\mathbf{z}_i^\top \boldsymbol{\gamma})$$

例 :  $g(\mathbf{z}_i^\top \boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{z}_i^\top \boldsymbol{\gamma})^2$ ,  $g(\mathbf{z}_i^\top \boldsymbol{\gamma}) = \exp\{\mathbf{z}_i^\top \boldsymbol{\gamma}\}$

22/29





**Figure:** Plot of OLS Residuals Against Distance  $D_{ij}$

#### (4) 変換を伴う線形混合モデル

支出，収入や生産量など観測データは正の値をとることが多い。この場合，対数変換したものに線形混合モデルを当てはめることが一般になされているが，対数変換が必ずしも相応しいとは限らない。

**(I) 変換関数** :  $y > 0$  なので，  $h(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$

(1) Box-Cox 変換

$$h_{\lambda}^{BC}(y) = \begin{cases} (y^{\lambda} - 1)/\lambda, & \lambda \neq 0, \\ \log y, & \lambda = 0, \end{cases}$$

変換パラメータ  $\lambda$  の MLE は一致性をもたない。

(2) 双巾変換 (Dual Power Transformation)

$$h_{\lambda}^{DP}(y) = \begin{cases} (y^{\lambda} - y^{-\lambda})/2\lambda, & \lambda > 0, \\ \log y, & \lambda = 0. \end{cases}$$

変換パラメータ  $\lambda$  の MLE は一致性をもつ。

## (II) モデルの作り方 : $y_1, \dots, y_m, y_i > 0$

(1) Fay-Herriot モデル :  $i = 1, \dots, m$

$$y_i = \theta_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, D_i),$$
$$\theta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + v_i, \quad v_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$$

$\theta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + v_i$  の予測量 :  $\hat{\theta}_i^B = \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{\hat{\sigma}_v^2}{D_i + \hat{\sigma}_v^2} (y_i - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\beta}})$

$y_i > 0$  なので相応しくない。

(2) 変換モデル :  $y_i > 0$  のとき,  $y_i$  を変換  $h(y_i, \lambda)$

$$h_\lambda(y_i) = \theta_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, m$$

(a)  $\theta_i$  の予測量を逆変換したもの

$$\hat{\theta}_i^B(h_\lambda) = \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\beta}} + \frac{\hat{\sigma}_v^2}{D_i + \hat{\sigma}_v^2} (h_\lambda(y_i) - \mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\beta}})$$

に対して  $h_\lambda^{-1}(\hat{\theta}_i^B(h_\lambda))$  を考える。Sugasawa and Kubokawa (2015)  
逆変換は何を予測していることになるのか。

25/29

(b)  $\theta_i$  を逆変換したものの予測量 : Sugasawa and Kubokawa (2017)

$$E[h_\lambda^{-1}(\theta_i) | y_i] = E[h_\lambda^{-1}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + v_i) | y_i] = \int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda^{-1}(t) \phi(t; \hat{\theta}_i^B(h_\lambda), \sigma_i^2) dt$$

ただし  $\sigma_i^2 = \sigma_v^2 D_i / (\sigma_v^2 + D_i)$ ,  $\phi(t; \hat{\theta}_i, \sigma_i^2) \sim \mathcal{N}(\hat{\theta}_i, \sigma_i^2)$

(3) 個票データ解析のための変換モデル : 有限母集団の枠組み

$Y_{ij} > 0, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, N_i$

母集団平均  $\bar{Y}_i = N_i^{-1} \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij}$  を推定したい。

変換 :  $h_\lambda(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$   $h_\lambda(Y_{ij}) = \mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + v_i + e_{ij}$

超母集団の設定 :  $v_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$ ,  $e_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$

$\mathbf{y}_i = (y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i})^\top$  : 抽出されたデータ

$\mathbf{Y}_i^* = (Y_{i,n_i+1}, \dots, Y_{i,N_i})^\top$  : 抽出されなかったデータ

$\bar{Y}_i = N_i^{-1} \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij}$  の予測量 :

$$E[\bar{Y}_i | \mathbf{y}_i] = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{N_i} + \frac{\sum_{j=n_i+1}^{N_i} E[Y_{ij} | \mathbf{y}_i]}{N_i} = \frac{n_i}{N_i} \bar{y}_i + \frac{\sum_{j=n_i+1}^{N_i} E[Y_{ij} | \mathbf{y}_i]}{N_i}$$

ここで  $E[Y_{ij} | \mathbf{y}_i] = E[h_\lambda^{-1}(\mathbf{x}_{ij}^\top \boldsymbol{\beta} + v_i + e_{ij}) | \mathbf{y}_i]$  を計算する必要がある。

26/29

(4) Unmatched Sampling Linking Model : Sugasawa, Kubokawa and Rao (2017)

$$y_i = \theta_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, D_i),$$

$$h(\theta_i) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + v_i, \quad v_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$$

$\theta_i > 0$ ,  $h(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$

例えば,  $h(\theta_i) = \log \theta_i$ ,  $h(\theta_i) = \log\{\theta_i/(1 - \theta_i)\}$

$\theta_i = h^{-1}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + v_i)$  の予測量

$$E[\theta_i | y_i] = E[h^{-1}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + v_i) | y_i] = \int \theta_i \pi(\theta_i | y_i) d\theta_i,$$

$$\pi(\theta_i | y_i) = \frac{h'(\theta_i) \exp\{-(y_i - \theta_i)^2/2D_i - (h(\theta_i) - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})^2/2\sigma_v^2\}}{\int h'(\theta_i) \exp\{-(y_i - \theta_i)^2/2D_i - (h(\theta_i) - \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})^2/2\sigma_v^2\} d\theta_i}$$

27/29

## (5) 離散データ解析

地域別の疾病数, 死亡数, 犯罪数などの計数データの解析について, 地域別変量効果を導入したモデルを用いることによって精度の高い地域別推定値を与えることができる。ポアソン・ガンマモデル, 2項・ベータモデルなど, 指数型分布族の中で分散が平均の2次関数で表現できている分布族については共役な事前分布を用いて経験ベイズ推定値を求めることができ, 安定した地域別推定値を与えることができる。また指数型分布族の平均にリンク関数を設定しそこに事前分布として正規分布を想定するモデルは一般化線形混合モデル (GLMM) と呼ばれている。

## (6) パネルデータ解析

地域別なデータが時系列的に取られているとき, いわゆるパネルデータの分析に地域効果を組み入れて解析するモデルも提唱されている。母数の識別可能性や推定方法が問題になる。

## (7) 変数選択規準

線形混合モデルの変数選択については, 通常の AIC, BIC とは異なり, 変量効果に基づいた予測誤差の改善を考慮する規準として条件付き AIC が提案され, Kawakubo and Kubokawa (2014) などでも更なる展開がなされている。

28/29

## (8) 予測誤差の評価

EBLUP のような縮小推定量は推定精度を高めるために導入されているので、実際予測誤差がどの程度改善されているのかを見積もる必要がある。そこで EBLUP の平均 2 乗誤差 (MSE) の  $m \rightarrow \infty$  のもとでの漸近展開と、その 2 次漸近不偏推定量の導出を行う。

予測誤差を評価する別の方法は予測信頼区間を作ることで、 $m \rightarrow \infty$  のもとで 2 次漸近的に信頼係数  $1 - \gamma$  に一致する信頼区間の構成を行う。

このような 2 次不偏などの手法を導出するには、テーラー展開に基づいた解析的な方法とブートストラップに基づいた方法が一般的である。

解析的な方法によると、2 次不偏推定量を明示的に求めることができるが、簡単なモデルについては計算ができて複雑なモデルになると偏微分等の計算が困難になる。これを回避する一つのアプローチは数値微分を用いるもので、2 次不偏性を理論上保証しつつ偏微分の複雑な計算を必要なく計算機の力を借りて求めることができる。

ブートストラップ法もしくはパラメトリック・ブートストラップ法は容易に計算できるので便利であるが、ML などの繰り返し計算を必要とする推定手法が含まれていると、相当な計算時間がかかってしまうという欠点がある。

# 匿名性を確保した所得等内訳情報の作成

星野 伸明  
金沢大学・経済学経営学系

本研究は科研費の助成を受けている。

1

## 動機付け：統計委員会諮問第76号の答申より

- 「国民生活基礎調査に係る匿名データの作成について（平成27年1月29日）」から引用：
  - 前回答申（諮問第54号、平成25年9月27日答申）における「今後の課題」への対応
    - \* 【所得票の内訳情報の提供】本計画では、**所得等の情報について、総額についてのみトップコーディングして提供することとしている**。これに対して、**所得等の内訳情報も有用性が高いことからトップコーディング等の匿名化措置をして提供することが検討されたが、総額と内訳の情報に整合性が取れないこと、匿名性が十分に確保することができないことが明らかになった**。このような検討の結果、所得等は総額のみをトップコーディングして提供することとし、その内訳情報の提供については、今後、より精緻な匿名化手法に関する慎重な研究・検討が必要であることから、引き続き、後述「3 今後の課題」で示した方向で検討する必要がある。
  - 今後の課題
    - \* 【所得票の内訳情報の提供】本計画においては、所得票に含まれる情報について

2

世帯の総所得、課税等の状況及び掛金に限定して提供することとしている。しかしながら、近年、社会保障や所得格差等に関する研究の重要性が増しており、その分析には所得等に関する内訳情報の必要性が指摘されている。一方、**匿名性を十分に確保した内訳情報のデータ作成方法は、確立されておらず**、より精緻な匿名化手法に関する慎重な研究・検討が必要となっている。このため、今後、所得等の内訳情報の提供に向け、匿名性と有用性の確保の観点から、トップコーディング以外の適用も含めて匿名化措置を検討する必要がある。

- （潜在的には国民生活基礎調査に限らず）匿名データの作成において、匿名性を確保した所得等内訳情報の作成が必要とされている。
  - しかし方法について研究不足である。

## 問題の匿名化措置

- 国民生活基礎調査の所得票（匿名データ）
  - 総額のみをトップコーディングして提供；
    1. 総所得：2200万円以上、1万円単位
    2. 拠出金合計（税金＋社会保険料）：490万円以上、1千円単位
    3. 掛金（企業年金・個人年金等掛金）：80万円以上、1千円単位
- 同調査票（H29）
  - 所得の内訳：雇用者所得、事業所得、農耕・畜産所得、家内労働所得、財産所得、公的年金・恩給、雇用保険、児童手当等、その他の社会保障給付金、仕送り、企業年金・個人年金等、その他の所得
  - 所得は全て1万円単位、5桁か4桁。
  - 拠出金や掛け金は1千円単位、5桁。

## そもそも論

### 1. 所得は匿名化措置を施すべきか。

- 高額所得者は目立つかもしれないので（識別に使える）キー変数かもしれない。
- キー変数でなくてもセンシティブ変数であろう。
- キー変数なら措置は妥当。センシティブ変数に措置をする必要はないが、措置は安心につながる。

### 2. 何故トップコーディング？

- 裾の個体は目立ちやすいので、キーとして使えなくしたい。
- 個体量が少ない領域をまとめると識別可能な個体量は減りやすい。

### 3. トップコーディング時の内訳整合性をどのように考えるか。

- 内訳は比（0.1%単位でどうか）なら整合的。桁丸めによる保護効果有り。
  - トップコーディングされない個体も内訳を比で与えると場合分け要らず。

## 内訳を比で与えることの論点

### 1. 内訳の比ではなく実額が知りたい？

- 総額がトップコーディングされている場合、内訳の実額が分からない。
- トップコーディングでなければウソの総額を与える（攪乱）しかないと思われる。

### 2. 構成比が特異な個体は安全？

- 構成比はキー変数ではないと思うが、丸めの桁数で保護効果が変わる。
- 構成比を攪乱すれば保護効果は上がる。

### 3. 内訳の総和が 100%にならないことを許す？

- 構成比の下 1 桁が四捨五入だと総和は 1 になるとは限らない。
- 総和 1 が所与で期待値が真の構成比になるような確率ベクトルを用いる “random rounding” がスマート。
- random rounding は攪乱の一種。



## (Naive) Random Rounding

- 各構成比の「有効桁数」を  $10^{-d}$  とおく ( $d = 0, 1, 2, \dots$ )。
- 真の第  $j$  構成比が  $\pi_j$  の時、 $\pi_j$  を  $10^{-d}$  で割った余りを  $r_j$  と書く ( $j = 1, 2, \dots, J$ )。
- 余りの総和を  $r. := \sum_{j=1}^J r_j$  と書く。 $r.$  は  $10^{-d}$  か  $0$  のどちらか。以下  $0$  でないとする。
  - 理論的には 10 進法にこだわる必要がない。 $r.$  が  $0$  にならない底を選べる。
  - $\pi_j > 0$  となる項目全てについて  $r_j > 0$  となる底を選ぶべき。
    - \*  $\pi_j = 0$  となる項目を保護するには歪みを入れるしかない。
- 確率変数ベクトル  $\mathbf{X}_J := (X_1, X_2, \dots, X_J)$  は、第  $j$  セル確率が  $r_j/r. =: p_j$  で 10 を配る多項分布  $\text{Multi}(10, \mathbf{p})$  に従うとする。
- $\pi_j$  を  $10^{-d}$  で割った商に  $10^{-d}$  をかけて  $X_j \times 10^{-d-1}$  を加えた値を、丸められた第  $j$  構成比  $Y_j$  とする。
- 明らかに  $E(Y_j) = \pi_j$  かつ  $\sum_{j=1}^J Y_j = 1$  となる。

7

## 一般化：構成比の攪乱

- Random Rounding だと下 1 桁のみランダムだが、1 桁である必要はない。
- 前のページで  $\mathbf{X}_J \sim \text{Multi}(10, \mathbf{p})$  のところを  $\text{Multi}(10^c, \mathbf{p})$  として  $Y_j$  を調整すれば下  $c$  桁をランダムに出来る ( $c = 0, 1, 2, \dots$ )。
- 一般に任意の総桁・有効桁で

$$E(Y_j) = \pi_j, \quad \sum_{j=1}^J Y_j = 1$$

を満たす非負の構成比をランダムに生成可能。

- 攪乱値  $Y_j$  は有限桁なので離散変数。
- この手法の安全性は多項分布のランダムネスに依存する。

8



## 攪乱の安全性

- 攪乱の安全性についての考え方は諸説あるが、ここでは公表値  $\mathbf{x}$  から真値  $\mathbf{p}$  を推測できる精度と考える。
- 有名な定式化では、正の  $\epsilon$  について  $\forall(\mathbf{x}, \mathbf{p})$

$$\frac{P(\mathbf{X} = \mathbf{x}; \mathbf{p} + \Delta)}{P(\mathbf{X} = \mathbf{x}; \mathbf{p})} \leq \exp(\epsilon) \quad (1)$$

を「 $\epsilon$ -差分プライベート (DP)」と呼ぶ。ただし  $\Delta$  は真値  $\mathbf{p}$  の 1 単位変化を表す。

- (1) 式の対数をとると  $|\Delta| = 1$  なので

$$\frac{\log P(\mathbf{X} = \mathbf{x}; \mathbf{p} + \Delta) - \log P(\mathbf{X} = \mathbf{x}; \mathbf{p})}{|\Delta|} \leq \epsilon \quad (2)$$

- 差分プライバシーはもともとデータベースの一個体の変化を考えているので  $\mathbf{p}$  が離散的に変化する。
- 我々は (2) 式で  $|\Delta| \rightarrow 0$  として、対数尤度関数の傾きが  $\epsilon$  以下なら安全と考えよう。

## 母数の秘匿

- $P(\mathbf{X} = \mathbf{x}; \mathbf{p})$  が 0 になる  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  が存在したら差分プライベートではない。
  - 多項分布は空セル ( $p_j = 0$ ) で  $P(X_j > 0) = 0$  なので差分プライベートではない。
- 全てのセル確率が正になるように多項分布の母数を秘匿:  $\tilde{p}_j = p_j + \delta_j$
- $\Delta$  が  $p_j$  の微小変化とみなす:

$$\begin{aligned} & (\log P(\mathbf{X} = \mathbf{x}; \tilde{\mathbf{p}} + \Delta) - \log P(\mathbf{X} = \mathbf{x}; \tilde{\mathbf{p}})) / |\Delta| \\ &= (x_j (\log(p_j + \delta_j + \Delta) - \log(p_j + \delta_j))) / |\Delta| \rightarrow x_j / \tilde{p}_j \end{aligned}$$

- 従って差分プライベートであるためには、 $\forall(x_j, p_j)$

$$x_j / \tilde{p}_j \leq \epsilon$$

- つまり  $\tilde{p}_j$  が最小となる  $j$  について  $x_j = 10^c$  であっても上式の成立を要求。
  - 後で母数の総和が 1 という条件を入れて修正する。
- 結局、 $\tilde{p}_j$  が一様かつ  $c$  が小さいほど安全。

## 多項分布の一般化

- 構成比の攪乱では  $\mathbf{X}_J \sim \text{Multi}(10^c, \mathbf{p})$  とした結果、 $\mathbb{E}(Y_j) = \pi_j, \sum_{j=1}^J Y_j = 1$  を満たす非負の構成比がランダムに生成された。
- この攪乱の安全性は多項分布の確率関数に依存して評価された。分布が変われば安全性も変わる。
- 多項分布と値域が同じで周辺の期待値も同じ分布に  $\mathbf{X}_k$  が従うなら、同じ制約を満たす  $Y_j$  が生成可能。
- 以下では所与の  $\pi$  について、 $\mathbf{F}_J \in \mathcal{F}_{|n,J} := \{\mathbf{f}_J : f_j \in \mathbb{N}_0, j \in [J], \sum f_j = n\}$  かつ  $\mathbb{E}(F_j) = n\pi_j$  となる分布族を構成してその性質を示す。

## 準備) ベル多項式

- (Total) Bell polynomial:

$$B_n(\mathbf{w}) := n! \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_{|n}} \prod_{i=1}^n \left( \frac{w_i}{i!} \right)^{s_i} \frac{1}{s_i!},$$

where

$$\mathcal{S}_{|n} := \left\{ \mathbf{s} : s_i \in \mathbb{N}_0, i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} i s_i = n \right\}.$$

- $B_0(\cdot) := 1$ .
- Partial Bell polynomial:

$$B_{n,k}(\mathbf{w}) := n! \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}_{|n,k}} \prod_{i=1}^n \left( \frac{w_i}{i!} \right)^{s_i} \frac{1}{s_i!},$$

where

$$\mathcal{S}_{|n,k} := \left\{ \mathbf{s} : s_i \in \mathbb{N}_0, i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} i s_i = n, \sum_{i=1}^{\infty} s_i = k \right\}.$$

- Simple fact:  $B_n(\mathbf{w}) = \sum_{k=0}^n B_{n,k}(\mathbf{w})$ .
- We write  $\lambda \mathbf{w} = (\lambda w_1, \lambda w_2, \lambda w_3, \dots)$ .  $\Rightarrow B_n(\lambda \mathbf{w}) = \sum_{k=0}^n \lambda^k B_{n,k}(\mathbf{w})$ .
- $\Rightarrow dB_n(\lambda \mathbf{w})/d\lambda = \sum_{k=0}^n k \lambda^{k-1} B_{n,k}(\mathbf{w})$
- If  $w_i \geq 0, i \in [n]$ , then  $B_n(\mathbf{w}) \geq 0 \Rightarrow dB_n(\lambda \mathbf{w})/d\lambda \geq 0$  if  $\lambda \geq 0$ .

## Bell Polynomial Distribution

- Define, for  $n \in \mathbb{N}, J \in \mathbb{N}, \lambda_j \geq 0, j \in [J], w_j \geq 0, j \in [n]$ , the  $J$  dimensional Bell polynomial distribution with parameters  $(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J, \mathbf{w})$  by

$$p(\mathbf{f}_J) = \binom{n}{\mathbf{f}_J} \frac{1}{B_n(\lambda, \mathbf{w})} \prod_{j=1}^J B_{f_j}(\lambda_j \mathbf{w}), \quad \mathbf{f}_J \in \mathcal{F}_{|n, J}. \quad (3)$$

- Denote this distribution by  $\text{BellP}_J(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J, \mathbf{w})$ .
- When  $\mathbf{w} = (1, 0, 0, 0, \dots)$ , it reduces to the  $J$  dimensional multinomial distribution with cell probabilities  $\lambda_j/\lambda, j \in [J]$ .
- When  $\sum_{i=1}^{\infty} w_i/i! < \infty$ , it reduces to the Conditional Compound Poisson (CCP) distributions (H, 2009).

## Marginal Moments

- Write  $\pi_j := \lambda_j/\lambda..$
- **Theorem 1** Suppose that  $\mathbf{F}_J \sim \text{BellP}_J(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J, \mathbf{w})$ . Then

$$E(F_j) = n\pi_j, \quad j \in [J]. \quad (4)$$

$$V(F_j) = n\pi_j(1 - \pi_j)\phi(n, \lambda., \mathbf{w}), \quad j \in [J], \quad (5)$$

where

$$\phi(n, \lambda., \mathbf{w}) = 1 + \frac{\lambda.(n-1)!}{B_n(\lambda.\mathbf{w})} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{B_i(\lambda.\mathbf{w})w_{n-i}}{i!(n-i-2)!}.$$

$$\text{Cov}(F_i, F_j | N = n) = -n\pi_i\pi_j\phi(n, \lambda., \mathbf{w}), \quad i \in [J], j \in [J], i \neq j. \quad (6)$$

- **Remark 1**  $\phi(n, \lambda., \mathbf{w}) = 1$  if and only if  $w_i = 0$  for  $i \geq 2$ .
- **Corollary 1** For all  $\mathbf{w}$  the correlation matrix of  $\text{BellP}_J(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J, \mathbf{w})$  is that of  $\text{Multi}(n, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_J)$ .

## ex) Negative Hypergeometric Distribution

- $w_i = (i-1)!$ ,  $B_n(\lambda\mathbf{w}) = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)$ .
- $\text{BellP}_J(n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_J, (0!, 1!, 2!, \dots))$ 's pmf:

$$p(\mathbf{f}_J) = \binom{n}{\mathbf{f}_J} \frac{\Gamma(\alpha.)}{\Gamma(\alpha. + n)} \prod_{j=1}^J \frac{\Gamma(\alpha_j + f_j)}{\Gamma(\alpha_j)}, \quad \mathbf{f}_J \in \mathcal{F}_{|n, J}.$$

- Write  $\pi_j = \alpha_j/\alpha..$
- When  $\mathbf{F}_J \sim \text{BellP}_J(n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_J, (0!, 1!, 2!, \dots))$ , it is known that

$$E(F_j) = n\pi_j.$$

$$V(F_j) = n\pi_j(1 - \pi_j)(1 + (n-1)/(\alpha. + 1)).$$

- Hence  $\phi(n, \alpha., (0!, 1!, 2!, \dots))$  must be  $1 + (n-1)/(\alpha. + 1)$ .

- **Proposition 1**

$$\frac{(n-1)!\alpha.}{\Gamma(\alpha. + n)} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-i-1)\Gamma(\alpha. + i)}{\Gamma(i+1)} = \frac{n-1}{\alpha. + 1}.$$

## Direct Proof of Proposition 1

- **Lemma 1**

$$\sum_{i=0}^n \frac{\Gamma(a+i)}{\Gamma(1+i)} = \frac{\Gamma(1+n+a)}{a\Gamma(1+n)}.$$

- Thus we have

$$\begin{aligned} \phi(n, \alpha., (0!, 1!, 2!, \dots)) &= 1 + \frac{(n-1)! \alpha.}{\Gamma(\alpha. + n)} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-i-1)\Gamma(\alpha. + i)}{\Gamma(i+1)} \\ &= 1 + \frac{(n-1)! \alpha.}{\Gamma(\alpha. + n)} \left\{ (n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\Gamma(\alpha. + i)}{\Gamma(i+1)} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\Gamma(\alpha. + i)}{\Gamma(i)} \right\} \\ &= 1 + \frac{(n-1)! \alpha.}{\Gamma(\alpha. + n)} \left\{ (n-1) \frac{\Gamma(n-1+\alpha.)}{\alpha. \Gamma(n-1)} - \frac{\Gamma(n-1+\alpha.)}{(\alpha.+1)\Gamma(n-2)} \right\} \\ &= 1 + \frac{(n-1)! \alpha.}{\Gamma(\alpha. + n)} \left\{ \frac{\Gamma(n+\alpha.)}{\alpha. (\alpha.+1)\Gamma(n-1)} \right\} \\ &= 1 + (n-1)/(\alpha.+1). \quad \square \end{aligned}$$

17

## ex) Quasi-Multinomial

- $\text{BellP}_J(n, \theta_1/\lambda, \theta_2/\lambda, \dots, \theta_J/\lambda, (1^0, 2^1, 3^2, \dots))$  is “Quasi-Multinomial (type 2)” (Consul and Mittal, 1977):

$$\mathbf{P}(F_J = \mathbf{f}_J) = \binom{n}{\mathbf{f}_J} \frac{1}{\theta. (\theta. + n\lambda)^{n-1}} \prod_{j=1}^J \theta_j (\theta_j + f_j \lambda)^{f_j - 1}, \quad \mathbf{f}_J \in \mathcal{F}_{|n, J}. \quad (7)$$

- Reparameterize (7) as  $\beta := \lambda/\theta. \geq 0, \pi_j = \theta_j/\theta., j \in [J]$ .
- Consul and Mittal (1977) derive

$$\mathbf{V}(F_j) = n\pi_j \left[ \left\{ \frac{(n-1)!}{1+n\beta} \sum_{i=2}^n \frac{\pi_j + i\beta}{(n-i)!} \left( \frac{\beta}{1+n\beta} \right)^{i-2} \right\} + 1 - n\pi_j \right]. \quad (8)$$

- Theorem 1 tells us that  $\pi$ 's can be separated in (8).

18

**Proposition 2** For  $\beta > 0$  eq. (8) can be rewritten as

$$V(F_j) = n\pi_j(1 - \pi_j)\phi(n, \beta^{-1}, (1^0, 2^1, 3^2, \dots)), \quad (9)$$

where

$$\phi(n, \beta^{-1}, (1^0, 2^1, 3^2, \dots)) = 1 + \frac{(n-1)!}{(\beta^{-1} + n)^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\beta^{-1}(\beta^{-1} + i)^{i-1}(n-i)^{n-i-1}}{i!(n-i-2)!}$$

**Proposition 3** When  $\mathbf{F}_J \sim \text{BellP}_J(n, \theta_1/\lambda, \theta_2/\lambda, \dots, \theta_J/\lambda, (1^0, 2^1, 3^2, \dots))$ ,

$$\text{Cov}(F_i, F_j | N = n) = -n\pi_i\pi_j\phi(n, \beta^{-1}, (1^0, 2^1, 3^2, \dots)).$$

## ベル多項式分布族による攪乱の安全性

- 攪乱に  $\text{BellP}_J(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J, \mathbf{w})$  を使うとして差分プライバシーを評価する。
- 対数尤度を  $\lambda_j$  で微分すると

$$(\log B_{f_j}(\lambda_j \mathbf{w}) - \log B_n(\lambda, \mathbf{w}))' = \frac{B'_{f_j}(\lambda_j \mathbf{w})}{B_{f_j}(\lambda_j \mathbf{w})} - \frac{B'_n(\lambda, \mathbf{w})}{B_n(\lambda, \mathbf{w})} \quad (10)$$

- これが全ての  $(\mathbf{f}, (\lambda_1, \dots, \lambda_J))$  について  $\epsilon$  以下なら差分プライベート。
- (10) 式の右辺第二項は  $\mathbf{f}$  の変化について定数なので第一項のみ書き下す：

$$\frac{B'_{f_j}(\lambda_j \mathbf{w})}{B_{f_j}(\lambda_j \mathbf{w})} = \frac{\sum_{k=0}^{f_j} k \lambda_j^{k-1} B_{f_j, k}(\mathbf{w})}{\sum_{k=0}^{f_j} \lambda_j^k B_{f_j, k}(\mathbf{w})}$$

- 分母と分子を比較すると  $k/\lambda_j$  が大きいほど上式は増加する。
- 従って  $\lambda_j$  が最も小さい  $j$  に  $n$  を全て配分した場合に (10) 式は最大化される。

**Theorem 2** Suppose that  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_j > 0$ ,  $w_j \geq 0$ ,  $j \in [J]$ . Write  $\underline{\lambda} = \min_j \lambda_j$ . Then  $\text{BellP}_J(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J, \mathbf{w})$  is  $\epsilon$ -DP if and only if

$$\frac{B'_n(\underline{\lambda}\mathbf{w})}{B_n(\underline{\lambda}\mathbf{w})} - \frac{B'_n(\lambda.\mathbf{w})}{B_n(\lambda.\mathbf{w})} \leq \epsilon. \quad (11)$$

**Corollary 2** Suppose that  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J \in \mathbb{N}$ ,  $p_j > 0$ ,  $j \in [J]$ ,  $\sum_{j=1}^J p_j = 1$ . Then  $\text{Multi}(n, \mathbf{p})$  is  $\epsilon$ -DP if and only if,  $\forall j$ ,

$$n(1/p_j - 1) \leq \epsilon. \quad (12)$$

- NB:  $B_n(\lambda, 0, 0, \dots) = \lambda^n$ .
- When cell probabilities are uniform, i.e., least unsafe, (12) reduces to  $n(J - 1) \leq \epsilon$ .
  - $\epsilon$  can never be small!

**Corollary 3** Suppose that  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_j > 0$ ,  $j \in [J]$ . Then  $\text{NegHyp}(n, \vec{\alpha})$  is  $\epsilon$ -DP if and only if

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{\underline{\alpha} + k} - \frac{1}{\alpha. + k} \right) \leq \epsilon. \quad (13)$$

- When  $\alpha./\underline{\alpha}$  is fixed at  $c$ , (13) reduces to

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{(c-1)\underline{\alpha}}{(\underline{\alpha} + k)(c\underline{\alpha} + k)} \right) \leq \epsilon.$$

– LHS  $\rightarrow 0$  as  $\underline{\alpha} \rightarrow \infty$ :  $\text{Multi}$

**Proposition 4** Suppose that  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_j > 0$ ,  $j \in [J]$ . Then for any positive  $\epsilon$ ,  $\text{NegHyp}(n, \vec{\alpha})$  is  $\epsilon$ -DP as  $\alpha. \rightarrow \infty$  where cell probabilities are fixed.

## Remarks

- 負の超幾何（＝多項ディリクレ混合）分布が差分プライベートという結果は、セッティングが違うが Machanavajjhala et al. (2008) と整合的。
- 多項分布は母数を deterministic に攪乱しても一般に差分プライベートに出来ない。
  - 負の超幾何分布は多項分布の母数を混合し stochastic に攪乱している。
  - deterministic な攪乱の不確実性は尤度に出ない。

## 差分プライベートの十分条件

- LHS of (11) is further written as

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sum_{k=0}^n k \lambda^{k-1} B_{n,k}(\mathbf{w}) B_n(\lambda \cdot \mathbf{w}) - \sum_{k=0}^n k \lambda^{k-1} B_{n,k}(\mathbf{w}) B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w})}{B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w}) B_n(\lambda \cdot \mathbf{w})} \\
 &= \frac{\sum_{k=0}^n k B_{n,k}(\mathbf{w}) \{ \lambda^{k-1} B_n(\lambda \cdot \mathbf{w}) - \lambda^{k-1} B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w}) \}}{B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w}) B_n(\lambda \cdot \mathbf{w})} \\
 &\leq \frac{\sum_{k=0}^n k B_{n,k}(\mathbf{w}) \{ \lambda^{k-1} B_n(\lambda \cdot \mathbf{w}) - \lambda^{k-1} B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w}) \}}{B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w}) B_n(\lambda \cdot \mathbf{w})} \\
 &\leq \frac{\sum_{k=0}^n n B_{n,k}(\mathbf{w}) \{ \lambda^{k-1} B_n(\lambda \cdot \mathbf{w}) - \lambda^{k-1} B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w}) \}}{B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w}) B_n(\lambda \cdot \mathbf{w})} \\
 &= \frac{n}{\lambda} \frac{B_n(\lambda \cdot \mathbf{w}) \{ B_n(\lambda \cdot \mathbf{w}) - B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w}) \}}{B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w}) B_n(\lambda \cdot \mathbf{w})} = \frac{n}{\lambda} \frac{\{ B_n(\lambda \cdot \mathbf{w}) - B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w}) \}}{B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w})}.
 \end{aligned}$$



**Proposition 5** Suppose that the conditions of Theorem 2 hold. Then  $\text{BellP}_J(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J, \mathbf{w})$  is  $\epsilon$ -DP if

$$\frac{n}{\lambda} \left( \frac{B_n(\lambda \cdot \mathbf{w})}{B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w})} - 1 \right) \leq \epsilon.$$

- When  $\lambda / \underline{\lambda}$  is fixed at  $c$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B_n(\lambda \cdot \mathbf{w})}{B_n(\underline{\lambda} \mathbf{w})} - 1 = \lim_{\underline{\lambda} \rightarrow \infty} \frac{(c\underline{\lambda})^n B_{n,n}(\mathbf{w}) + O(\underline{\lambda}^{n-1})}{\underline{\lambda}^n B_{n,n}(\mathbf{w}) + O(\underline{\lambda}^{n-1})} - 1 = (c^n - 1)$$

**Theorem 3** Suppose that  $n \in \mathbb{N}, J \in \mathbb{N}, \lambda_j > 0, w_j \geq 0, j \in [J]$ . Then for any positive  $\epsilon$ ,  $\text{BellP}_J(n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J, \mathbf{w})$  is  $\epsilon$ -DP as  $\lambda \rightarrow \infty$  where cell probabilities are fixed.

- When cell probabilities are fixed,  $\text{Multi}$  is unchanged as  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Proposition 6** Let  $\rho_j = \theta_j / \lambda$ . Then  $\text{QM}(n, \vec{\rho})$  is  $\epsilon$ -DP as  $\rho \rightarrow \infty$  where cell probabilities are fixed.

- $B_n(\rho(1^0, 2^1, \dots)) = \rho(\rho + n)^{n-1}$

## まとめ

- 本報告では匿名性を確保した内訳情報の作成方法を考察した。
- 総額がトップコーディングで与えられていても、内訳の比は意味がある。
- 公表する比の下一桁を四捨五入するなら、総和が1になるとは限らない。
- random rounding なら総和は必ず1になるし安全性も上昇。
- random part がベル多項式分布族なら不偏性は成立する。
- しかし random part が多項分布では差分プライベートにならない。
- ベル多項式分布は多項分布に近いところで差分プライベートになる。
  - セル確率が小さい時に多くのボールが配られるという珍しいイベントの確率が、セル確率の変化について感応的なら差分プライベートでない。

# 多次元時系列トレンド・季節性・ノイズの SIML 分析と公的データへの応用

国友直人

明治大学政治経済学部

2017 年 12 月

佐藤整尚・栗栖大輔・栗屋直 (東京大学経済学研究科) との共同研究  
Kunitomo-Sato(2017), Kunitomo-Awaya-Kurisu(2017) に基づく報告

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↻

## Outline

マクロ消費の状態推定問題

日次データの成分分解

月次マクロ指標の状態推定

マクロ SIML

非定常共通 1トレンド・モデルの場合

ガウス尤度・ML・SIML

推定の性質

漸近的性質

自己相関があるノイズの場合

季節成分の推定

まとめと課題

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↻

## 問題の発端

2016年-2017年「速報性のある包括的な消費関連指標の在り方に関する研究会」(統計局)を巡る議論の考察から佐藤整尚・栗栖大輔・栗屋直(東京大学大学院)の諸氏との共同研究へ発展。本日は主に研究動機、理論的考察(Kunitomo-Sato(2017), Kunitomo-Awaya-Kurusu(2017), 未定稿)、今後の展開などを議論する

統計局・研究会の概要は既に報告書「消費動向指数(CTI)に向けて」(統計局)でHP上に公開、CTIは近い将来に実用化される予定。

## 問題の発端

時間の経過とともに多数の経済時系列が観察されるが、伝統的には多くのマクロ経済時系列データの場合にはデータの収集上・作成上の理由などから月次系列、四半期系列、年次系列などの離散時間単位で計測、公表。近年では計測法、情報処理の利便性が高まり、月次よりも高頻度の観測データも得られる経済データも存在。従来より高頻度の時系列データが利用可能になるにつれ、市場動向の理解も進むと考えられるが、他方、経済時系列ではマクロ経済の大局的な動きにも関心があり、月次、四半期、年次の動きとの整合性も重要。



## 消費の日次データ

利用するデータは2000年1月から2016年10月までの約6000の日次データである。一般にはあまり知られていないが、総務省統計局では2000年から日次データの集計を開始しているが、一般には月次データ、四半期データを様々な用途で基礎的に消費データとして利用されている。日次2010.1.1から500個のデータ、月次2000.1-2016.12のデータ。

## 具体的事例2: 月次マクロ指標

マクロ経済データの場合には収集上・作成上の理由から日々の系列、月次系列、四半期系列、年次系列など様々な頻度と異なる時間的タイミングで計測され、公表。消費、投資、政府支出、輸出入など主要なマクロ時系列は調査や作成上の理由から相互に調整されて作成されていない。しかしマクロ経済の動向を理解、政策評価など行う立場からは望ましくない。また直近の状況を理解するためには早めのデータ作成が望ましいが、国全体のデータ作成には多くの情報が必要である。例えばGDPやその主要な項目は最速で四半期、数カ月後以降に公表される。後からより正確と思われるデータが利用可能となり、その結果として、公表した後に過去の公表数値が改訂されることも多い。直近に公表されている四半期データが直近で得られる月次系列などの情報と見かけ上で矛盾する事例もある。また日本の政府統計では担当部署が分かれていることで問題は複雑化。





消費系列への応用では最終消費系列  $y_{1t}$  を構成する需要側時系列を  $y_{2t}$ 、供給側時系列を  $y_{3t}$  として、線形関係 (あるいは共和分関係) を利用することで観測できない目的変数の月次系列のトレンドの状態推定の方法を考える。利用可能は四半期データと月次データの情報を有効に利用することで互いに矛盾のない状態推定を実現する必要がある。

この問題を解決するにはいくつかの統計的課題がある。

- (i) 非定常多次元時系列でのフィルタリング問題,
- (ii) 多次元時系列における季節性の処理 (i.e. 季節調整),
- (iii) 非定常多次元時系列での母数推定,
- (iv) 非定常多次元時系列における不完全観測におけるフィルタリング,

などが主な課題。逆にこうした問題について解決できれば様々な応用問題が解決できる。例えば現行の GDP 推計では季節調整系列の作成は整合的といえるか? などの問題 etc.

## 最適な状態推定の問題

1次元時系列が完全観測の場合には統計的フィルタリング法として X-12-ARIMA, DECOMP などがあり、季節調整などに応用されている。多次元時系列の場合は完全観測の場合においても実用的な統計的フィルタリング法は存在せず。

非定常状態変数に関係 (あるいは構造方程式) があるとき  $\text{rank}(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t')$  が確率的に  $p-1$  となり、時間的に変動するベクトル  $\beta_{x,t}$  が存在して  $\mathbf{x}_t' \beta_{x,t} = O_p(1)$  となるので考慮する必要がある。統計的フィルタリングでは係数ベクトル  $\beta_{x,t}$  に階数条件を用いて状態推定を行う必要がある。例えば完全観測の場合には尤度関数は初期条件  $\mathbf{Y}_0$  の下、母数  $\theta$  に対し

$$L_T(\theta) = \prod_{t=1}^T f(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \theta)$$

を利用する必要がある。(例えば DECOMP では hyper-parameter と呼んでいるが) 特に非定常多次元の場合には推定などは自明でない。

マクロ SIML 法のアイディアを簡単な設定で説明:

$y_{ij}$ : 第  $j$  変数の第  $i$  観測値

(時刻  $t_i^n$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, p$ ;  $0 = t_0^n \leq \dots \leq t_n^n = T$ )

しばしば  $n = T$ ,  $t_i^n - t_{i-1}^n = 1$ ,  $\mathbf{y}_i = (y_{1i}, \dots, y_{pi})'$ :  $p \times 1$  ベクトル,  $\mathbf{Y}_n = (\mathbf{y}_i')$  ( $= (y_{ij})$ ):  $n \times p$  観測行列,  $\mathbf{y}_0$ : 初期ベクトル.

非定常トレンド  $\mathbf{x}_i (= (x_{ji}))$  at  $t_i^n$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は観測ベクトルと同一ではない。季節要素  $\mathbf{s}_i = (s_{1i}, \dots, s_{pi})$ . ノイズ要素  $\mathbf{v}_i = (v_{1i}, \dots, v_{pi})$  とするが、簡単化のためにトレンドとは独立な系列と仮定.

## 加法分解モデル

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{s}_i + \mathbf{v}_i$$

ここで  $\mathbf{x}_i$  非定常トレンド要素,  $\mathbf{s}_i$  非定常季節要素, ノイズ要素は定常確率過程であり

$$\Delta^d \mathbf{x}_i = (1 - \mathcal{L})^d \mathbf{x}_i = \mathbf{w}_i^{(x)}$$

を満たす。ただし  $\mathcal{L}\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ ,  $\Delta = 1 - \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{E}(\mathbf{w}_i^{(x)}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathcal{E}(\mathbf{w}_i^{(x)} \mathbf{w}_i^{(x)'}) = \boldsymbol{\Sigma}_x$ ,

$$(1 + \mathcal{L} + \dots + \mathcal{L}^{s-1})^D \mathbf{s}_i = \mathbf{w}_i^{(s)}$$

$\mathcal{L}^s \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{i-s}$ ,  $\mathcal{E}(\mathbf{w}_i^{(s)}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathcal{E}(\mathbf{w}_i^{(s)} \mathbf{w}_i^{(s)'}) = \boldsymbol{\Sigma}_s$ ,

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{C}_j \mathbf{e}_{i-j},$$

ここで係数行列  $\mathbf{C}_j$  の要素の絶対値和は収束, i.i.d. 確率ベクトルは  $\mathcal{E}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}$ ,  $\mathcal{E}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i') = \boldsymbol{\Sigma}_e$  を満たす。



簡単化のためにここでは  $d = D = 1$  とおき、観測されない非定常確率変数の間には構造関係が存在する状況を考察すると、非定常変数誤差モデルになる。例えば  $\beta$   $p \times 1$  ベクトルとして構造関係  $\beta' \mathbf{y}_i = O_p(1)$  ( $i = 1, \dots, n$ )、あるいはより日本的に  $\mathbf{B}$   $q \times p$  ( $q \leq p$ ) 行列とすると、

$$\mathbf{B}\mathbf{y}_i = O_p(1) \quad (i = 1, \dots, n)$$

の推定問題を考察する。同様に季節要素間の関係

$$\mathbf{B}_s \mathbf{s}_i = O_p(1) \quad (i = 1, \dots, n).$$

を分析する必要がある。

この問題はトレンド・ベクトルや季節性・ベクトルの階数が退化する問題、したがって既存の統計的方法を拡張する必要がある。

ここでは議論を単純化して  $d = D = 1$ , 季節性がない場合 ( $\mathbf{s}_i = 0$ ) を考察する。さらに  $\Delta \mathbf{x}_i$  と  $\mathbf{v}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は独立、各要素はガウス分布  $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_x)$  および  $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_v)$  にしたがうとする。記号は  $n \times p$  行列  $\mathbf{Y}_n = (\mathbf{y}'_i)$ , であり  $np \times 1$  確率ベクトル  $(\mathbf{y}'_1, \dots, \mathbf{y}'_n)'$  の分布は初期ベクトル  $\mathbf{y}_0$  の下で

$$\text{vec}(\mathbf{Y}_n) \sim N_{n \times p} \left( \mathbf{1}_n \cdot \mathbf{y}'_0, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_v + \mathbf{C}_n \mathbf{C}'_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_x \right),$$







さらに  $\mathbf{b} = \sigma_\mu \boldsymbol{\pi}$ ,  $\mathbf{A} = a_{kn} \boldsymbol{\Sigma}_v$  および逆行列の公式（正定符号行列  $\mathbf{A}$ ）

$$|\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{b}'| = |\mathbf{A}|[1 + \mathbf{b}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}]$$

$$[\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{b}']^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}[1 + \mathbf{b}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}]^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{A}^{-1}$$

を利用する。（ $\boldsymbol{\Sigma}_x = \mathbf{b}\mathbf{b}'$ ）

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↻ 🔍 ↻

対数尤度関数  $L_n$  は

$$\begin{aligned} L_{1n} &= \sum_{k=1}^n \left[ \log |a_{kn} \boldsymbol{\Sigma}_v| + \log(1 + a_{kn}^{-1} \mathbf{b}' \boldsymbol{\Sigma}_v^{-1} \mathbf{b}) + a_{kn}^{-1} \mathbf{z}'_k \boldsymbol{\Sigma}_v^{-1} \mathbf{z}_k \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_{kn}^{-1} (\mathbf{z}'_k \boldsymbol{\Sigma}_v^{-1} \mathbf{b})^2}{a_{kn} + \mathbf{b}' \boldsymbol{\Sigma}_v^{-1} \mathbf{b}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \log |a_{kn} \boldsymbol{\Sigma}_v| + \sum_{k=1}^n a_{kn}^{-1} \mathbf{z}'_k \boldsymbol{\Sigma}_v^{-1} \mathbf{z}_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left[ \log(1 + a_{kn}^{-1} c) - \frac{a_{kn}^{-1} (\mathbf{z}'_k \boldsymbol{\Sigma}_v^{-1} \mathbf{b})^2}{a_{kn} + c} \right], \end{aligned}$$

に反比例する。ここで

$$c = \sigma_\mu^2 \boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{\Sigma}_v^{-1} \boldsymbol{\pi}.$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↻ 🔍 ↻

ただしベクトル  $\boldsymbol{\pi}$  には基準化が必要、ML 推定量  $\boldsymbol{\pi}$  は二次元でも複雑なかいとなるが、ここでは  $\boldsymbol{\beta}' = (1, -\beta_2')$  としておく。



$$\left[ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{x.SIML} - \lambda \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{v.SIML} \right] \hat{\boldsymbol{\beta}}_{SIML} = \mathbf{0},$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{x.SIML} = \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k',$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{v.SIML}(1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k' - \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{x.SIML} \right],$$



あるいは

$$\hat{\Sigma}_{v.SIML}(2) = \frac{1}{l_n} \sum_{k=n+1-l_n}^n a_{kn}^{-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}'_k - \frac{1}{4} \hat{\Sigma}_{x.SIML},$$

ただし

$$\mathbf{z}_n = (\mathbf{z}'_k) = \mathbf{P}_n \mathbf{C}_n^{-1} (\mathbf{Y}_n - \mathbf{1}_n \bar{y}'_0),$$

$\hat{\Sigma}_{v.SIML}$  を SIML 推定量 ( $\Sigma_v$ ) と呼ぶが、 $\lambda$  は固有値である。

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ◻ ◻ ◻

行列  $\Sigma_x$  の階数は退化して 1 であるから最小固有値  $\lambda_1$  をとると、 $\hat{\beta}_{SIML}$  は  $\beta$  の SIML 推定量となる。より簡単な推定量は

$$\hat{\Sigma}_{x.SIML} \times \hat{\beta}_{SIML} = \mathbf{0},$$

すなわち

$$\hat{\Sigma}_{x.SIML} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -\hat{\beta}_{2.SIL} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

解けば

$$\hat{\beta}_{2.SIL} = \hat{\Sigma}_{22x.SIML}^{-1} \hat{\Sigma}_{21x.SIML},$$

となり一種の最小二乗推定量となる。

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ◻ ◻ ◻

# ガウス尤度

トレンド+ノイズの二次元非定常時系列の尤度関数 (二次元 DECOMP モデル) の挙動を考察

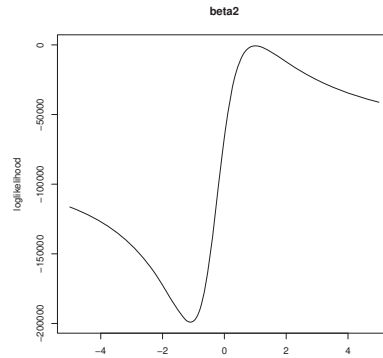


Figure 1 : Likelihood Function of  $\beta_2$  ( $n = 1,000$ )

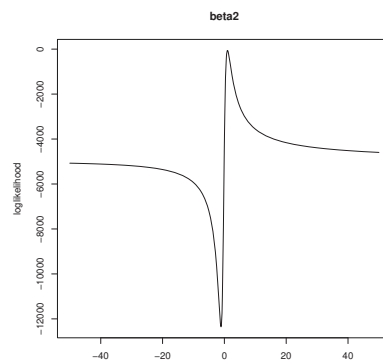


Figure 2 : Likelihood Function of  $\beta_2$  ( $n = 1,000$ )





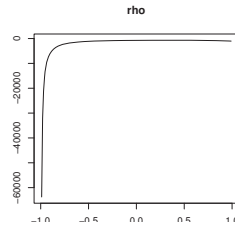


Figure 3 : Likelihood Function of  $\rho$  ( $n = 1,000$ )

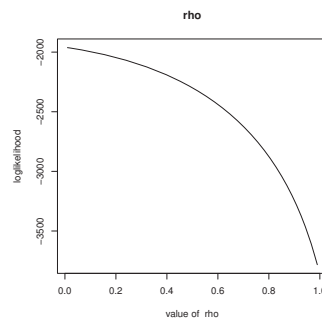


Figure 4 : Wrong Likelihood Function of  $\rho$  ( $n = 1,000$ )

## 二次元非定常モデルの最尤推定と SIML 推定の漸近的性質

**Theorem 4.2 (KAK 2017)** : Assume that  $\mathbf{v}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) are a squence of i.i.d. random vectors and  $|\boldsymbol{\Sigma}_v| \neq 0$ . Then under the assumption of Gaussian distributions the maximum likelihood estimator of  $\boldsymbol{\beta}$  is consistent as  $n \rightarrow \infty$ .

**Theorem 4.3 (KS 2017)** : Assume the non-stationary errors-in-variables model and  $|\boldsymbol{\Sigma}_v| \neq 0$ . Then under the assumption of existence of fourth order moments the SIML estimator of  $\boldsymbol{\beta}$  is consistent as  $n \rightarrow \infty$ .

なお SIML 推定量の漸近正規性も示せるが省略する (KS(2017).)



小さな相関を無視  $O(n^{-1})$  できるので、基準関数は

$$L_n^{(SI)} = \sum_{k=1}^n \log |a_{kn}^* \boldsymbol{\Sigma}_v + a_{kn}^{(s)} \boldsymbol{\Sigma}_s + \boldsymbol{\Sigma}_x|^{-1/2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbf{z}'_k [a_{kn}^* \boldsymbol{\Sigma}_v + a_{kn}^{(s)} \boldsymbol{\Sigma}_s + \boldsymbol{\Sigma}_x]^{-1} \mathbf{z}_k,$$

ただし  $a_{kn}^*$  は

$$a_{kn}^{(s)} = 4 \frac{\sin^4 \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{2k-1}{2n+1} \right) \right]}{\sin^2 \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{2k-1}{2n+1} s \right) \right]} \quad (k = 1, \dots, n).$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↻

季節性を含むとき次の結果が得られる。

**Theorem 5.1** : In the new setting with  $N, s, n (= Ns)$  (positive integers), we assume the moment conditions on the seasonal components as  $\mathcal{E}[w_{ig}^{(s)4}] < \infty$ .

For  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_x$ , we have

(i) For  $m_n = [n^\alpha]$  and  $0 < \alpha < 1$ , as  $n \rightarrow \infty$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_x - \boldsymbol{\Sigma}_x \xrightarrow{p} \mathbf{0}.$$

(ii) For  $m_n = [n^\alpha]$  and  $0 < \alpha < 0.8$ , as  $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{m_n} \left[ \hat{\sigma}_{gh}^{(x)} - \sigma_{gh}^{(x)} \right] \xrightarrow{\mathcal{L}} N \left( 0, \sigma_{gg}^{(x)} \sigma_{hh}^{(x)} + \left[ \sigma_{gh}^{(x)} \right]^2 \right).$$

The covariance of the limiting distributions of  $\sqrt{m_n} [\hat{\sigma}_{gh}^{(x)} - \sigma_{gh}^{(x)}]$

and  $\sqrt{m_n} [\hat{\sigma}_{kl}^{(x)} - \sigma_{kl}^{(x)}]$  is given by

$$\sigma_{gk}^{(x)} \sigma_{hl}^{(x)} + \sigma_{gl}^{(x)} \sigma_{hk}^{(x)} \quad (g, h, k, l = 1, \dots, p).$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↻

季節要素の分散共分散行列  $\Sigma_s = (\sigma_{gh}^{(s)})$  は推定量  $\hat{\Sigma}_s = (\hat{\sigma}_{gh}^{(s)})$ , を用いるが、ここで

$$\hat{\Sigma}_{s, SIML} = \frac{1}{m_n} \sum_{k \in I_n^{(s)}} a_{kn}^{(s)-1} \mathbf{z}_k \mathbf{z}_k',$$

ただし  $s$  季節整数,  $[x]$  ガウス記号,  $I_n^{(s)}$  は集合

$I_{1n}^{(s)} = \{[2n/s] + 1, \dots, [2n/s] + m_n\}$  ただし

$m_n = [n^\alpha]$  ( $0 < \alpha < 1$ ). あるいは

$I_{2n}^{(s)} = \{[2n/s] - [m_n/2], \dots, [2n/s], \dots, [2n/s] + [m_n/2]\}$  を用いても良い。

ここで  $[2n/s]$  は季節数端数に対応する。 ( $s = 4, s = 12.$ )

ここでトレンド・季節性・観測誤差間には

$$\mathcal{E}[\mathbf{z}_k \mathbf{z}_k'] = \Sigma_x + a_{kn}^{(s)} \Sigma_s + a_{kn}^* \Sigma_v.$$

したがって

$$\mathcal{E}[a_{kn}^{(s)-1} \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i'] = \Sigma_s + a_{kn}^{(s)-1} \Sigma_x + \frac{a_{kn}^*}{a_{kn}^{(s)}} \Sigma_v.$$



# 文献

- ▶ Kitagawa, G. (2010), *Introduction to Time Series Modeling*, CRC Press.
- ▶ Anderson, T.W. (1984), "Estimating Linear Statistical Relationships," *Annals of Statistics*, 12, 1-45.
- ▶ Johansen, S. (1995), *Likelihood Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford UP.
- ▶ Kunitomo, N, S. Sato, and D. Kurisu (2017), *Separating Information Maximum Likelihood Method for High-frequency Financial Data*, Springer, in preparation.
- ▶ Kunitomo, N, and S. (2008), "Separating Information Maximum Likelihood Estimation in of Realized Volatility and Covariance with Micro-Market Noise," Discussion Paper CIRJE-F-581, (<http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research/dp/2008>), also in *North American Journal of Economics and Finance* (2013).
- ▶ Kunitomo, N. and S. Sato (2017), "Trend, Seasonality and Economic Time Series : the Non-stationary Errors-in-variables Models," DP(SDS-4), MIMS, Meiji University, (<http://www.mims.meiji.ac.jp/publications/datascience.html>)
- ▶ Kunitomo, N., N. Awaya and D. Kurisu (2017), "Some Properties of Estimation Methods for Structural Relationships in Non-stationary Errors-in-Variables Models," DP(SDS-3), MIMS, Meiji University.