

# 経済リスクの統計学の新展開 ： 稀な事象と再起的事象 2016<sup>1</sup>

国友直人<sup>2</sup> & 大森裕浩<sup>3</sup>  
(共編)

2017年1月

<sup>1</sup>文部科学省・科学研究費プロジェクト「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再起的事象」(2013年度～2016年度)が2016年12月22日に東京大学経済学研究科小島ホールにおいて開催した研究集会における講演をまとめたものである。

<sup>2</sup>明治大学政治経済学部

<sup>3</sup>東京大学経済学部

# 概要

日本では2011年3月に発生した東日本大震災を一つの契機に「通常の常識では起こりにくいと思われる事象」についてのリスク解析や対策の重要性についての認識が高まっている。経済・社会における近年の現象でも2008年に起きたリーマンショック・経済危機、2011年頃から顕在化しているヨーロッパ諸国の金融危機なども我々が暮らしている国際的な経済社会においては、従来の議論ではほとんど考慮されていない経済変動の例である。こうした事前には予想が困難で無視されてきた事象、自然災害、経済変動の中でも実際に起きると大きな影響のある不確実な事象を科学的に理解し、有効な対策を考察する研究が必要であり重要である。

研究プロジェクト「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再起的事象」では近年の日本など現代の経済・社会の理解にとって重要になっている「きわめて稀に起きる事象」と「しばしば起きる事象」の評価・分析法について研究する予定である。「稀な事象」に関わる経済リスクの分析という課題について理論的・実証的な観点から分析することにより、科学的根拠にもとづいた経済・社会における「経済リスクの分散化」という方策、公共的政策のあり方の提案することが目標である。近年に特に関心が高まっている「従来の常識では希にしか起きない、無視できると見なされる事象」と「ときどき経済・社会では起きると見なされる現象」の科学的解析を柱に、確率論・統計学と経済学・金融（ファイナンス・保険）における既存の理論と現実の乖離、新しい数理的理論の構築と応用、新しい数理的理論を踏まえた「経済リスクの解析と分散化の方策」についての研究活動を行った。この研究プロジェクトでは経済リスクを(i)社会・人口リスク、(ii)自然災害と極端な事象のリスク、(iii)経済・金融・保険の対象となるリスク、に関連した3つの領域の経済リスクに分類し、リスクに係わる問題と相互に関わる総合的問題という二つの方向から問題を理論的に解明し、総合的な研究をふまえた経済リスクの科学的制御・管理の方策を検討した。また確率論・統計学など数理科学の関係者、さらに金融（ファイナンス）の関係者を交え、現代の社会・経済においては重要ではあるが、既存の研究分野では十分に取り上げられなかった研究課題についての共同研究を行った。

研究プロジェクトの最終年度における研究集会では、経済リスクの統計学を巡るさまざまなトピックについて報告が行われたが、それぞれの研究報告が「経済リスクの統計学の展開」の一助になることを期待する。

2017年1月  
編者

# 研究集会・プログラム

科学研究プロジェクト「経済リスクの統計学の新展開：希な事象と再帰的事象」

日程：2016年12月22日(木)

会場：東京大学経済学部小島ホール1階

オーガナイザー：国友直人・大森裕浩

<セッションI：金融市場の統計分析>

Chair: 大屋幸輔

13:00~13:40 「Dynamics of Integration in East Asian Equity Markets」 Tatsuyoshi Okimoto (Australian National University)

13:40~14:20 「Simultaneous multivariate point process models with an application to causality analysis of financial markets」 国友直人・栗栖大輔・天野裕介・粟屋直

<休憩>

<セッションII：経済リスクの統計的基礎>

Chair: 大森裕浩

14:25~15:05 「On Greeks」 楠岡成雄

15:05~15:40 「On rare events」 Tomoyuki Ichiba (University of California, Santa-Barbara)

15:45~16:15 「Discretization of Self-Exciting Peaks Over Threshold Models」 栗栖大輔

<休憩>

<セッションIII：保険リスクと統計学>

Chair: 川崎能典

16:20~17:00 「Dynamic risk measures for stochastic asset processes from ruin theory」 清水泰隆

17:00~17:40 「日本人の寿命 -過去・現在・未来-」 田中周二・長谷川敏彦・伊藤憲祐

# Dynamics of Integration in East Asian Equity Markets

Tadaaki Komatsubara\*

Tatsuyoshi Okimoto†

Ken-ichi Tatsumi‡

\*Ibbotson Associates Japan, Inc.

†Crawford School of Public Policy, Australian National University  
Research Institute of Economy, Trade and Industry (RIETI)

‡Faculty of Economics, Gakushuin University

December 22, 2016

Conference at Tokyo University

# Motivations

- ① Correlations in international financial markets have profound implications on
  - ① Asset allocation
  - ② Risk management
  - ③ Policy making
- ② Understanding the correlations in international equity markets is not be easy due to the time variation
- ③ Analyzing the correlation dynamics in international equity markets is an important issue

# Motivations

- ④ Number of previous studies investigate the correlation dynamics in international equity markets
  - ① Longin and Solnik (1995, JIMF)
  - ② Berben and Jansen (2005, JIMF)
  - ③ Bekaert, Hodrick, and Zhang (2009, JF)
  - ④ Christoffersen, Errunza, Jacobs and Langlois (2012, RFS)
  - ⑤ Okimoto (2014, JBF)
- ⑤ Few studies focus on the East Asian equity markets

# Contributions

- ① Examines the dynamics of correlation (integration) in East Asian Equity Markets
- ② East Asian equity markets open at almost the same time
- ③ Decompose equity returns into two returns
$$RCC_t = RCO_t + ROC_t$$
- ④ Investigate the extent to which returns contribute more to the changes in integration

# Main results

- ① No international integration in the East Asian equity market around 1995
- ② China-related pairs' international integration increased significantly after 2007
- ③ Integration for the pairs excluding China increased significantly between 1998 and 2001
- ④ Increase in integration is largely attributable to after-trading-hours returns
- ⑤ Effects of international asset allocation in East Asian markets are vastly reduced



# Marginal model for each country

- ①  $r_{it}$ : stock return for country  $i$
- ② Model conditional expectation of  $r_{it}$  with AR(2) model
- ③ Also try VAR model, but past returns of other countries have little effects
- ④ Model conditional variance of  $r_{it}$  with GARCH(1,1) model

$$⑤ \begin{cases} r_{it} = c_i + \phi_{i1}r_{i,t-1} + \phi_{i2}r_{i,t-2} + u_{it} \\ u_{it} = \sqrt{h_{ii,t}}\varepsilon_{it}, \\ h_{ii,t} = \omega_i + \alpha_i u_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{ii,t-1}, \end{cases}$$

# Conditional Correlation Model

- ①  $\mathbf{u}_t = (u_{1t}, u_{2t}, \dots, u_{nt})'$ : vector of disturbance of each country
- ② Assume  $\mathbf{u}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{v}_t$ ,  $\mathbf{v}_t \sim \text{iid } N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_M)$
- ③  $\mathbf{H}_t$ : conditional variance-covariance matrix of  $\mathbf{r}_t = (r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{nt})'$
- ④  $\mathbf{H}_t$  can be decomposed as  $\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t$
- ⑤  $\mathbf{D}_t = \text{diag}(h_{11,t}, \dots, h_{nn,t})^{1/2}$
- ⑥  $\mathbf{R}_t$ : conditional correlation of  $\mathbf{r}_t$
- ⑦ Use smooth transition correlation (STC) model to analyze the long-run trends in  $\mathbf{R}_t$

# STC model

- ① Developed by Teräsvirta (1994, JASA) in the AR framework
- ② Applied to the time-varying correlation model
  - ① Berben and Jansen (2005, JIMF): Equity
  - ② Kumar and Okimoto (2011, JBF): Bond
  - ③ Ohashi and Okimoto (2016, JCOM): Commodity
- ③  $\mathbf{R}_t = (1 - G(s_t; \gamma, c))\mathbf{R}^{(1)} + G(s_t; \gamma, c)\mathbf{R}^{(2)}$
- ④ One of the regime switching models
  - ① Regime 1:  $G = 0 \implies \mathbf{R}_t = \mathbf{R}^{(1)}$
  - ② Regime 2:  $G = 1 \implies \mathbf{R}_t = \mathbf{R}^{(2)}$
- ⑤  $\mathbf{R}_t$  takes the value between  $\mathbf{R}^{(1)}$  and  $\mathbf{R}^{(2)}$  depending on  $G(s_t; \gamma, c)$

# STC model

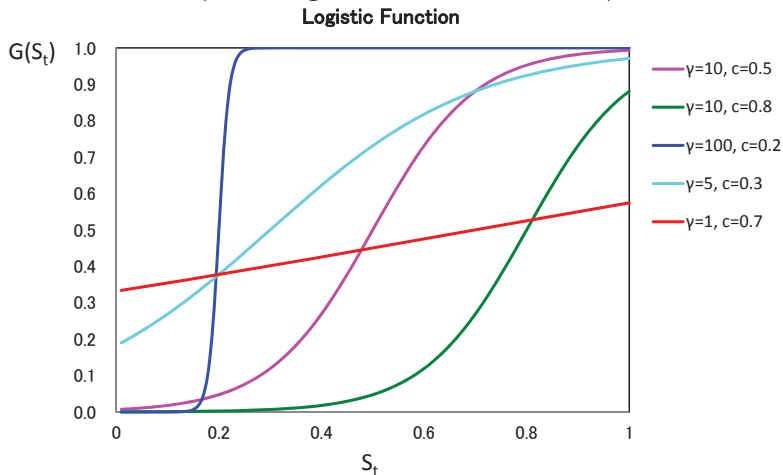
- ⑥ Transition function  $G(s_t; c, \gamma)$  is expressed by a logistic function  $G(s_t; c, \gamma)$

$$G(s_t; c, \gamma) = \frac{1}{1 + \exp(-\gamma(s_t - c))}, \quad \gamma > 0$$

- ①  $s_t$  : transition variable
  - ②  $c$ : location parameter
  - ③  $\gamma$ : smoothness parameter
- ⑦ Adopt  $s_t = t/T$  as a transition variable to capture dominant trends (Lin and Teräsvirta, 1994, JoE)
- ①  $\mathbf{R}^{(1)}$ :  $\mathbf{R}$  around the beginning of the sample
  - ②  $\mathbf{R}^{(2)}$ :  $\mathbf{R}$  around the end of the sample

# STC model

- ⑧ Can describe a wide variety of patterns of regime transition depending on the values of  $\gamma$  and  $c$



## STC model

- 9 Can extend to the three state STC model

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{R}^{(1)} + G_1(s_t; \gamma_1, c_1)(\mathbf{R}^{(2)} - \mathbf{R}^{(1)}) \\ + G_2(s_t; \gamma_2, c_2)(\mathbf{R}^{(3)} - \mathbf{R}^{(2)})$$

- 10 Assume  $0.05 \leq c_1 < c_2 \leq 0.95$  to detect the correlation transition within the sample period

- 11  $\mathbf{R}_t$  changes from  $\mathbf{R}^{(1)}$  via  $\mathbf{R}^{(2)}$  to  $\mathbf{R}^{(3)}$  with time

- 12  $\gamma_i$  and  $c_i$  as well as  $\mathbf{R}^{(i)}$  are estimated from the data

- 13 Can select the best pattern for the long-run trends in integration in East Asian Equity markets

- 14 Can examine the increasing integration by testing the null of  $r_{ij}^{(k)} = r_{ij}^{(k+1)}, \forall i \neq j, k = 1, 2$

# Data

- ① Sample period: from Jan 1995 to Jan 2013
- ② Opening and closing price of stock index for four East Asian countries (CH, HK, JP, KR)
  - ① Shanghai Stock Exchange Composite Index (SSEC)
  - ② Hang Seng Index (HSI)
  - ③ Nikkei Stock Average 225 Index (Nikkei225)
  - ④ Korea Composite Stock Price Index (KOSPI)
- ③ Korean market was open on Saturday until 1998
- ④ Obtain qualitatively similar results using data after 1998

# Decomposition of equity returns

- ① East Asian equity markets open at almost the same time
- ② Define three returns to examine the extent to which returns contribute more to the changes in integration
- ③ Equity returns: close-to-close returns or RCC

$$RCC_t = \log PC_t - \log PC_{t-1}$$

- ④ Trading-hours returns: open-to-close returns or ROC

$$ROC_t = \log PC_t - \log PO_t$$

- ⑤ After-trading-hours returns: close-to-open returns or RCO

$$RCO_t = \log PO_t - \log PC'_{t-1}$$



# Decomposition of equity returns

- ⑥ Decomposition of equity returns

$$\begin{aligned}
 RCC_t &= \log PC_t - \log PC_{t-1} \\
 &= \log PC_t - \log PO_t + \log PO_t - \log PC_{t-1} \\
 &= RCO_t + ROC_t
 \end{aligned}$$

- ⑦ Examine the extent to which returns contribute more to the changes in integration in East Asian markets
- ⑧ Many days when the data for the four countries cannot be obtained for daily data
- ⑨ Calculate weekly returns by summing the returns for one week from the closing price of the Wednesday
- ⑩ Decomposition is still valid for weekly returns

# Results for equity returns

## ① Estimation results

		CH-HK	CH-JP	CH-KR	HK-JP	HK-KR	JP-KR
Regime 1	Estimate	-0.283	-0.078	-0.210	0.006	0.005	-0.193
	Std. Error	0.248	0.137	0.185	0.212	0.261	0.276
Regime 2	Estimate	0.419	0.222	0.262	0.619	0.723	0.662
	Std. Error	0.047	0.043	0.048	0.030	0.031	0.030
Test of equality	Wald stat	6.44	3.51	4.92	7.17	6.43	8.56
	P-value	0.011	0.061	0.027	0.007	0.011	0.003

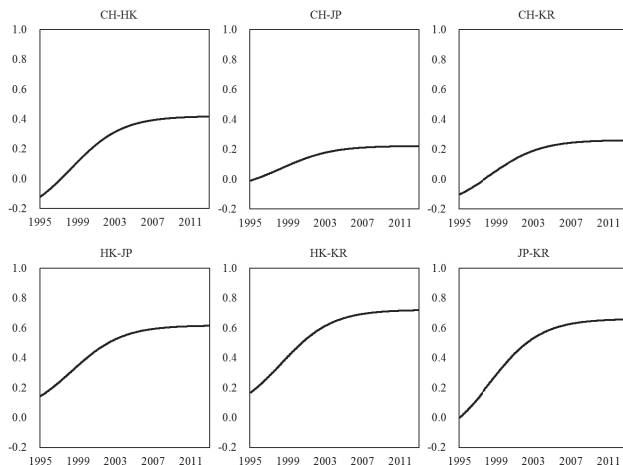
# Results for equity returns

- ② Correlations in regime 1 are generally low
  - ① Average:  $-0.125$
  - ② Max:  $0.006$  (HK-JP pair)
  - ③ Min:  $-0.283$  (CH-HK pair)
- ③ No significant correlation exists for any country pairs
- ④ No international integration in the East Asian equity market around the year 1995

# Results for equity returns

- ⑤ Correlations in regime 2 are significantly positive for all pairs
  - ① Average: 0.485
  - ② Max: 0.723 (HK-KR pair)
  - ③ Min: 0.222 (CH-JP pair)
- ⑥ Correlations in regime 2 are uniformly higher than those in the first regime
- ⑦ International integration has increased in recent years
- ⑧ When and how has the international integration of equity returns in East Asian equity markets increased?

# Results for equity returns



- 9 International integration in East Asian equity markets increased greatly between 1995 and 2003

# Results for trading-hours returns

## ① Estimation results

		CH-HK	CH-JP	CH-KR	HK-JP	HK-KR	JP-KR
Regime 1	Estimate	-0.287	0.075	-0.127	-0.015	0.040	-0.239
	Std. Error	0.320	0.105	0.162	0.182	0.203	0.364
Regime 2	Estimate	0.287	0.069	0.127	0.308	0.381	0.459
	Std. Error	0.047	0.044	0.051	0.039	0.038	0.044
Test of equality	Wald stat	2.771	0.002	1.885	2.656	2.462	3.417
	P-value	0.096	0.962	0.170	0.103	0.117	0.065

# Results for trading-hours returns

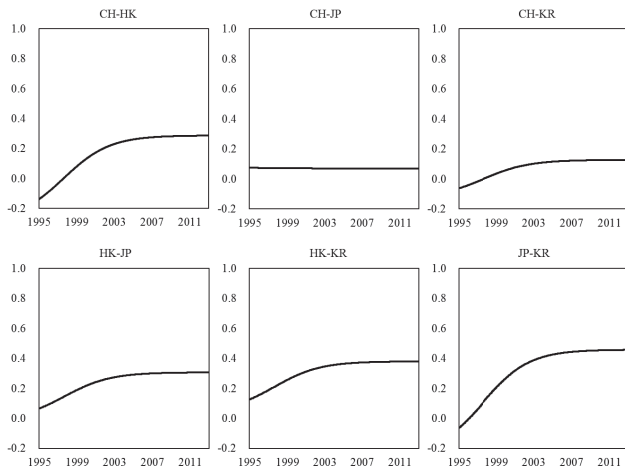
- ② Correlations in regime 1 are generally low
  - ① Average:  $-0.092$
  - ② Max:  $0.076$  (CH-JP pair)
  - ③ Min:  $-0.287$  (CH-HK pair)
- ③ No significant correlation exists for any country pairs
- ④ No international integration in the East Asian equity market around the year 1995

# Results for trading-hours returns

- ⑤ Correlations in regime 2 are significantly positive for all pairs except CH-JP pair
  - ① Average: 0.272
  - ② Max: 0.459 (JP-KR pair)
  - ③ Min: 0.06 (CH-JP pair)
- ⑥ Correlations in regime 2 become higher for CH-HK and JP-KR pairs
- ⑦ International integration has increased in recent years, but not much compared to equity returns



# Results for trading-hours returns



- ⑨ Correlation has increased greatly between 1995 and 2003 for CH-HK and JP-KR pairs

# Results for after-trading-hours returns

## ① Estimation results

		CH-HK	CH-JP	CH-KR	HK-JP	HK-KR	JP-KR
Regime 1	Estimate	-0.082	-0.158	-0.142	0.558	0.334	0.298
	Std. Error	0.062	0.066	0.060	0.047	0.114	0.119
Regime 2	Estimate	0.519	0.456	0.450	0.723	0.832	0.798
	Std. Error	0.106	0.103	0.116	0.023	0.024	0.026
Test of equality	Wald stat	28.57	33.10	22.60	8.90	19.55	17.33
	P-value	0.000	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000

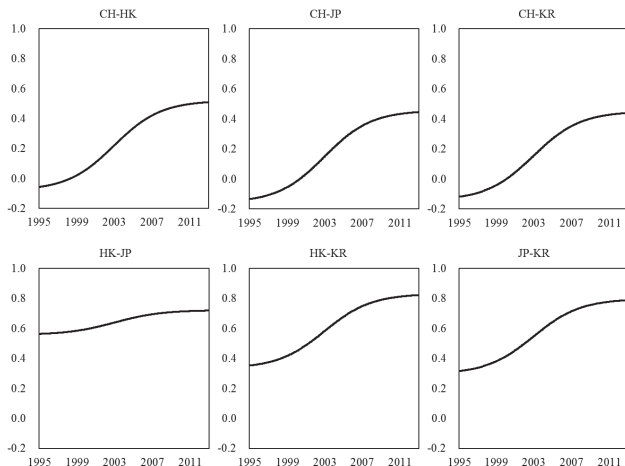
# Results for after-trading-hours returns

- ② Correlations in regime 1 are low for China-related pairs and relatively high for other pairs
  - ① Average: 0.135
  - ② Max: 0.558 (HK-JP pair)
  - ③ Min:  $-0.158$  (CH-JP pair)
- ③ Significant negative correlation for the CH-JP and CH-KR pairs
- ④ Positive significant correlation for all pairs that do not include China

# Results for after-trading-hours returns

- ⑤ Correlations in regime 2 are significantly positive for all pairs
  - ① Average: 0.630
  - ② Max: 0.832 (HK-KR pair)
  - ③ Min: 0.450 (CH-KR pair)
- ⑥ Correlations in regime 2 are uniformly higher than those in the first regime
- ⑦ International integration has increased in recent years

# Results for after-trading-hours returns



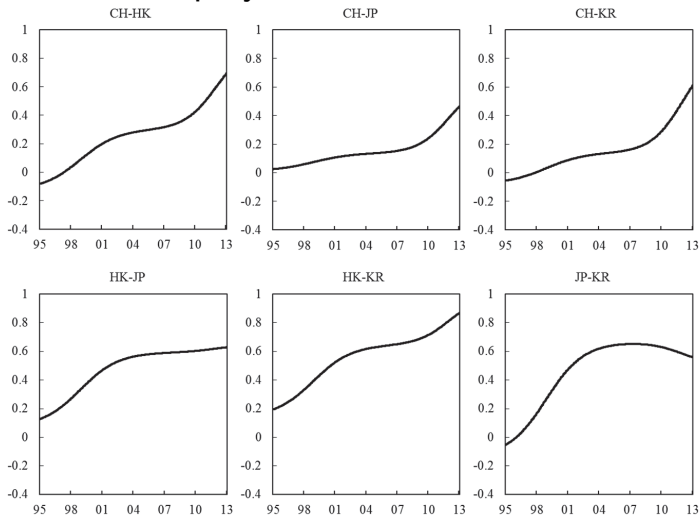
- 9 Increase in integration of equity returns in East Asian equity markets is largely attributable to RCO

# Results of three-regime STC model

- ① Results so far are based on the two-regime assumption
- ② Assume a monotonic trend in the international integration of East Asian equity markets
- ③ Estimate the three-regime STC model to assess the possible non-monotonic trend
- ④ Results are qualitatively same as those of the two-regime model
- ⑤ China-related pairs international integration increased significantly after 2007
- ⑥ Integration for the pairs excluding China increased significantly between 1995 and 2001

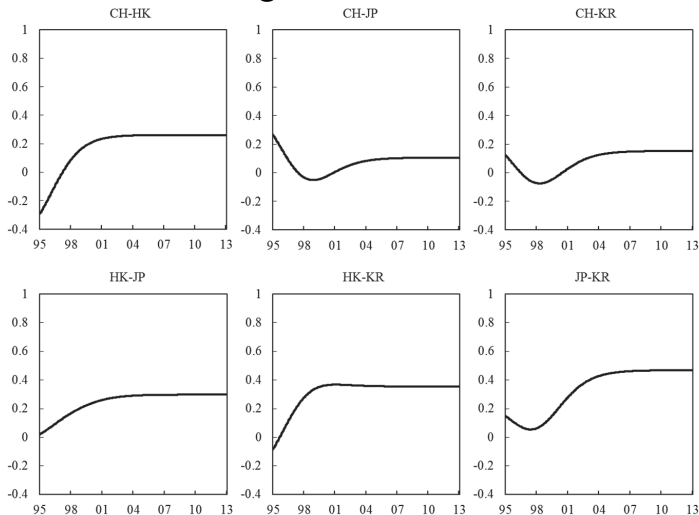
# Results of three-regime STC model

## 7 Dynamics of equity return correlation



# Results of three-regime STC model

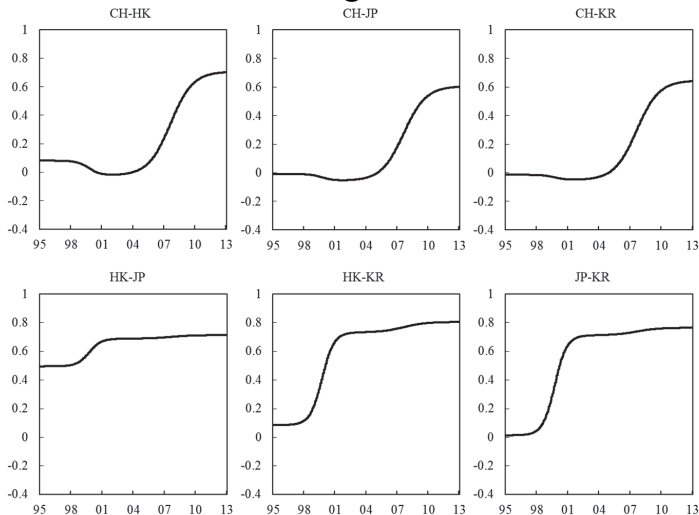
## ⑧ Dynamics of trading-hours return correlation





# Results of three-regime STC model

## 9 Dynamics of after-trading-hours return correlation

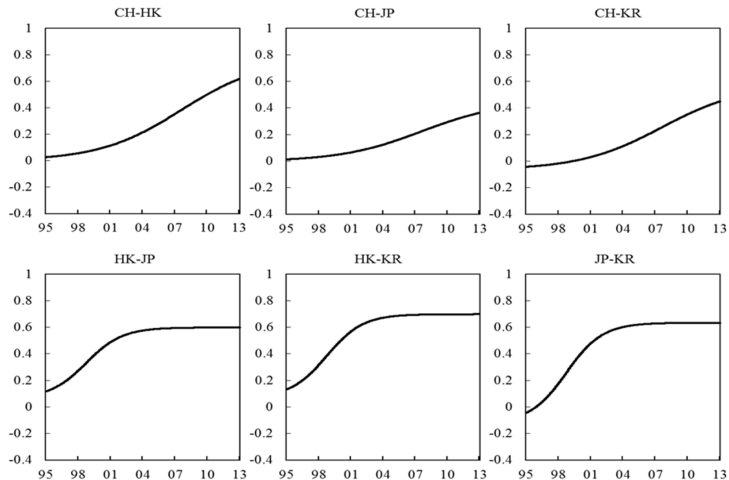


# Results of constrained three-regime STC model

- ① Difference between China-related pairs and pairs excluding China in terms of the timing of the increase in international integration
- ② Impose constraints on the three-regime STC model
  - ①  $r_{ij}^{(1)} = r_{ij}^{(2)}$  for China-related pairs
  - ②  $r_{ij}^{(2)} = r_{ij}^{(3)}$  for pairs excluding China
- ③ China-related pairs' international integration increased significantly after 2007
- ④ Integration for the pairs excluding China increased significantly between 1998 and 2001
- ⑤ Increase in integration is largely attributable to after-trading-hours returns

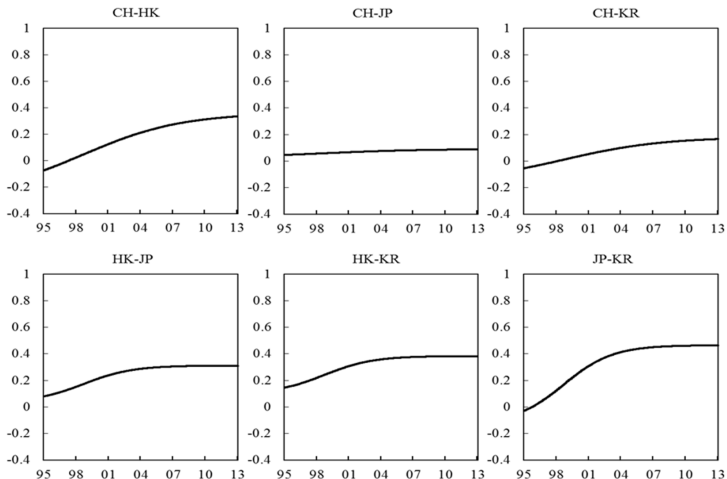
# Results of constrained three-regime STC model

## ⑥ Dynamics of equity return correlation



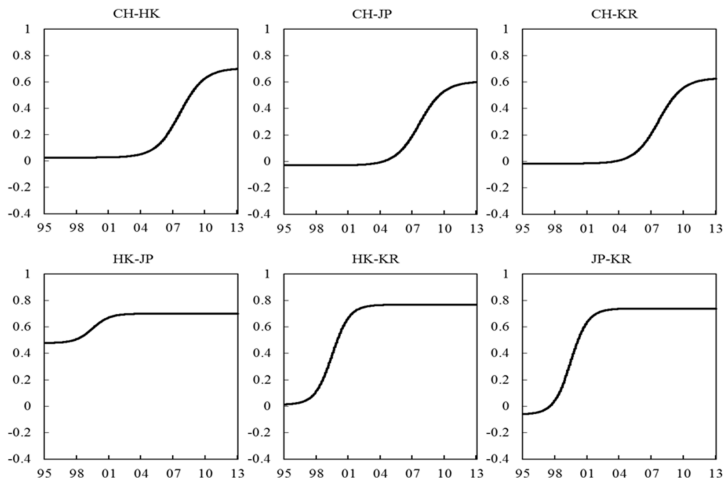
# Results of constrained three-regime STC model

## 7 Dynamics of trading-hours return correlation



# Results of constrained three-regime STC model

## ⑧ Dynamics of after-trading-hours return correlation



# Possible reasons for increase in integration

- ① More aggressive investments by foreign investors
- ② China-related pairs' international integration increased significantly after 2007
  - ① Circulation problem of non-tradable shares
  - ② Split-share structure (non-tradable share) reform has been implemented since April 2005
  - ③ 98% of listed companies had implemented reforms by the end of 2006
- ③ Integration for the pairs excluding China increased significantly between 1998 and 2001
  - ① Letup in the Asian currency crisis
  - ② Deregulation of the equity market in South Korea
  - ③ Reform of the equity market exchange in HK

# Impact on diversified investment

- Examines the impact of the increase in international integration on asset allocation
- Calculate the weights for the minimum variance portfolio based on the correlation in 1995 and 2013

		CH	HK	JP	KR
Equity returns	1995	0.242	0.210	0.346	0.202
	2013	0.287	0.118	0.595	0.000
Trading-hours returns	1995	0.222	0.284	0.297	0.197
	2013	0.232	0.294	0.390	0.085
After-trading-hours returns	1995	0.250	0.024	0.538	0.188
	2013	0.073	0.000	0.927	0.000

# Impact on diversified investment

- ③ Effects of international asset allocation are vastly reduced for equity returns and after-trading-hours returns
- ④ International asset allocation still has a slight effect on trading-hours returns
- ⑤ Investing in each country's leading index is not enough to get diversification effects
- ⑥ Important to consider further diversification, such as industrial sector diversification



# Conclusion

- ① Examine the dynamics of correlation (integration) in East Asian Equity Markets
- ② No international integration in the East Asian equity market around 1995
- ③ China-related pairs' international integration increased significantly after 2007
- ④ Integration for the pairs excluding China increased significantly between 1998 and 2001
- ⑤ Increase in integration is largely attributable to after-trading-hours returns
- ⑥ Effects of international asset allocation in East Asian markets are vastly reduced

# References

- [1] Bekaert, G., Hodrick, R.J., Zhang, X. (2009). "International stock return comovements," *Journal of Finance* 64(6), 2591-2626.
- [2] Berben, R.-P., and Jansen, W.J. (2005). "Comovement in international equity markets: A sectoral view," *Journal of International Money and Finance* 24, 832-857.
- [3] Christoffersen, P., Errunza, V., Jacobs, K., and Langlois, H. (2012). "Is the potential for international diversification disappearing? A dynamic copula approach," *Review of Financial Studies* 25(12), 3711-3751.
- [4] Kumar, M.S., and Okimoto, T. (2011). "Dynamics of international integration of government securities' markets." *Journal of Banking and Finance* 35, 142-154.

- [5] Lin, C.-F.J., and Teräsvirta, T. (1994). "Testing the constancy of regression parameters against continuous structural change," *Journal of Econometrics* 62, 211-228.
- [6] Longin, F. and Solnik, B. (1995). "Is the correlation in international equity returns constant: 1960-1990?," *Journal of International Money and Finance* 14, 3-26.
- [7] Ohashi, K. and Okimoto, T. (2016). "Increasing trends in the excess comovements of commodity prices," *Journal of Commodity Markets* 1, 48-64.
- [8] Okimoto, T. (2014), "Asymmetric Increasing Trends in Dependence in International Equity Markets," *Journal of Banking and Finance* 46, 219-232.
- [9] Teräsvirta, T. (1994). "Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models," *Journal of the American Statistical Association* 89(425), 208-218.

# SMPP models with an application to causality analysis of financial markets

国友直人・栗栖大輔・天野祐介・粟屋直

明大 政経, 東大 経済 D1, M2, M2

2016 年 12 月 22 日

研究集会

「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再帰的事象」

- 背景
- SMPP モデル
- SHPP モデル
- SMPP モデルの Granger 因果性
- 漸近理論
- 数値実験
- 実データ分析
- まとめ

- 点過程モデルがよく利用される（高頻度）金融データ，神経スパイクデータ，地震による複数地点の震度データなどでは同時点において複数のイベント (co-jump) が観測されることがある。
- しかし，多くの点過程のモデルにおいて仮定される条件  $\rightarrow$  co-jump は起こらない:  $d$  次元点過程  $N = (N_1, \dots, N_d)$  に対して，

$$P(N_j(t + \Delta) - N_j(t) = 1 | \mathcal{H}_t) = \lambda_j(t | \mathcal{H}_t) \Delta + o_P(\Delta), \quad 1 \leq j \leq d,$$

$$P(N_j(t + \Delta) - N_j(t) \geq 2 | \mathcal{H}_t) = o_P(\Delta), \quad 1 \leq j \leq d,$$

$$P(N_g(t + \Delta) - N_g(t) \geq 2 | \mathcal{H}_t) = o_P(\Delta), \quad N_g = \sum_{j=1}^d N_j,$$

ここで  $\mathcal{H}$  は  $N$  の過去の情報を含む filtration.

- Co-jump (simultaneous event) の存在を考慮する場合, 従来の点過程モデルの仮定から外れる.
- Co-jump を持つような点過程モデルをどう考えればよいか?
- Solo (2007) は同時点での複数のイベントの発生を考慮した点過程のモデル (simultaneous event multivariate point process model) を提案. このアイデアを利用+マーク付きのケースに拡張.

# SMPP モデル (構成)

- $d$  次元点過程  $N$  を考える. 各時点において  $d$  個成分のうち少なくとも 1 つの成分のイベントが発生する場合の組み合わせは  $2^d - 1$  通り ((各成分について jump する or しない)-(どの成分も jump しない)).
- この  $2^d - 1$  通りのイベントに対してそれぞれのイベントをカウントする点過程  $N^*$  を考える

$$N^*(t) = (N_1^*(t), \dots, N_{2^d-1}^*(t)).$$

- このとき, 点過程  $N^*$  は co-jump を持たない.



# SMPP モデル (構成)

- 例として  $d = 3$  のケースを考える. このとき,  $N^*$  は  $2^3 - 1 = 7$  次元の点過程で,

$$N^* = (N_1^*, \dots, N_7^*).$$

- 各成分の点過程として例えば,

$N_j^*$ ,  $j = 1, 2, 3$  は第  $j$  成分のみの jump をカウント,

$N_j^*$ ,  $j = 4, 5, 6$  は第  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(2, 3)$  成分の (co-)jump をカウント,

$N_7^*$  は第 1, 2, 3 成分すべてが jump するイベントをカウント,

などと考える.

# SMPP モデル (構成)

- この場合, 元の 3 次元の点過程との対応は以下の通り:

$$N_1 = N_1^* + N_4^* + N_5^* + N_7^*,$$

$$N_2 = N_2^* + N_4^* + N_6^* + N_7^*,$$

$$N_3 = N_3^* + N_5^* + N_6^* + N_7^*.$$

- $N$  と  $N^*$  は一対一対応.
- Co-jump を持つ点過程モデルの構成にはこの関係を使う.

# SMPP モデル (強度関数)

- $N^*$  に対しては従来の点過程の議論が適用できるので,  $N^*$  に対して強度関数を考える:

$$\lambda^*(t) = (\lambda_1^*(t), \dots, \lambda_{2^d-1}^*(t)).$$

- 例えば  $d = 3$  の時は  $N$  と  $N^*$  の関係と同様に以下の関係が成り立つ:

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + \lambda_4^* + \lambda_5^* + \lambda_7^*,$$

$$\lambda_2 = \lambda_2^* + \lambda_4^* + \lambda_6^* + \lambda_7^*,$$

$$\lambda_3 = \lambda_3^* + \lambda_5^* + \lambda_6^* + \lambda_7^*.$$

これまでの議論を多次元 Hawkes 過程に適用  
(simultaneous Hawkes point process (SHPP)).

- 観測期間  $[0, T]$  を  $n$  個の区間に分割:  $I_i^n = (t_{i-1}^n, t_i^n]$ ,  
 $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{n-1}^n < t_n^n = T$ .
- $Y(s) = (Y_1(s), \dots, Y_d(s))$ :  $d$ -次元確率過程 (ex. log-return).
- 各成分に対して閾値  $u = (u_1, \dots, u_d)$  を設定.
- 各観測時刻  $t_i^n$  において  $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$  の少なくとも 1 つの成分が閾値を超過していればイベント発生とみなし, これを jump と定義する. この jump をカウントする  $d$  次元計数過程  $N^n$  を,  $N^{n*}$  を用いてモデル化.

- 計数過程  $N^n$  の jump は各区間  $I_i^n = (t_{i-1}^n, t_i^n]$  の端点  $t_i^n$  で発生.
- 高頻度観測  $\max_{1 \leq i \leq n} |t_i^n - t_{i-1}^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  のとき,  $N^{n*} \rightarrow N^*$ .
- 連続時間確率過程の離散観測の問題と関連.
- $N^{n*}$  がある点過程の実現値であると考え,  $N^{n*}$  のモデリングを考える (以下  $n$  は省略).

$N^*$  各成分の閾値超過レート (強度関数) が次の形で与えられるとする.

$$\lambda_j^*(t, \mathbf{x} | \mathcal{H}_t^*) = \left( \lambda_{j,0}^* + \sum_{i=1}^{2^d-1} \int_{-\infty}^t c_{ji}^*(x) g_{ji}^*(t-s) N_i^*(ds \times dx) \right) \times \left( - \frac{\partial}{\partial x_{(j)}} F_\theta(x_1, \dots, x_d | \mathcal{H}_t^*) \Big|_{x_{(j)}=u_{(j)}, x_{-(j)}=u_{-(j)}} \right).$$

$j = 1, \dots, 2^d - 1$ ,  $\lambda_{j,0}^*$  は正定数,

$\mathcal{H}^*$ :  $N^*$  の history,

$F^{(j)}$ : 時刻  $t$  で閾値  $u = (u_1, \dots, u_d)$  を超過した成分の同時分布.

$(j) \subset \{1, \dots, d\}$ ,

$c_{ji}^*(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ : インパクト関数,

$g_{ji}^*(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ : 減衰関数.

(Co-jump を考慮しない場合では) このようなモデルは金融時系列分析ではよく利用される.

- Grothe et al.(2014)

$$c_{ji}(x) = 1 + G_{ji}^{\leftarrow}(F_{i,t}(x_i)), \quad g_i(t) = e^{-\gamma_i t}, \quad X_j(t) \sim \text{GPD}(\xi_j, \sigma_j(t)),$$

$G^{\leftarrow}$  は平均  $\delta_{ji}$  の指数分布の分布関数の逆関数,  $\gamma_i > 0$ .

- 国友・江原・栗栖 (2016)

$$c_{ji}(x) = A_{ji} x_i^{\delta_{ji}} + B_{ji}, \quad g_i(t) = e^{-\gamma_i t}, \quad X_j(t) \sim \text{GPD}(\xi_j, \sigma_j),$$

$A_{ji}, B_{ji}, \gamma_i > 0, 0 \leq \delta_{ji} \leq 1$ .

以下の強度関数により定義されるマーク付き多次元 Hawkes 過程を考える:

$$\lambda_j^*(t|\mathcal{H}_t^*) = \left( \lambda_{j,0}^* + \sum_{i=1}^{2^d-1} \int_{-\infty}^t A_{ji}^* \max(X_{(i)})^{\delta_{ji}^*} e^{-\gamma_{ji}^*(t-s)} N_i^*(ds \times dx) \right),$$

ただし、各マークは  $X_{i,s} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{GPD}(\sigma_i, \xi_i)$ ,  $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$ ,  $i \neq j$ .

$$C^* = (C_{ji}^*)_{1 \leq i, j \leq 2^d-1}, \quad C_{ji}^* = E[c_{ji}^*(X_1)],$$
$$\Gamma^* = \text{diag}(\gamma_1^*, \dots, \gamma_{2^d-1}^*) \text{ とおくと,}$$

## SHPP モデルの定常性

SHPP モデルが定常

$$\Leftrightarrow \text{spr}(C^*(\Gamma^*)^{-1}) < 1, \quad \max_{1 \leq i, j \leq 2^d-1} |E[(c_{ji}^*(X_1))^2]| < \infty.$$



- 点過程 (連続確率過程) に対する (Granger) 因果性をどう考える？
- Simultaneous event 無し
  - 離散時系列  
Granger(1969).
  - 連続時間確率過程  
Comte and Renault(1996), Florence and Fougère(1996).
  - グラフィカルモデリング  
Eichler et al.(2016).
- Simultaneous event 有り
  - Simultaneous multivariate point process (SMPP)  
本研究.

# SMPP モデルの因果性

連続時間確率過程  $(X_t, Y_t, Z_t)$  が定義されるフィルター付き確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}, P)$  とする. また,

$$\mathcal{F}_t^{(Z)} = \sigma(Z_s : s \leq t), \quad \mathcal{F}_t^{(Y,Z)} = \sigma((Z_s, Y_s) : s \leq t).$$

とする. 以下は大域的な因果性 (Florence and Fougère(1996)):

## Weak global non-causality

$\mathcal{F}^{(Y,Z)}$  を所与として  $\mathcal{F}$  は  $Z$  に対して weakly globally non-causal

$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$  任意の  $s, t$  に対して,  $E[Z_t | \mathcal{F}_s] = E[Z_t | \mathcal{F}_s^{(Y,Z)}]$

## Strong global non-causality

$\mathcal{F}^{(Y,Z)}$  を所与として  $\mathcal{F}$  は  $Z$  に対して strongly globally non-causal

$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$  任意の  $s, t$  に対して,  $\mathcal{F}_t^{(Z)} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s | \mathcal{F}_s^{(Y,Z)}$

# SMPP モデルの因果性

$Z$  をセミマルチンゲールとし、そのセミマルチンゲール分解を考える：

$$Z_t = Z_0 + A_t + M_t,$$

$A$ : 可予測過程,  $M$ : 局所マルチンゲール.

以下は瞬間的な因果性 (Florence and Fougère(1996)):

## Weak instantaneous non-causality

$\mathcal{F}^{(Y,Z)}$  を所与として  $\mathcal{F}$  は  $Z$  に対して weakly instantaneously non-causal  
def. 任意の  $t$  に対して,  $\mathcal{F}^{(Y,Z)}$ -semimart.  $Z$  が  $\mathcal{F}$  に関しても同一の分解をもつ.

## Strong instantaneous non-causality

$\mathcal{F}^{(Y,Z)}$  を所与として  $\mathcal{F}$  は  $Z$  に対して strongly instantaneously non-causal  
def. 任意の  $\mathcal{F}^{(Z)}$ -adapted な  $\mathcal{F}^{(Y,Z)}$ -semimart. が,  $\mathcal{F}$  に関しても同一の分解をもつ.

以下の命題は Florence et al.(1996) の Theorem 1 の簡単な拡張.

## Proposition 1

$N^*$  に関して上記の 4 つの因果性の概念は同値.

- Co-jump があると Florence and Fougère(1996) や Eichler et al.(2016) とは異なる因果性の概念 (同時点での相関) が必要.  
→ instantaneous Granger-non-causality (IGNC).
- パラメトリックモデル (SHPP モデル) に対しては GNC (or IGNC) は簡単になる.

2次元  $N = (N_1, N_2)$  の場合.

- GNC ( $N = N^*$ , co-jump 無し)

$N_2$  が  $N_1$  に対して G-非因果的  $\Leftrightarrow c_{12}(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_{12} = 0$ .

- IGNC ( $N \neq N^*$ , co-jump 有り)

$N_2$  が  $N_1$  に対して 瞬時 G-非因果的 (Type 1)

$\Leftrightarrow c_{12}^*(x) = 0, c_{13}^*(x) \neq 0$ .

$N_2$  が  $N_1$  に対して 瞬時 G-非因果的 (Type 2)

$\Leftrightarrow c_{12}^*(x) \neq 0, c_{13}^*(x) = 0$ .

$N_2$  が  $N_1$  に対して 瞬時 G-非因果的 (Type 3)

$\Leftrightarrow c_{12}^*(x) = c_{13}^*(x) = 0$ .

- 多次元点過程の MLE の CLT に関する理論的結果は整理されてない?
- 1次元 Hawkes 過程の MLE の CLT は Ogata(1978).

- $N = (N_i)_{1 \leq i \leq p}$ :  $\mathbb{R}_+$  上の  $p$ -次元  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ -適合 simple 点過程.
- $A = (A_i)_{1 \leq i \leq p}$ :  $N$  の連続な compensator.
- $g_T(t) = (g_T^{(i,j)}(t))$ :  $d \times p$  predictable process.
- $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ :  $\mathcal{F}_0$ -可測非負定値ランダム行列.

以下の条件を仮定:  $T \rightarrow \infty$  として,

$$\max_{1 \leq i, j \leq d} \max_{1 \leq k \leq p} \left( E \left[ \frac{1}{T} \int_0^T |g_T^{(i,k)}(t) g_T^{(j,k)}(t)| dA_k(t) \right] \right) < \infty, \quad (1)$$

$$\frac{1}{T^{1+\delta}} \max_{1 \leq k \leq p} A_k(T) \xrightarrow{P} 0, \quad \forall \delta > 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^p g_T^{(i,k)}(t) g_T^{(j,k)}(t) dA_k(t) \xrightarrow{P} \sigma_{ij}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (3)$$

$$\max_{1 \leq k \leq p} E \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \|g_T^{(\cdot,k)}(t)\|^2 I(\|g_T^{(\cdot,k)}(t)\| > c) dA_k(t) | \mathcal{F}_0 \right] \xrightarrow{P} 0, \quad \forall c > 0. \quad (4)$$

$$g_T^{(\cdot,k)}(t) = (g_T^{(1,k)}(t), \dots, g_T^{(d,k)}(t))^\top.$$



## Theorem 1(Ogata(1978) の改良)

条件 (1), (2), (3), (4) を仮定, このとき,

$$X_T = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \sum_{k=1}^P g_T^{(\cdot, k)}(t) [dN_k(t) - dA_k(t)] \xrightarrow{\mathcal{F}_0\text{-stably}} N_d(0, \Sigma).$$

- 多次元点過程の最尤推定では  $X_T = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial L_T(\theta)}{\partial \theta}$ .
- 極限に現れる Fisher 情報行列はランダム.
- $N^*$  でなく, 最初から co-jump をもつ  $N$  そのものに対する一般の安定収束も考えられるが, 統計的モデリング, 数値計算の際に co-jump 無し, 線形強度関数の仮定は現状欠かせない.
- この場合でも Wilks' theorem (LR test の漸近的性質) は成り立つ.

- $L_T^*(\theta)$ :  $N^*$  の対数尤度
- $\theta_0$ :  $N^*$  の真のパラメータ,  $\theta_0 \in \Theta(\subset \mathbb{R}^d)$ : compact.
- $\hat{\theta}_{ML}$ : MLE of  $N$
- $\hat{\theta}_{ML}^*$ :  $(d - r) \times 1$  MLE of  $N^*$ ,  $0 \leq r \leq d$ .  $\hat{\theta}_{ML}^* \subset \Theta_1(\subset \Theta)$ .

尤度比検定統計量の漸近論を考えるため、以下の条件を仮定:

$I(\theta_0)$ :  $\mathcal{F}_0$ -m'ble p.d.,  $T \rightarrow \infty$  として,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^P \left( \frac{\partial \log \lambda_k(t, \theta)}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \log \lambda_k(t, \theta)}{\partial \theta} \right)^\top \lambda_k(t, \theta) dt \xrightarrow{P} I(\theta_0), \quad (5)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^P \frac{1}{\lambda_k(t, \theta)} \frac{\partial^2 \lambda_k(t, \theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} [dN_k(t) - \lambda_k(t, \theta) dt] \xrightarrow{P} 0. \quad (6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \sum_{k=1}^P \frac{\partial \log \lambda_k(t, \theta)}{\partial \theta} [dN_k(t) - \lambda_k(t, \theta) dt] \xrightarrow{\mathcal{F}_0\text{-stably}} N_d(0, I(\theta_0)), \quad (7)$$

## Theorem 2(LR test の漸近的性質)

- (i) Co-jump が存在するとき, 正則条件 (例えば Ogata(1978) の条件) の下で  $\hat{\theta}_{ML}$  は一貫性をもたない.
- (ii) 条件 (5), (6), (7) を仮定する. このとき, 以下が成立:

$$2(L_T^*(\theta_0) - L_T^*(\hat{\theta}_{ML}^*)) \xrightarrow{d} \chi(r),$$

ここで  $\chi(r)$  は自由度  $r$  のカイ 2 乗分布.

- 実データ解析では上記の結果を (因果性の検定に) 利用する.

- 多次元点過程の MLE の数値実験をしっかりとやっている研究も (ほとんど) ない?

Chavez-Demoulin et al.(2005) や Grothe et al.(2014) では数値実験の結果は報告されていない.

- 数値実験によりマーク付き多次元点過程の MLE の漸近的性質を確認.

DGP:  $N^* = (N_1^*, N_2^*, N_3^*),$

$$\begin{aligned} \lambda_j^*(t|\mathcal{H}_t^*) &= \lambda_{j,0}^* + \alpha_{j,1}^* \int_{-\infty}^t x_1 e^{-\gamma^* s} N_1^*(ds \times dx_1) \\ &\quad + \alpha_{j,2}^* \int_{-\infty}^t x_2 e^{-\gamma^* s} N_2^*(ds \times dx_2) \\ &\quad + \alpha_{j,3}^* \int_{-\infty}^t (x_1 \vee x_2) e^{-\gamma^* s} N_3^*(ds \times dx), \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$X_j \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{GPD}(\sigma_j, \xi_j), j = 1, 2, X_1 \perp\!\!\!\perp X_2.$

	$\alpha_{11}^*$	$\alpha_{12}^*$	$\alpha_{13}^*$	$\alpha_{21}^*$	$\alpha_{22}^*$	$\alpha_{23}^*$	
<b>True</b>	0.57000	0.00000	0.19000	0.00010	0.71000	0.09500	
<b>Mean</b>	0.63641	0.00259	0.12387	0.03994	0.76318	0.07905	
<b>RMSE</b>	0.01045	0.00426	0.00913	0.00568	0.01004	0.00557	
	$\alpha_{31}^*$	$\alpha_{32}^*$	$\alpha_{33}^*$	$\gamma^*$	$\lambda_{1,0}^*$	$\lambda_{2,0}^*$	$\lambda_{3,0}^*$
<b>True</b>	0.05900	0.12000	0.20000	0.02700	0.00930	0.00530	0.00084
<b>Mean</b>	0.06748	0.13922	0.11315	0.02859	0.00853	0.00427	0.00107
<b>RMSE</b>	0.00272	0.00380	0.00963	0.00033	0.00019	0.00017	0.00007

**Table:** Summary of numerical experiments. Simulation size  $N = 100$ . For  $\text{GPD}(\sigma_j, \xi_j)$ , we set  $(\sigma_1, \xi_1) = (0.007, 0.22)$ ,  $(\sigma_2, \xi_2) = (0.008, 0.15)$ .

# 数值実験 $(I(\hat{\theta}_{ML}^*)^{1/2}(\hat{\theta}_{ML}^* - \theta_0))$

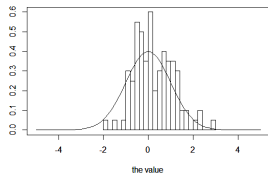


Figure:  $\alpha_{12}^*$

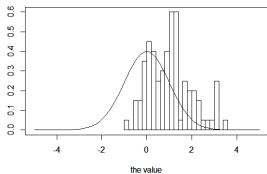


Figure:  $\alpha_{21}^*$

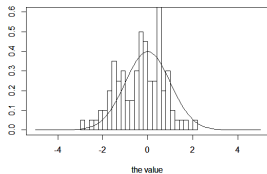


Figure:  $\alpha_{23}^*$

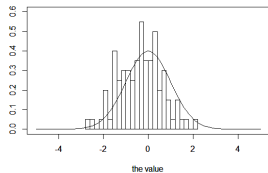


Figure:  $\alpha_{31}^*$

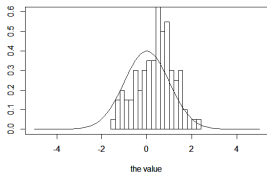


Figure:  $\gamma^*$

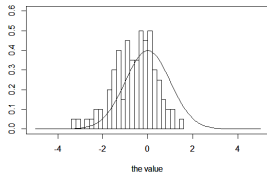


Figure:  $\lambda_{3,0}^*$



- SHPP モデルを利用して実データに対して GNC, IGNC の検定を行う.
- 国友・江原・栗栖 (2016) では, マーク付き多次元 Hawkes 過程を用いて (東京/ニューヨーク), (東京/ロンドン) に対してマーク付き多次元 Hawkes モデルによる因果性の検証を行っている.
- この場合, 東京市場の open~close とニューヨーク (ロンドン) 市場の open~close は時間が重なっていないので co-jump は起こりえない.

例 1： 東京, 香港, シンガポール,

例 2： ロンドン, パリ, フランクフルト

各市場の open~close の時間が重なっているため co-jump が起こりうる。  
この場合, 例えば国友・江原・栗栖 (2016) のモデルは使えない。

→ Co-jump を考慮したマーク付き多次元 Hawkes 過程 (SHPP モデル) を使う。

- 市場指数: Nikkei225, S&P500, FTSE100, HSI.
- 期間: 1990/1/2 ~ 2015/8/25.
- モデル: Bivariate SHPP model.
- 閾値:  $u = -2\%$ .
- 検定手法: MLE  $\rightarrow$  LR test.

# 実データ分析 (Jump Size)

Markets	$\sigma_i$	$\xi_i$
Tokyo	0.00806(0.00065)	0.16874(0.06431)
New York	0.00765(0.00076)	0.21538(0.08082)
London	0.00850(0.00084)	0.10799(0.07717)
Hong Kong	0.00861(0.00055)	0.15773(0.05076)

Table: Estimated GPD parameters.

# 実データ分析 (Model Selection)

Intensity function の形を AIC で選択.

- Model 1:  $c_{ji}^*(x) = 1$ ,
- Model 2:  $c_{ji}^*(x) = a_{ji}^* \max(x_{(j)})$ ,
- Model 3:  $c_{ji}^*(x) = a_{ji}^* \max(x_{(j)})^{\delta^*}$ .

	T-NY	T-L	T-HK
Model 1	4902.27	4856.04	7935.47
Model 2	<b>4897.19</b>	<b>4851.55</b>	<b>7915.58</b>
Model 3	4899.54	4853.48	—

Table: AICs of each model.

Causality test では Model 2 を利用.

# 実データ分析 (Causality Test)

Null	T-NY	T-L
$c_{21}(x) = 0$	accept	accept
$c_{12}(x) = 0$	reject	reject

**Table:** GNC test at the 5% significant level. T: Tokyo ( $N_1$ ), NY: New York ( $N_2$ ), L: London ( $N_2$ ).

	Null	T-HK
Type 1	$c_{12}^*(x) = 0$	accept
	$c_{21}^*(x) = 0$	accept
Type 2	$c_{13}^*(x) = 0$	reject
	$c_{23}^*(x) = 0$	accept
Type 3	$c_{12}^*(x) = 0, c_{13}^*(x) = 0$	reject
	$c_{21}^*(x) = 0, c_{23}^*(x) = 0$	accept

**Table:** IGNC test at the 5% significant level, T: Tokyo( $N_1$ ), HK: Hong Kong( $N_2$ ).

- 同時点のイベント発生を考慮した点過程モデルを考察.
- SHPP モデルを提案.
- Co-jump をもつ点過程の MLE, LR test の漸近的性質を理論的に考察.
- 多次元点過程における MLE の漸近的性質を数値実験により確認.
- 提案モデルにおける GNC, IGNC を定義し, 実データ分析を行った.

- **self(mutually)-exciting**: 線形 Hawkes 過程 (内生的イベントのみに依存) 以外のモデリング (+外生的イベントに依存)

例 1: 非線形 Hawkes 過程

例 2: 多次元 Hawkes+Cox 過程 (Dynamic Contagion Process)

- **self(mutually)-damping**: (例)  $g_{ij}(t) < 0, \exists t \in \mathbb{R}_+$ .

$$\text{Cov}(N_i((s, t]), N_j((t, u])) < 0, \exists s, t, u \in \mathbb{R}, s < t < u.$$

- **self(mutually)-correcting**: (例)  $\lambda(t|\mathcal{H}_t) = \exp(\alpha + \beta(t - \rho N(t)))$

$$\text{Cov}(N_i((s, t]), N_j((t, u])) < 0, \forall s, t, u \in \mathbb{R}, s < t < u.$$

- SMPP モデルに対する Causality measure
- Bayesian modeling



# 参考文献 1

- Chavez-Demoulin, V., Davison, A.C. and McNeil, A.J. (2005), Estimating value-at-risk: a point process approach. *Quant. Finance*, 5-2, 227-234.
- Comte, F. and Renault, E. (1996). Noncausality in continuous time models. *Econometric Theory*, 12, 215-256.
- Eichler, M., Dahlhaus, R. and Dueck, J.(2016), Graphical modeling for multivariate Hawkes processes with nonparametric link functions. To appear in *J. Time. Ser. Anal.*
- Florens, J.P. and Fougère, D. (1996), Noncausality in continuous time. *Econometrica*, 64, 1195-1212.
- Granger, C.W. (1969), Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods. *Econometrica*, 37, 161-194.

- Grothe, O., Korniiichuk, V. and Manner, H. (2014), Modeling multivariate extreme events using self-exciting point processes. *J. Econometrics* 182, 269-289.
- 国友・江原・栗栖 (2016), 多次元ホークス型モデルによる金融市場の因果性分析. CIRJE J-278.
- Ogata, Y. (1978), The asymptotic behavior of maximum likelihood estimators for stationary point processes. *Ann. Inst. Statist. Math.* 30, 243-261.
- Solo, V. (2007), Likelihood function for multivariate point processes with coincidences. *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control New Orleans, LA, USA, Dec. 12-14, 2007*

# Greeks の数値計算について

楠岡成雄

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  確率空間

$B(t) = (B^1(t), \dots, B^d(t)), t \geq 0$ ,  $d$ -次元 Wiener 過程

$B^0(t) = t, t \geq 0$ .

$V_k \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M; \mathbf{R}^N), k = 0, 1, \dots, d$ ,

Stratonovich 型 SDE on  $\mathbf{R}^N$

$$dX(t, x, \theta) = \sum_{k=0}^d V_k(X(t, x), \theta) \circ dB^k(t)$$

$$X(0, x, \theta) = x \in \mathbf{R}^N$$

$$b \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M; \mathbf{R}^N)$$

$$b(x, \theta) = V_0(x; \theta) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^N V_k^i(x, \theta) \frac{\partial}{\partial x^i} V_k(x; \theta)$$

伊藤型 SDE on  $\mathbf{R}^N$

$$dX(t, x, \theta) = \sum_{k=1}^d V_k(X(t, x), \theta) dB^k(t) + b(X(t, x), \theta) dt$$

$$X(0, x, \theta) = x \in \mathbf{R}^N$$

(1) Calibration: 市場を説明する  $\theta$  の選択

$E[f_k(X(T_k, x; \theta))]$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ , の数値計算の問題

$\theta$  を変えながら何度も計算する必要がある

(2)  $\theta_0$  が選択された後 Greeks の計算

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} E[f(X(T, x, \theta)) | \theta = \theta_0]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^i \partial \theta^j} E[f(X(T, x, \theta)) | \theta = \theta_0]$$

Euler-丸山近似

$$X_h : [0, \infty) \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M \times C([0, \infty); \mathbf{R}^N) \rightarrow \mathbf{R}^N, h > 0,$$

$$X_h(0, x, \theta; w) = x,$$

$$X_h(t, x, \theta; w)$$

$$= X_h(nh, x, \theta; w) + \sum_{k=1}^d V_k(X_h(nh, x, \theta; w))(w^k(t) - w^k(nh))$$

$$+ b(X_h(nh, x, \theta; w))(t - nh),$$

$$t \in (nh, (n+1)h], n = 0, 1, \dots$$

Theorem 1 (丸山)  $\forall T > 0 \exists C \in (0, \infty)$  such that

$$\sup_{(x, \theta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M} E \left[ \sup_{t \in [0, T]} |X(t, x, \theta) - X_{T/n}(T, x, \theta; B(\cdot))|^2 \right]^{1/2} \\ \leq \frac{C}{n^{1/2}}, \quad n \geq 1$$

$f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  が Lipsitz 連続ならば

$$\sup_{(x, \theta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M} |E[f(X(T, x, \theta))] - E[f(X_{T/n}(T, x, \theta; B(\cdot)))]| = O(n^{-1/2})$$

多くの場合、経験上

$$|E[f(X(T, x, \theta))] - E[f(X_{T/n}(T, x, \theta; B(\cdot)))]| = O(n^{-1})$$

となる



Euler-丸山近似の数値計算

モンテカルロ法

$\{B_m(t); t \geq 0\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , 独立な  $d$ -次元 Wiener 過程の族

$m \geq 1$

$$E_{f,m}(T, x, \theta) = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m f(X_{T/n}(T, x, \theta; B_r(\cdot)))$$

$$|E[f(X_{T/n}(T, x, \theta; B(\cdot)))] - E_{f,m}(T, x, \theta)| = O(m^{-1/2})$$

Greeks の数値計算

$$(\Delta_{i,\delta}g)(\theta) = \frac{1}{\delta}(g(\theta + \delta e_i) - g(\theta))$$

$$(\Delta_{i,j,\delta}g)(\theta) = \frac{1}{\delta^2}(g(\theta + \delta e_i + \delta e_j) + g(\theta) - g(\theta + \delta e_i) - g(\theta + \delta e_j))$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} E[f(X(T, x, \theta)) | \theta = \theta_0] \Leftarrow (\Delta_{i,\delta} E_m(x, \cdot))_{\cdot = \theta_0}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^i \partial \theta^j} E[f(X(T, x, \theta)) | \theta = \theta_0] \Leftarrow (\Delta_{i,j,\delta} E_m(x, \cdot))_{\cdot = \theta_0}$$

で計算することが多い

この方法の正当化

$\mathbf{R}^N$  上のベクトル場  $V_k^{(\theta)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, d$ ,

$$V_k^{(\theta)} = \sum_{i=1}^N V_k^i(x; \theta) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad k = 0, 1, \dots, d$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1, \dots, d\}^n$ ,  $n \geq 1$ , に対して  
ベクトル場  $V_{[\alpha]}^{(\theta)}$  を以下で定義

$$V_{[\alpha]}^{(\theta)} = [V_{\alpha_1}^{(\theta)}, [V_{\alpha_2}^{(\theta)}, \dots [V_{\alpha_{n-1}}^{(\theta)}, V_{\alpha_n}^{(\theta)}] \dots]]$$

$$\mathcal{A}_{00} = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0, 1, \dots, d\}^n \right) \setminus \{0\}$$

(UH)  $\exists L \subset \mathcal{A}_{00}$  有限集合  $\exists c > 0$

$$\sum_{\alpha \in L} (V_{\alpha}^{(\theta)}(x), \xi)_{\mathbf{R}^N}^2 \geq c|\xi|^2, \quad \xi, x \in \mathbf{R}^N, \theta \in \mathbf{R}^M$$

Theorem 2 条件 (UH) が成立するならば  $\forall T > 0 \exists C \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \sup_{(x, \theta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M} |E[f(X(T, x, \theta))] - E[f(X_{T/n}(T, x, \theta; B(\cdot)))]| \\ & \leq \frac{C}{n} \|f\|_{\infty}, \quad f \in C_b^{\infty}(\mathbf{R}^N), n \geq 1 \end{aligned}$$

条件 (UH) の下では任意の有界可測関数  $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  に対して

$$|E[f(X(T, x, \theta))] - E_{f,m}(T, x, \theta)| = O\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m^{1/2}}\right)$$

が成立

Theorem 3 条件 (UH) が成立するならば  $\forall T > 0 \forall i, j = 1, \dots, N$   
 $\forall \gamma > 0, \exists C \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \sup_{(x, \theta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M} \left| \frac{\partial}{\partial \theta^i} E[f(X(T, x, \theta))] - \Delta_{i, \delta} E[f(X_{T/n}(T, x, \theta))] \right| \\ & \leq C \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{\delta n^\gamma} + \delta \right) \|f\|_\infty, \quad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N), \quad n \geq 1, \quad \delta \in (0, 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sup_{(x, \theta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M} \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^i \partial \theta^j} E[f(X(T, x, \theta))] - \Delta_{i, j, \delta} E[f(X_{T/n}(T, x, \theta))] \right| \\ & \leq C \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{\delta^2 n^\gamma} + \delta \right) \|f\|_\infty, \quad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N), \quad n \geq 1, \quad \delta \in (0, 1] \end{aligned}$$

条件 (UH) の下で  $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  が Lipschitz 連続ならば

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial \theta^i} E[f(X(T, x, \theta))] - \Delta_{i, \delta} E_{f, m}(x, \theta) \right| \\ &= O\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\delta n^\gamma} + \delta + \frac{1}{m^{1/2}}\right) \end{aligned}$$

(異なる  $\theta$  に対して同じ乱数で計算していることが重要)

条件 (UH) の下で  $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  が Lipschitz 連続ならば

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^i \partial \theta^j} E[f(X(T, x, \theta))] - \Delta_{i, j, \delta} E_{f, m}(x, \theta) \right| \\ &= O\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\delta n^\gamma} + \delta + \frac{1}{\delta m^{1/2}}\right) \end{aligned}$$

Gaussian K-scheme ( special KLVN method)

二宮-Victoir, 二宮-二宮 でも同様なことが示される

(UFG\*)  $\exists L \subset A_{00}$  有限集合  $\exists \varphi_{\alpha,\beta} \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M)$ ,  $\exists \varphi_{i,\alpha,\beta} \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M)$ ,  $\alpha \in A_{00}$ ,  $\beta \in L$ ,  $i = 1, \dots, M$ ,

$$V_\alpha^{(\theta)} = \sum_{\beta \in L} \varphi_{\alpha,\beta}(\cdot, \theta) V_\beta^{(\theta)} \quad \alpha \in A_{00}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} V_\alpha^{(\theta)} = \sum_{\beta \in L} \varphi_{i,\alpha,\beta}(\cdot, \theta) V_\beta^{(\theta)} \quad \alpha \in A_{00}, \quad i = 1, \dots, M.$$

(UH)  $\Rightarrow$  (UFG\*)

Gaussian K-scheme

$$\tilde{X}_h(t, x; \theta) = \tilde{X}_h(t, x; \theta, w, \eta)$$

Theorem 4 条件 (UFG\*) が成り立つならば

$$\forall T > 0, \forall i, j = 1, \dots, N, \exists C \in (0, \infty)$$

$$\sup_{(x, \theta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M} |E[f(X(T, x, \theta))] - E[f(X_{T/n}(T, x, \theta))]|$$

$$\leq C \frac{1}{n^2} \|f\|_\infty, \quad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N), \quad n \geq 1$$



Theorem 5 条件 (UFG\*) が成り立つならば

$$\forall T > 0, \forall i, j = 1, \dots, N, \forall \gamma > 0, \exists C \in (0, \infty)$$

$$\sup_{(x, \theta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M} \left| \frac{\partial}{\partial \theta^i} E[f(X(T, x, \theta))] - \Delta_{i, \delta} E[f(X_{T/n}(T, x, \theta))] \right|$$

$$\leq C \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\delta n^\gamma} + \delta \right) \|f\|_\infty, \quad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N), \quad n \geq 1, \quad \delta \in (0, 1]$$

$$\sup_{(x, \theta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M} \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta^i \partial \theta^j} E[f(X(T, x, \theta))] - \Delta_{i, j, \delta} E[f(X_{T/n}(T, x, \theta))] \right|$$

$$\leq C \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\delta^2 n^\gamma} + \delta \right) \|f\|_\infty, \quad f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^N), \quad n \geq 1, \quad \delta \in (0, 1]$$

# Interacting Particle Methods for Conditional Distributions

Tomoyuki Ichiba

Department of Statistics & Applied Probability  
Center for Financial Mathematics and Actuarial Research  
University of California, Santa Barbara

Joint work with Mike Ludkovski

University of Tokyo, December 2016

## Problem

Let us consider the canonical space  $\Omega := D([0, T]; \mathbb{R}^n)$  of càdlàg (right continuous with left limits) sample paths

$X := \{X_t = X(t, \omega) = \omega(t), 0 \leq t \leq T\}$ ,  $\omega \in \Omega$ , and a probability measure  $\mathbb{P}$  on it.

Given a small positive number  $\varepsilon > 0$  we consider rare events of the form  $\{\omega \in \Omega : X_t \in A\}$ ,  $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$  for

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : 0 < \mathbf{p} := \mathbb{P}(X_T \in A) < \varepsilon\}.$$

We want to compute numerically the conditional moments

$$\mathbb{E}[f(X) | X_T \in A],$$

for  $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$  and  $f : D([0, T]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Examples: variance, probability of first passage time/default times, expectations of occupation times, ...

## Example: mean-field interbank-lending market

On  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  let us consider a banking system  $X := (X(t) := (X_1(t), \dots, X_n(t)), 0 \leq t < \infty)$  of  $n (\geq 2)$  banks.  
 $X_i(t)$ : monetary reserve of bank  $i$  at time  $t$  with SDE

$$\begin{aligned} X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t \left[ c_i + \sum_{j=1}^n (X_j(u) - X_i(u)) \cdot p_{i,j}(X(u)) \right] du \\ + \int_0^t \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(X(u)) \sqrt{X_i(u)} dW_k(u); \\ i = 1, \dots, n, \quad 0 \leq t < \infty, \end{aligned}$$

where  $(W_1, \dots, W_n)$  is the  $n$ -dimensional standard Brownian motion,  $c_i$ 's are constants,  $p_{i,j}(\cdot)$  and  $\sigma_{ik}(\cdot)$  are some smooth functions.

Given  $k = 1, \dots, n$  and  $b_1, b_2 > 0$ , what is the conditional probability

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\min_{0 \leq t \leq T} X_i(t) > b_2\}} = k \mid \sum_{i=1}^n X_i(T)/n < b_1\right) ?$$

(survival probabilities when systemic events may occur)

• When  $p_{i,j}(\cdot) \equiv a_{i,j}$  (constant), it reduces to a system of Ornstein-Uhlenbeck type:

$$dX_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(X_j(t) - X_i(t))dt + dW_i(t), \quad t \geq 0.$$

In particular, we are interested in the case of large  $n$ .

CARMONA, FOUQUE & SUN ('12), FOUQUE & ICHIBA ('13),  
ICHIBA & SHKOLNIKOV ('13), FOUQUE, ICHIBA, DETERING ('16)

## Another example but with defaults

With initial configuration  $X_0 := (X_0^1, \dots, X_0^N) \in (0, \infty)^N$  consider

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b(X_s^i, \bar{X}_s) ds + W_t^i + \int_0^t \bar{X}_{s-} \left( dM_s^i - \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} dM_s^j \right); \quad t \geq 0,$$

$$\tau_k^i := \inf \left\{ s > \tau_{k-1}^i : X_{s-}^i - \frac{\bar{X}_{s-}}{N} \sum_{j \neq i} (M_s^j - M_{s-}^j) \leq 0 \right\}; \quad k \in \mathbb{N},$$

$$M_t^i := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau_k^i \leq t\}},$$

for  $i = 1, \dots, N$ , where

$W_t := (W_t^1, \dots, W_t^N)$ ,  $t \geq 0$  is a standard Brownian motion,

$\bar{X}_t$  is the average of  $X_t := (X_t^1, \dots, X_t^N)$  and

$M_t^i$  is the cumulative number of defaults by time  $t \geq 0$ ,

$\tau_k^i$  is the  $k$ -th default time with  $\tau_0^i = 0$  for each  $i$ .

ELIE, ICHIBA & LAURIÉRE ('16).

## Conditional simulation for small probability

Let us generate I.I.D. copies  $X^{(1)}, \dots, X^{(J)}$  of the sample path  $X$  from  $\mathbb{P}$ , and approximate

$$\mathbb{E}[f(X) \mid X_T \in A] = \frac{1}{\mathfrak{p}} \mathbb{E}[f(X) \cdot \mathbf{1}_{\{X_T \in A\}}]$$

by the estimator

$$\frac{1}{\mathfrak{p}} \cdot \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J f(X^{(j)}) \cdot \mathbf{1}_{\{X_T^{(j)} \in A\}},$$

where  $\mathfrak{p} = \mathbb{P}(X_T \in A)$ ,  $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$ .

Problem: by the Strong Law of Large Numbers the sample proportion

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathbf{1}_{\{X_T^{(j)} \in A\}} = \frac{1}{J} \#\{j : 1 \leq j \leq J, X_T^{(j)} \in A\} \xrightarrow[J \rightarrow \infty]{\mathbb{P}\text{-a.s.}} \mathfrak{p},$$

is small (since  $\mathfrak{p} \in (0, \varepsilon)$  is small), and hence it is expected that this estimator fluctuates in the finite sample.

## Remedy: Change of measure

Let us take a new measure  $\tilde{\mathbb{P}}$  such that by a RADON-NYKODIM derivative

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = L_T^{-1}, \quad \frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = L_T, \quad \text{and} \quad \frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}}\Big|_{\mathcal{F}_T^{(j)}} = L_{T,j},$$

where  $\mathcal{F}_t := \sigma(X(s), 0 \leq s \leq t)$ ,  $\mathcal{F}_t^{(j)} := \sigma(X^{(j)}(s), 0 \leq s \leq t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Then

$$\mathbb{P}(A) = \tilde{\mathbb{E}}\left[\mathbf{1}_A \cdot \frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}}\Big|_{\mathcal{F}_T}\right] = \tilde{\mathbb{E}}[\mathbf{1}_A \cdot L_T],$$

and hence the small probability  $\mathbb{P}(A)$  in the original probability measure  $\mathbb{P}$  can be approximated by

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \left(\mathbf{1}_{\{X_T^{(j)} \in A\}} \cdot L_{T,j}\right) =: \varphi_A(\tilde{\mathbb{P}}),$$

where  $\tilde{\mathbb{P}}(A)$  is not necessarily so small, that is,



$$\frac{1}{J} \#\{j : 1 \leq j \leq J, X_T^{(j)} \in A\} \xrightarrow[J \rightarrow \infty]{\tilde{\mathbb{P}}\text{-a.s.}} \tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \cdot L_T^{-1}].$$

Then  $\mathbb{E}[f(X) | X_T \in A]$  is estimated by

$$\left( \sum_{j=1}^J L_{T,j} \mathbf{1}_{\{X_T^{(j)} \in A\}} \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^J f(X^{(j)}) L_{T,j} \mathbf{1}_{\{X_T^{(j)} \in A\}} \right) =: \varphi_f(\tilde{\mathbb{P}}).$$

Note that these estimators depend on the choice of the new probability measures  $\tilde{\mathbb{P}}$ .

- What should we choose among possible collection  $\mathcal{P}$  of such probability measures  $\tilde{\mathbb{P}}$ ?

## Minimum variance estimator for probability estimation

The probability estimator  $\varphi_A(\tilde{\mathbb{P}})$  is unbiased, in the sense that  $\tilde{\mathbb{E}}[\varphi_A(\tilde{\mathbb{P}})] = \mathbb{P}(A) = \mathbf{p}$ . Thus its variance is given by

$$\tilde{\mathbb{E}}[(\varphi_A(\tilde{\mathbb{P}}) - \mathbb{P}(A))^2] = \dots = \frac{1}{J} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_T \in A\}} \cdot L_T] - \mathbf{p}^2.$$

A choice of  $\tilde{\mathbb{P}}$  is minimizing the variance or equivalently solving

$$\min_{\tilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_T \in A\}} \cdot L_T].$$

For example, if we take

$$L_T^{(\alpha)} := (\mathbb{E}[e^{\alpha X_T}])^{-1} \cdot e^{\alpha X_T},$$

then we may choose  $\alpha^*$  by solving the minimization problem

$$\min_{\alpha} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_T \in A\}} \cdot e^{\alpha X_T - \kappa_T(\alpha)}],$$

where  $\kappa_T(\alpha) := \log \mathbb{E}[e^{\alpha X_T}]$ , the cumulant of  $X_T$  under  $\mathbb{P}$ .

- Note that the estimator  $\varphi_f(\tilde{\mathbb{P}})$  is not unbiased, in general, so that the optimization problem does not become so simple.

## Empirical Importance Sampling (DEL MORAL ('04))

Let us take the time grids  $\mathcal{T} := \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T\}$ , the subpath  $X_{[0,t_k]} := \{X_t : 0 \leq t \leq t_k\}$  in  $\mathcal{D}_k := D([0, t_k]; \mathbb{R})$ , FEYNMAN-KAC potentials  $G_k : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathbb{R}_+$  for  $k = 1, \dots, K$ . Let us define

$$L_T^{-1} = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} := c_T^{-1} \prod_{k=1}^K G_k(X_{[0,t_k]}),$$

where  $c_T$  is a normalizing constant such that  $\mathbb{E}[L_T] = 1$ .

We also define the sample counterparts:

$$L_{T,j}^{-1} = c_T^{-1} \prod_{k=1}^K G_k(X_{[0,t_k]}^{(j)}),$$

Then we may write

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X) \cdot \mathbf{1}_{\{X_T \in A\}}] &= \mathbb{E}[f(X) \cdot \mathbf{1}_{\{X_T \in A\}} \left( \prod_{k=1}^K G_k(X_{[0, t_k]}) \right)^{-1} \prod_{k=1}^K G_k(X_{[0, t_k]})] \\ &= \eta_K(\tilde{f}) \cdot \prod_{k=1}^K \eta_k(G_k) \quad \text{schematically,} \end{aligned}$$

where

$$\tilde{f} := \tilde{f}(X) := f(X) \cdot \mathbf{1}_{\{X_T \in A\}} \left( \prod_{k=1}^K G_k(X_{[0, t_k]}) \right)^{-1},$$

and

$$\begin{aligned} \eta_k(g) &:= \left( \mathbb{E} \left[ \prod_{\ell=1}^{k-1} G_\ell(X_{[0, t_\ell]}) \right] \right)^{-1} \cdot \mathbb{E} \left[ g(X) \prod_{\ell=1}^{k-1} G_\ell(X_{[0, t_\ell]}) \right] \\ &=: [\gamma_k(1)]^{-1} \gamma_k(g) \end{aligned}$$

for  $k = 1, \dots, K$ .

- The collection  $\{X^{(j)}, j = 1, \dots, J\}$  can be seen as an interacting particle system through a resampling procedure based on the potentials  $G_k, k = 1, \dots, K$ .

At the  $k$ -th step, each particle  $X_{[0, t_{k-1}]}^{(j)}$  is

(i) extended to  $X_{[0, t_k]}^{(j)}$  by independent simulation under  $\mathbb{P}$   
(Mutation Scheme)

and then (ii) resampled with weights (or importance)

$$w_k^{(j)} = G_k(X_{[0, t_k]}^{(j)}), \quad j = 1, \dots, J,$$

with average weights  $w_k^{(J)} := J^{-1} \sum_{j=1}^J G_k(X_{[0, t_k]}^{(j)})$ .  
(Selection Scheme)

Thus  $\mathbb{E}[f(X) \cdot \mathbf{1}_{\{X_T \in A\}}]$  can be estimated from its sample counterpart:

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \tilde{f}(X^{(j)}) \prod_{k=1}^K w_k^{(j)}.$$

- An important case consists of *multiplicative* potentials of the form

$$G_k(X_{[0,t_k]}) = \exp(V(X_{t_k}) - V(X_{t_{k-1}}))$$

for some function  $V(\cdot)$ .

In particular, if  $V(\cdot)$  is chosen as  $V(X_0) = 0$ ,

$$V(X_T) = \left( \prod_{k=1}^{K-1} G_k(X_{[0,t_k]}) \right)^{-1} \quad \text{on} \quad \{X_T \in A\},$$

then the above estimator for  $\mathbb{E}[f(X)|A]$  reduces to

$$\frac{1}{\#\{j : X_T^{(j)} \in A\}} \sum_{\{j : X_T^{(j)} \in A\}} f(X^{(j)}).$$

## Example: mean-field interbank-lending market

On  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  let us consider a banking system  $X := (X(t) := (X_1(t), \dots, X_n(t)), 0 \leq t < \infty)$  of  $n (\geq 2)$  banks.  
 $X_i(t)$ : monetary reserve of bank  $i$  at time  $t$  with SDE

$$\begin{aligned} X_i(t) = X_i(0) &+ \int_0^t \left[ c_i + \sum_{j=1}^n (X_j(u) - X_i(u)) \cdot p_{i,j}(X(u)) \right] du \\ &+ \int_0^t \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(X(u)) \sqrt{X_i(u)} dW_k(u); \\ & \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, n, \quad 0 \leq t < \infty. \end{aligned}$$

Given  $k = 1, \dots, n$  and  $b_1, b_2 > 0$ , what is the conditional probability

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\min_{0 \leq t \leq T} X_i(t) > b_2\}} = k \mid \sum_{i=1}^n X_i(T)/n < b_1 \right) ?$$

$$\begin{aligned}
X_i(t) &= X_i(0) + \int_0^t \left[ c_i + \sum_{j=1}^n (X_j(u) - X_i(u)) \cdot p_{i,j}(X(u)) \right] du \\
&\quad + \int_0^t \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(X(u)) \sqrt{X_i(u)} dW_k(u); \\
&\hspace{15em} i = 1, \dots, n, \quad 0 \leq t < \infty.
\end{aligned}$$

- Here  $W := ((W_1(t), \dots, W_d(t)), 0 \leq t < \infty)$  is the standard  $d$ -dimensional Brownian motion,  $c_i$  is a nonnegative constant,  $x := (X_1(0), \dots, X_n(0)) \in [0, \infty)^n$  is an initial reserve and
- $p_{i,j} : [0, \infty)^n \rightarrow [0, 1]$  is bounded,  $\alpha$ -Hölder continuous on compact sets in  $(0, \infty)^n$  for some  $\alpha \in (0, 1]$ .
- $a(\cdot) := (a_{ij}(\cdot)) = \sum_{k=1}^n (\sigma_{ik} \sigma_{jk})(\cdot)$  is strictly positive definite,  $\alpha$ -Hölder continuous on compact sets for some  $\alpha \in (0, 1]$ .



**Proposition**[FOUQUE & ICHIBA (2013)]. Let us assume that the lending preferences  $\{p_{i,j}(\cdot), 1 \leq i, j \leq n\}$  that for some indexes  $(1, \dots, k)$

$$\sup_{x \in [0, \infty)^n} |x_i - x_j| \cdot p_{i,j}(x) < \frac{1}{k(n-1)} \left(2 - \sum_{i=1}^k c_i\right) =: 2c_0$$

for  $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$ . Then these  $k$  banks are bankrupt together at some time  $t \in (0, \infty)$  almost surely, i.e.,

$$\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1,$$

where  $\tau := \inf\{t : X_1(t) = X_2(t) = \dots = X_k(t) = 0\}$  for  $x \in [0, \infty)^n$ .

Proof is based on comparison theorem by IKEDA & WATANABE

('77). The partial sum  $\mathcal{X}_k(\cdot) = \sum_{i=1}^k X_i(\cdot)$  is dominated by a squared Bessel process with dimension strictly less than 2.

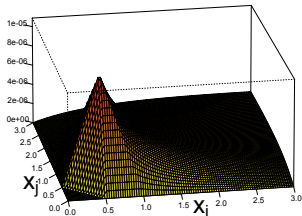
Note that there are possibly many choices of the lending preference that satisfy the above inequality. For example,

$$p_{i,j}(\cdot) \equiv 0; \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Another example is

$$\frac{p_{i,j}(x)}{c_1} = \begin{cases} 2(x_i \wedge x_j) / (x_i + x_j)^2 & \text{if } x_i + x_j \geq 1, \\ 1 - 2(x_i \wedge x_j) & \text{if } x_i \wedge x_j \geq 1/2, 1/2 \leq x_i + x_j < 1, \\ 2(x_i + x_j) - 1 & \text{if } x_i \wedge x_j \leq 1/2, 1/2 < x_i + x_j < 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

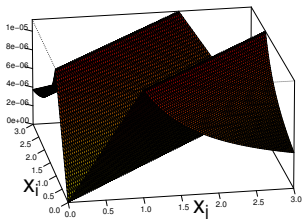
where the constant  $c_1$  is less than  $c_0$ .



Similarly, given a nonnegative function  $h : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  which is  $\alpha$ -Hölder continuous on compact sets in  $(0, \infty)$  for some  $\alpha \in (0, 1]$ , we can take

$$p_{i,j}(x) = h(|x_i - x_j|); \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty)^n, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

The condition holds if we choose  $c_1 < c_0$  and  $h(x) = c_1/x$  for  $x \geq 1$  and  $h(x) = c_1x$  for  $x \leq 1$ .



## Interacting particle system algorithm [DEL MORAL AND GARNIER ('05)]

Intuition: consider a background MC  $(\xi_k)_{k \geq 0}$  with transition kernel  $K_k(\xi_{k-1}, \xi_k)$ , and its history  $\eta_k := (\xi_0, \dots, \xi_k)$ ,  $k \geq 0$ . Given  $f_k : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , define

$$\gamma_k(f_k) = \mathbb{E} \left( f_k(\eta_k) \cdot \prod_{1 \leq \ell < k} G_\ell(\eta_\ell) \right)$$

with a multiplicative potential function, and its normalized measure

$$\nu_k(f_k) = \frac{\gamma_k(f_k)}{\gamma_k(1)}.$$

Since  $\gamma_{k+1}(1) = \gamma_k(G_k) = \nu_k(G_k)\gamma_k(1) = \dots = \prod_{\ell=1}^n \nu_\ell(G_\ell)$ ,

$$\mathbb{E}(f_k(\eta_k)) = \gamma_k(f_k \prod_{1 \leq \ell < k} (G_\ell)^{-1}) = \nu_k(f_k \prod_{1 \leq \ell < k} (G_\ell)^{-1}) \prod_{1 \leq \ell < n} \nu_\ell(G_\ell).$$

Here we can use a recursion:  $\eta_1(\cdot) = K_1(\xi_0, \cdot)$ ,

$$\nu_k(\cdot) = \int \nu_{k-1}(d\eta_{k-1}) \frac{G_{k-1}(\eta_{k-1})}{\nu_{k-1}(G_{k-1})} K_k(\eta_{k-1}, \cdot).$$

Dividing the time interval  $[0, T]$  into  $L$  equal subintervals  $[(\ell - 1)T/L, \ell T/L]$  with  $\ell = 1 \dots, L$ , we simulate  $M$  random chains

$$\{Y_\ell^{(j)} = (\widehat{X}^{(j)}(\ell T/L), \widehat{m}^{(j)}(\ell T/L))\}_{1 \leq \ell \leq L; \quad j = 1, \dots, M},$$

where  $\widehat{X}^{(j)}(\cdot)$  is the  $j$ th simulation of  $X(\cdot)$  and  $\widehat{m}^{(j)}$  is the  $j$ th simulation of the vector  $m(\cdot) := (m_1(\cdot), \dots, m_n(\cdot))$  of the running minimum

$$m_i(t) = \min_{0 \leq s \leq t} X_i(s), \text{ for } 1 \leq i, j \leq n, \quad 0 \leq t \leq T.$$

After initializing the chain, for each  $\ell = 1, \dots, L$ , repeat the following selection and mutation stages

- (Selection Stage). Sampling  $M$  new particles from  $\{Y_\ell^{(j)}\}_{1 \leq j \leq M}$  with Gibbs weights

$$\left( \prod_{i=1}^n \gamma_{i,\ell}^{(j)} \right) \left( \sum_{j=1}^M \prod_{i=1}^n \gamma_{i,\ell}^{(j)} \right)^{-1} \quad \text{where}$$

$$\gamma_{i,\ell}^{(j)} := \left[ \frac{\min(\widehat{m}_i^{(j)}((\ell-1)T/L), \widehat{X}_i^{(j)}(\ell T/L))}{\widehat{m}_i^{(j)}((\ell-1)T/L)} \right]^{-\alpha},$$

for each  $j = 1, \dots, M$  with some  $\alpha > 0$ .

- (Mutation Stage). Running Euler scheme to get the new value  $Y_{\ell+1}^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, M$ , starting from the new particles sampled in the above.

The probability estimate of  $\mathbb{P}_x(\mathbf{n} = k)$  is given by

$$\widehat{\mathbb{P}}_x(\mathbf{n} = k) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left( \mathbf{1}_{\{\widehat{\mathbf{n}}^{(j)}=k\}} \prod_{i=1}^n \left[ \frac{m_i^{(j)}(T)}{m_i^{(j)}(0)} \right]^\alpha \right) \cdot \left[ \prod_{\ell=0}^{L-1} \left( \frac{1}{M} \sum_{a=1}^M \prod_{i=1}^n \gamma_{i,\ell}^{(a)} \right) \right];$$

for  $k = 1, \dots, n$ , where  $\widehat{\mathbf{n}}^{(j)}$  is the corresponding number to  $\mathbf{n}$  in the  $j$ th simulation for  $j = 1, \dots, M$ .

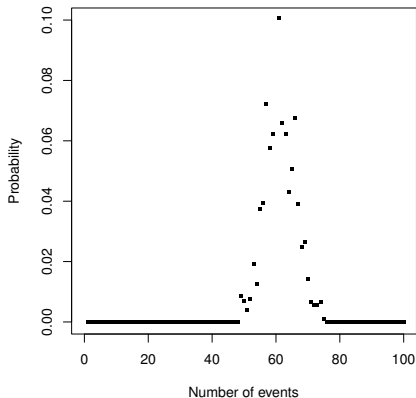
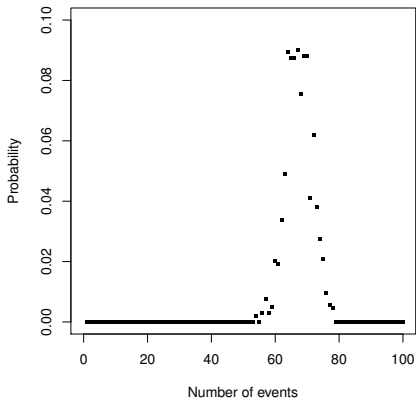
## Extreme examples

Set  $\mathbf{x} = (1, \dots, 1)$ ,  $\delta = 2$  and  $p_{i,j}(\cdot)$  specified as in the first picture,  $T = 1$ ,  $n = 100$ ,  $M = 1000$  (# copies),  $L = 10$  (# subintervals of Time),  $\alpha = 0.0001$ , and run the system with the sub-subinterval for the Euler scheme in the mutation stage as 0.001 to compute

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{n} = k) = \mathbb{P}_{\mathbf{x}}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\min_{0 \leq s \leq T} X_i(s) \leq b\}} = k\right); \quad k = 1, 2, \dots$$



$b = 0.1$  (left),  $b = 0.001$  (right).



For error analysis and comparisons with other methods in this context see [CARMONA & CRÉPY \(2009\)](#). □

## Brownian motion plus Poisson jumps

To illustrate conditional distributions for heavy-tailed systems, we shall consider the rare event

$$A := \{X_T \in [a - \delta, a + \delta]\}$$

for the process

$$X_t = W_t - kN_t, \quad X_0 = 0,$$

where  $W$  is Brownian motion and  $N$  is an independent Poisson process with intensity  $\lambda > 0$ .

Note that  $A = \cup_{\ell=0}^{\infty} \{N_T = \ell, W_T \in [a + k\ell - \delta, a + k\ell + \delta]\}$ , and hence with the cumulative distribution function  $\Phi(\cdot)$  of the standard normal, we obtain

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^\ell}{\ell!} \cdot \left[ \Phi\left(\frac{a + k\ell + \delta}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(\frac{a + k\ell - \delta}{\sqrt{T}}\right) \right].$$

A suitable empirical change of measure is of the bivariate form

$$L_t(\alpha_W, \alpha_N) := \exp\left(\alpha_W W_t - \alpha_N k N_t - \kappa_T(\alpha_W, \alpha_N)\right),$$

where

$$\kappa_T(\alpha_W, \alpha_N) = -\frac{1}{2}\alpha_W^2 t + \lambda t(e^{-\alpha_N k} - 1); \quad 0 \leq t \leq T.$$

Under the resulting importance sampling measure  $\mathbb{P}^{(\alpha_W, \alpha_N)}$ ,  $(W_t)$  has drift  $\alpha_W$  and  $(N_t)$  has intensity  $\lambda e^{-\alpha_N k}$ . This implies

$$\mathbb{E}^{(\alpha_W, \alpha_N)}[X_T] = \alpha_W T + \lambda T k e^{-k\alpha_N}.$$

- One can compute the variance of the estimator for  $\mathbb{E}[f(X) \mathbf{1}_{X_T \in A}]$  and minimizing it.
- One can compute the conditional intensity given the set  $\{X_T \in A\}$ .

## One-dimensional case: use of Markov Bridge

Let us consider the first passage time  $\tau_0 := \inf\{t : X_t = 0\}$  for one-dimensional diffusion

$$dX_t = a(X_t)dt + dW_t; \quad X_0 = x, \quad 0 \leq t \leq T$$

where  $a$  is assumed to be continuously differentiable, and

$$\int_0^\infty \exp\left(-2 \int_0^w a(z)dz\right)dw = \infty.$$

By the GIRSANOV-MARUYAMA change of measure

$$\mathbb{P}_x(\tau_0 \leq t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_x} [Z_{t \wedge \tau_0} \mathbf{1}_{\{\tau_0 \leq t\}}],$$

where  $d\mathbb{Q}_x/d\mathbb{P}_x|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$ ,  $0 \leq t \leq T$  with

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t a(X_u)dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t a^2(X_u)du\right),$$

moreover, under  $\mathbb{Q}_x$ ,  $X$  is a Brownian motion. Hence the density function of  $\tau_0$  is given by

$$q_x(t) := \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{2t}},$$

and the density  $p_x(\cdot)$  of  $\tau_0$  under  $\mathbb{P}_x$  is given by

$$p_x(t) = q_x(t) \exp\left(-\int_0^x a(v)dv\right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_x} \left[ \exp\left(-\int_0^{\tau_0} \gamma(X_u)dt\right) \middle| \tau_0 = t \right],$$

where  $\gamma(x) = (a^2(x) + a'(x)) / 2$  for  $x > 0$ .

Under  $\mathbb{Q}_x$ , given  $\tau_0 = t$ , the time reversal  $X_{\tau_0-s}$ ,  $0 \leq s \leq t$  is the three dimensional BESSEL bridge from the level 0 to  $x$   
(REVUZ & YOR (1999)).

This implies that

$$p_x(t) = q_x(t) \exp\left(-\int_0^x a(v)dv\right) \mathbb{E}_{BB^3} \left[ \exp\left(-\int_0^1 \gamma\left(\left|ux\mathbf{e}_1 + \sqrt{t}\beta_u\right|\right)du\right) \right],$$

where  $\beta$  is the three dimensional Brownian bridge, and  $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1)$ .

When  $A \subset (-\infty, 0]$ , with this idea we may compute the conditional expectation

$$\mathbb{E}[f(X)|X_T \in A] = \int_0^T \mathbb{E}[f(X)|\tau_0 = t, X_T \in A] p_x(t) dt,$$

where  $\mathbb{E}[f(X)|\tau_0 = t, X_T \in A]$  may be estimated by the empirical importance sampling as we have seen before, and

$$p_x(t) = q_x(t) \exp\left(-\int_0^x a(v)dv\right) \mathbb{E}_{BB^3} \left[ \exp\left(-\int_0^1 \gamma\left(\left|ux\mathbf{e}_1 + \sqrt{t}\beta_u\right|\right) du\right)\right]$$

is approximated by its sample counterpart

$$\widehat{p}_x^{(J)}(t) := q_x(t) \exp\left(-\int_0^x a(v)dv\right) \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \exp\left(-\int_0^1 \gamma\left(\left|ux\mathbf{e}_1 + \sqrt{t}\beta_u^{(j)}\right|\right) du\right),$$

where  $\beta^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, J$  is the I.I.D. copy of three dimensional Brownian bridge.

- If the functional  $f$  on the sample paths depends **only on the negative paths after  $\tau_0$** , e.g.,

$$f(X) := \min_{0 \leq s \leq T} (-X(s))^+,$$

(local time for the reflected process in the sense of SKOROKHOD), and

$$f(X) := \int_0^T (-X_s) \mathbf{1}_{\{X_s \leq 0\}} ds,$$

(cumulative deficit amounts)

then  $\mathbb{E}[f(X) | \tau_0 = t, X_T \in A]$  can be computed by the empirical importance sampling for  $X$  on the time interval  $(\tau_0, T]$ .

- Note that one can extend our consideration for the diffusion

$$dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t; \quad Y_0 = y, 0 \leq t \leq T$$

and the first passage time of level  $\ell (< y)$ , where  $1 / \sigma(\geq 0)$  is locally integrable. This is because the transformation

$$X_t := \int_{\ell}^{Y_t} \frac{1}{\sigma(z)} dz.$$

- The approximation of  $p_x(\cdot)$  by  $\widehat{p}_x^{(J)}(\cdot)$  converges in the order of  $1/\sqrt{J}$ . Indeed, one can show that

$$\sqrt{J}|\widehat{p}_x^{(J)}(t) - p_x(t)|$$

converges to the centered Gaussian process with covariance

$$\Gamma(s, t) = p_x(s)p_x(t)e^{-2\int_0^x a(v)dv}\text{Cov}_{BB^3}(e^{-sI(s)}, e^{-tI(t)}),$$

where  $I(s) := \int_0^1 \gamma(|ux\mathbf{e}_1 + \sqrt{s}\beta_u|)du$ , and in particular,

$$\sqrt{J} \max_{0 \leq t \leq T} |\widehat{p}_x^{(J)}(t) - p_x(t)|$$

is bounded in probability (cf. ICHIBA & KARDARAS ('09)).



- For the multidimensional case of the form

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x,$$

we may consider DOOB's h-transform and the (time-reversed) Markov bridge law : given  $X_t = a$ ,

$$dX_t^0 = b^0(t, X_t^0)dt + \sigma(t, X_t^0)dW_t,$$

where

$$b^0(t, x) := b(t, x) + [\sigma\sigma^*](t, x) \nabla_x \log p(t, x, T, a),$$

for the transition probability  $p(t, x, T, a)$ .

- Similar calculation can be done for LÉVY processes, e.g.,  $X_t = W_t - kN_t$ , where  $W$ . is the Brownian motion and  $N$ . is Poisson process, independent of  $W$ .

(see [PRIVault & ZAMBRINI \(2004\)](#) for Markovian bridges).

## Summary:

Computation of conditional expectation, given the condition that has only a small probability.

- Use of Empirical Importance Sampling and Interacting Particle System
- Use of Time-reversal and Markov bridge

- Further topics:

The mean field approximation (MCKEAN-VLASOV type limit) of the system as  $n \rightarrow \infty$  and estimation of conditional probability.

Part of research is supported by grants NSF -DMS-13-13373 and DMS-16-15229.

When  $n \rightarrow \infty, \dots$

For example, with  $a_{i,j} = -\mathbf{1}_{\{j=i+1\}} + \mathbf{1}_{\{i=j\}}$  for  $i, j \in \mathbb{N}$ , the distribution of the first  $k$  components  $(X_1(\cdot), \dots, X_k(\cdot))$  of the large system of OU processes  $(X_1(\cdot), \dots, X_n(\cdot))$ :

$$dX_i(t) = (X_{i+1}(t) - X_i(t))dt + dW_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$dX_n(t) = -X_n(t)dt + dW_n(t); \quad t \geq 0,$$

becomes, in the limit as  $n \rightarrow \infty$ , the Gaussian process represented as

$$Y_i(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} Y_{i+1}(s) ds + \int_0^t e^{-(t-s)} dB_i(s), \quad i = 1, \dots, k-1,$$

$$Y_k(t) = e^{-t} \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t \frac{e^s (t-s)^i}{i!} d\beta_i(s); \quad t \geq 0,$$

where  $(B_1(\cdot), \dots, B_{k-1}(\cdot), \beta_0(\cdot), \beta_1(\cdot), \dots)$  are independent Brownian motions.

The covariance structure of  $Y_k(\cdot)$  is

$$\text{Cov}(Y_k(s), Y_k(t)) = e^{-(t-s)} \int_0^t e^{-2u} I_0(\sqrt{(t-s+u)u}) du,$$

$$I_\nu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (x/2)^{2k+\nu} / (k! \Gamma(\nu + k + 1)); \quad x > 0, \nu > -1.$$

In particular, the variance

$$\text{Var}(Y_k(t)) = te^{-2t}(I_0(2t) + I_1(2t)); \quad t \geq 0,$$

and hence for large  $t \rightarrow \infty$   $\text{Var}(Y_k(t)) = O(\sqrt{t})$ ;  $k \in \mathbb{N}_0$ .

It suggests some connection to fractional OU and fractional BM.

# Discretization Self-Exciting Peaks Over Threshold models

栗栖大輔

東京大学 経済学研究科 D1

2016 年 12 月 22 日

研究集会

「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再帰的事象」

# 概要

- 導入
- 点過程の離散観測
- マーク付き Hawkes 過程
- SEpot モデル
- 先行研究との関連
- 主結果
- 数値実験
- まとめ

# 導入

- 高頻度データの統計分析における仮定:
  - (A) 観測データはある真の確率過程 (semimartingale) の離散観測
- 点過程の理論に基づく (高頻度データの) 実証分析の仮定:
  - (B) 観測データは真の点過程からの実現値
- データは点過程 (semimartingale) を含む連続時間の確率過程からの離散観測であるという立場に立つと, (B) の考え方は正確ではない.

- 高頻度観測  $\Delta_n \rightarrow 0$  における点過程モデリングの正当化
  - SEpot の離散観測に対応するモデルは何か？
  - 離散時間モデルの漸近的挙動の理論的考察・数値実験
  - self-damping の場合の漸近的挙動 (数値実験)



## 点過程の離散観測

- まず点過程の離散観測における一般的な枠組みを考える. 観測期間における点過程  $N$  の jump time を  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{N(T)} \leq T$  とする.

- データの観測間隔が  $\Delta$  であるとき,

$$J_k = \#\{i : t_i \in ((k-1)\Delta, k\Delta]\}.$$

- 補助的な確率過程を考える:

$$N^\Delta(t) = N((k-1)\Delta), \quad (k-1)\Delta \leq t < k\Delta.$$

## 点過程の離散観測

- 一般に  $N$  の経路ごとに以下の関係が成り立つ:

$$\sup_{(k-1)\Delta < t \leq k\Delta} |N^\Delta(t) - N(t)| \leq J_k$$

さらに前述の議論により,  $\tilde{\Delta}$  を十分小さくとると,

$$\sup_{0 < \Delta < \tilde{\Delta}} \sup_{0 \leq t \leq T} |N^\Delta(t) - N(t)| \leq 1$$

が成り立つ.

## 点過程の離散観測

- 金融時系列データ (ex. negative return) を点過程で分析する際、観測間隔  $\Delta$  のデータに関して、時刻  $k\Delta$  での時系列の値が閾値  $u_0$  を超えていれば、jump が発生したとみなし、データそのものが点過程に従っているとして分析する方法が (B) の方法.
- しかし、観測期間  $[0, T]$  において閾値  $u_0$  を超える事象が点過程に従っているとすると、(B) の考え方では離散観測された点過程を点過程としてモデル化しているため、現実とは齟齬が生じる.

$$\tilde{N}^\Delta(t) = \sum_{1 \leq m \leq k-1} \frac{N(((m-1)\Delta, m\Delta])}{J_m}, \quad (k-1)\Delta \leq t < k\Delta.$$

## 点過程の離散観測

- 実際, 例えば観測点  $k\Delta$  での値のみがデータとして利用可能な場合, 区間  $((k-1)\Delta, k\Delta)$  においてジャンプがあったとしても  $k\Delta$  での値が閾値を下回っていた場合, 区間  $((k-1)\Delta, k\Delta]$  ではジャンプは無かったと判定されてしまう.
- 区間  $((k-1)\Delta, k\Delta]$  におけるデータの最大値や最小値も利用可能な場合はそのようなことは起こらない:

$$\begin{aligned} J_k > 0 &\Leftrightarrow N \text{ が } ((k-1)\Delta, k\Delta] \text{ で少なくとも 1 回ジャンプ} \\ &\Leftrightarrow \tilde{N}^\Delta(k\Delta) - \tilde{N}^\Delta((k-1)\Delta) = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ.

# マーク付き Hawkes 過程

## Definition (マーク付き Hawkes 過程の強度関数)

$$\begin{aligned}\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) &= \left( \eta + \int_{-\infty}^t \int_E g(t-s, z) N(ds \times dz) \right) P(\tilde{Z}_t \in E | \mathcal{H}_t^N) \\ &= \left( \eta + \int_{-\infty}^t g(t-s, \tilde{Z}_s) N_g(ds) \right) P(\tilde{Z}_t \in E | \mathcal{H}_t^N),\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_t^N$ :  $N$  の過去の情報,  $E = [u, \infty)$ ,  $\eta > 0$ ,

$\tilde{Z}_t | \mathcal{H}_t^N \sim F(\cdot | \mathcal{H}_t^N)$ ,

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ : 核関数,

$N_g(ds) = N(ds \times E)$ : ground process.

- 特に,  $g(t, z) = h(t)c(z)$  と書けるとき,  $h$  を減衰関数,  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  をインパクト関数という.

## SEPOT モデル

Self-exciting peaks over threshold (SEPOT) model は金融時系列の点過程モデルとして知られている. このモデルでは閾値  $u_0$  を設定し, 閾値を超過したイベントをカウントする 閾値超過のレートはマーク付き Hawkes 過程に従うとする:

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \left( \eta + \int_{-\infty}^t h(t-s, \tilde{Z}_s) N_g(ds) \right) (1 - F(u)),$$

$$E = [u, \infty), \quad u \geq 0,$$

$$\tilde{Z}_s = (Z_s - u)^+: \quad Z_s \stackrel{i.i.d.}{\sim} F, \text{ 非負確率変数列, } a^+ = \max(a, 0).$$

# SEPOT モデル

例 1 : Models with exponential decay and generalized linear impact function:

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \left( \eta_0 + \eta_1 \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)} \left[ (\tilde{Z}_s)^\delta \wedge L \right] N_g(ds) \right) (1 + \xi u)^{-1/\xi},$$

$E = [u, \infty)$ ,  $u \geq 0$ .

$\tilde{Z}_s = (Z_s - u)^+$ ,  $Z_s \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{GPD}(\xi, 1)$ ,

$\eta_0, \eta_1, \gamma > 0$ ,  $L > 1$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$ : 定数.

- このモデルは国友・江原・栗栖 (2016) で複数の金融市場の因果性の分析に利用されている.

## SEPOT モデル

例 2 : Models with exponential decay and non-linear impact function:

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \left( \eta_0 + \eta_1 \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-s)} \left[ \left( 1 + G^{\leftarrow}(F(\tilde{Z}_s)) \right) \wedge L \right] N_g(ds) \right) \times (1 + \xi u)^{-1/\xi},$$

$E = [u, \infty)$ ,  $u \geq 0$ ,

$\tilde{Z}_s = (Z_s - u)^+$ ,  $Z_s \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{GPD}(\xi, 1)$ ,

$\eta_0, \eta_1, \gamma > 0$ ,  $L > 1$ : 正定数,

$F$ : CDF of  $\text{GPD}(\xi, u, 1)$ ,

$G^{\leftarrow}(\cdot)$ : 平均  $\delta$  非負確率変数の分布関数  $G$ .

- このモデルは Grothe et al. (2014) (の special case) で将来の資産価格のジャンプに予測に利用されている。



## 先行研究との関連

点過程の弱収束 :

- $E$ : 完備可分距離空間,  $(E, \mathcal{E})$ : 可測空間,
- $M_p(E)$ :  $E$  上の点測度,
- $\mathcal{M}_p(E)$ :  $M_p(E)$  上の  $\sigma$ -field,
- $N : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (M_p(E), \mathcal{M}_p(E)), P_N = P \circ N^{-1}$ ,

$$N_n \xrightarrow{w} N \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad P_{N_n} \xrightarrow{w} P_N$$

## 先行研究との関連

- $F \in D(G_\xi)$ : 極値分布  $G_\xi$  の吸引域.

$$X \sim F \in D(G_\xi)$$

$$\Rightarrow \exists \{a_n\}, \{b_n\}, a_n \in \mathbb{R}, b_n > 0 \text{ s.t.}$$

$$nP \left( \frac{X - a_n}{b_n} \geq u \right) = n(1 - F(a_n u + b_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 + \xi u)^{-1/\xi}.$$

## 先行研究との関連

主な結果を述べる前に、先行研究の結果を紹介。

Proposition 1 (Theorem 6.3 in Resnick(2007))

$X_k \stackrel{i.i.d.}{\sim} F \in D(G_\xi)$ . 以下のマーク付き点過程を考える:

$$N_E^{\Delta_n}((a, b]) = \# \left\{ k : \left( k\Delta_n, \frac{X_k - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n]^{-1}}} \right) \in (a, b] \times E, \right\},$$

$a < b$ ,  $E = [u, \infty)$ ,  $\{a_n\}$  and  $\{b_n\}$ : centering and scaling sequences of  $G_\xi$ .

このとき,  $N^{\Delta_n} \xrightarrow{w} N$  in  $M_p([0, \infty) \times E)$  as  $\Delta_n \rightarrow 0$ .  $N$  は以下の強度をもつ

Poisson 過程:

$$\lambda(t|\mathcal{H}_t^N) = (1 + \xi u)^{-1/\xi}.$$

## 先行研究との関連

Proposition 1 は以下のように考えることが出来る:

$$N_E^{\Delta_n}((a, b]) = \sum_{k: k\Delta_n \in (a, b]} \tilde{\epsilon}_n(k) \approx \sum_{k: k\Delta_n \in (a, b]} \epsilon_n(k), \quad E = [u, \infty),$$
$$\tilde{\epsilon}_n(k) \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Bin} \left( 1, P \left( \frac{X_k - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u \right) \right),$$
$$\epsilon_n(k) \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Poi} \left( P \left( \frac{X_k - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u \right) \right).$$

従って,  $\{k\Delta_n, b_{[\Delta_n^{-1}]}^{-1}(X_k - a_{[\Delta_n^{-1}]})\}_{1 \leq k \leq [\Delta_n^{-1}]}$  を観測データとみると, これは強度  $\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = (1 + \xi u)^{-1/\xi}$  をもつ斉時 Poisson 過程 (non self-excited Hawkes) からの離散観測とみることが出来る.

# 先行研究との関連

## ■ Poisson 過程

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \underbrace{1}_{\text{イベント発生レート}} \times \underbrace{(1 + \xi u)^{-1/\xi}}_{\text{ジャンプ分布}}.$$

## ■ SEPOT モデル

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \underbrace{\left( \eta + \int_{-\infty}^t h(t-s, \tilde{Z}_s) N_g(ds) \right)}_{\text{イベント発生レート}} \times \underbrace{(1 + \xi u)^{-1/\xi}}_{\text{ジャンプ分布}}.$$

# 主結果

- $N$ : マーク付き Hawkes 過程,

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \left( \eta + \int_{-\infty}^t c(\tilde{Z}_s) h(t-s) N_g(ds) \right) (1 + \xi u)^{-1/\xi}.$$

- $X_E^{\Delta_n}$ :  $N$  の離散観測:

$$\begin{aligned} X_E^{\Delta_n}(k) &= N(\{k\Delta_n\} \times E) - N(\{(k-1)\Delta_n\} \times E) \\ &= N_g(((k-1)\Delta_n, k\Delta_n]), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

# 主結果

$$\begin{aligned} & \lambda_E((k-1)\Delta_n | \mathcal{H}_{(k-1)\Delta_n}^N) \\ &= \left( \eta + \int_{-\infty}^{(k-1)\Delta_n} c(\tilde{Z}_s) h((k-1)\Delta_n - s) N_g(ds) \right) (1 + \xi u)^{-1/\xi} \\ &\approx \left( \eta + \sum_{m=1}^{\infty} c(\tilde{Z}_{k-m}) h(m\Delta_n) X_E^{\Delta_n}(k-m) \right) \Delta_n^{-1} P\left( \frac{X_1 - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u \right). \end{aligned}$$

ここで,

$$X_E^{\Delta_n}(k) = N(((k-1)\Delta_n, k\Delta_n] \times E) = N_g(((k-1)\Delta_n, k\Delta_n]).$$

# 主結果

Proposition 1 の拡張として以下の確率過程を考える:

$$X_E^{\Delta_n}(k) = \epsilon_n(k) + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ h(l\Delta_n) c(\tilde{Z}_{k-l}) P\left(\frac{X_{(k-l)} - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u\right) \right] \circ X_E^{\Delta_n}(k-l), \quad (1)$$

$X_k \stackrel{i.i.d.}{\sim} F \in D(G_\xi)$ ,  $\tilde{Z}_k \stackrel{i.i.d.}{\sim} GPD(\xi, 1)$ ,

$\epsilon_n(k) \stackrel{i.i.d.}{\sim} Poi(\eta P(b_{[\Delta_n^{-1}] }^{-1}(X_1 - a_{[\Delta_n^{-1}]}) \geq u))$  with  $\eta > 0$ ,

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ : piecewise continuous,  $h(t) = 0$ ,  $t < 0$ ,

$E[c(\tilde{Z}_1)] \int_0^\infty h(t) dt < 1$ .

$E[c(\tilde{Z}_1)^2] < \infty$  を仮定.



## 主結果

このとき,  $\mathcal{F}_k^{\Delta_n} = \sigma(X_E^{\Delta_n}(m), \tilde{Z}_m : m \leq k)$  とすると,

$$\begin{aligned} & E \left[ \frac{X_E^{\Delta_n}(k)}{\Delta_n} \middle| \mathcal{F}_{k-1}^{\Delta_n} \right] \\ &= \left( \eta + \sum_{m=1}^{\infty} c(\tilde{Z}_{k-m}) h(m\Delta_n) X_E^{\Delta_n}(k-m) \right) \Delta_n^{-1} P \left( \frac{X_1 - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u \right). \end{aligned}$$

更に,

$$E \left[ \frac{X_E^{\Delta_n}(k)}{\Delta_n} \middle| \mathcal{F}_{k-1}^{\Delta_n} \right] \approx E \left[ \frac{N(dt \times E)}{dt} \middle| \mathcal{H}_t^N \right] = \lambda_E(t | \mathcal{H}_t^N).$$

$X_E^{\Delta_n}$  は random coefficient integer-valued autoregressive (RCINAR( $\infty$ )) process.

# 主結果

## Definition (RCINAR( $\infty$ ))

$\epsilon_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Poi}(\alpha_0)$ ,  $Z_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} F$  with  $E[Z_n^2] < \infty$ ,  
 $\alpha_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : piecewise continuous,  $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} X_n &= \epsilon_n + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(Z_{n-k}) \circ X_{n-k} \\ &= \epsilon_n + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{X_{n-k}} \xi_l^{n,k}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2)$$

$\xi_l^{n,k} \sim \text{Poi}(\alpha_k)$  かつ相異なる  $l, n, k$  に対して独立.

作用素  $\circ$  は *thinning operator*,  $\alpha \circ X$  は  $X$  個の *i.i.d. Poi*( $\alpha$ ) の和で定義される. ( $\alpha < 0$  のときは  $\alpha \circ X = -(-\alpha) \circ X$  と解釈する)

# 主結果

## Proposition 2 (RCINAR( $\infty$ ) の平均定常性)

$\alpha_0 \geq 0$ ,  $\alpha_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  は以下を満たす:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} E[\alpha_k(Z_k)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} |E[\alpha_k(Z_k)]| < 1.$$

このとき, (2) は平均定常で  $E[X_n] = \alpha_0 / (1 - \sum_{k=1}^{\infty} E[\alpha_k(Z_k)])$ .

# 主結果

## Proposition 3 (RCINAR( $\infty$ ) の共分散の評価)

$(X_n)$ : Proposition 2 の条件を満たす RCINAR( $\infty$ ).

$$|\alpha_k(\cdot)| \leq L_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$K_L = \sum_{k=1}^{\infty} L_k < 1$$

を仮定. このとき, RCINAR( $\infty$ ) は共分散定常かつ,

$R(m) = \text{Cov}(X_n, X_{n+m})$  として,

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} R(m) \right| \leq \frac{\alpha_0}{(1 - K_L)^3}.$$

# 主結果

- Proposition 2 を利用すると,

$$E[X_E^{\Delta_n}(k)] = \frac{\eta \Delta_n P_n}{1 - E[c(\tilde{Z}_1)] P_n \sum_{l=1}^{\infty} \Delta_n h(l \Delta_n)} = O(\Delta_n),$$

$$P_n = \Delta_n^{-1} P(b_{[\Delta_n^{-1}]}^{-1}(X_1 - a_{[\Delta_n^{-1}]}) \geq u).$$

- Proposition 3 を利用すると,

$$\text{Var}(X_E^{\Delta_n}(k)) = O(\Delta_n), \quad \sum_{m=0}^{\infty} R^{\Delta_n}(m) = O(\Delta_n).$$

$$R^{\Delta_n}(m) = \text{Cov}(X_E^{\Delta_n}(k), X_E^{\Delta_n}(k + m)).$$

# 主結果

## Proposition 4 (RCINAR( $\infty$ ) の RCAR( $\infty$ ) 表現)

$(X_n)$  を Proposition 2 の条件を満たす RCINAR( $\infty$ ) とする.  
このとき

$$u_n = X_n - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(Z_{n-k})X_{n-k} - \alpha_0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

は以下を満たす定常確率過程  $(u_n)$ :

$$E[u_n u_m] = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \frac{\alpha_0}{1-K} & n = m, \end{cases}$$

$$K = \sum_{k=1}^{\infty} E[\alpha_k(Z_k)].$$

# 主結果

- $k > p$  に対して  $\alpha_k \equiv 0$  ならば, random coefficient AR( $\infty$ ) (RCAR( $\infty$ )) 過程 (3) は RCAR( $p$ ) 過程となる. この場合

$$Y_n = (X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-p+1})^\top, \quad \xi_n = (u_n, 0, \dots, 0)^\top,$$
$$c_0 = (a_0, 0, \dots, 0)^\top, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_1(Z_{n-1}) & a_2(Z_{n-2}) & \cdots & a_p(Z_{n-p}) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, (3) は RCAR(1) 過程の形で書ける:

$$Y_n = c_0 + A_n Y_{n-1} + \xi_n.$$

# 主結果

- Boshnakov(2011) では RCINAR( $p$ ) が定常であるための必要十分条件が議論されている. 我々のケースでは, 平均定常であるための必要十分条件は

$$\text{spr}(E[A_n]) < 1$$

である. またこの条件は RCAR( $p$ ) 過程の定常性の条件と同じ (Nicholls and Quinn(1982)). Proposition 2 の仮定の下では  $\text{spr}(E[A_n]) < 1$  が成り立つ.



# 主結果

また RCINAR( $p$ ) が共分散定常であるための必要十分条件は

$$\text{spr}(E[A_n \otimes A_n]) < 1.$$

このことに関して以下の結果が得られる.

## Proposition 5 (RCINAR( $p$ ) の共分散定常性)

以下の条件を満たす RCINAR( $p$ ) は共分散定常 :

$$0 \leq \sum_{k=1}^p E[\alpha_k(Z_k)], \quad \sum_{k=1}^p |E[\alpha_k(Z_k)]| < 1, \quad \sup_{1 \leq k \leq p} E[\alpha_k(Z_k)^2] < 1.$$

# 主結果

SE POT モデルの離散化の話に戻る. RCINAR( $\infty$ )

$$X_E^{\Delta_n}(k) = \epsilon_n(k) + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ h(l\Delta_n) c(\tilde{Z}_{k-l}) P\left(\frac{X_{(k-l)} - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u\right) \right] \circ X_E^{\Delta_n}(k-l)$$

を用いて以下の点過程を考える:

$$\tilde{N}_E^{\Delta_n}((a, b]) = \sum_{k: k\Delta_n \in (a, b]} \tilde{X}_E^{\Delta_n}(k), \quad E = [u, \infty),$$
$$\tilde{X}_E^{\Delta_n}(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } X_E^{\Delta_n}(k) > 0, \\ 0 & \text{if } X_E^{\Delta_n}(k) = 0. \end{cases}$$

# 主結果

## Theorem 1(マーク付き SEPOT モデルの離散近似)

$X_E^{\Delta_n}$  を (1) の RCINAR( $\infty$ ) 過程,

$$0 \leq c(x) \leq \exists L > 0, \quad L \int h(t) dt < 1,$$

を仮定. このとき,  $\tilde{N}_E^{\Delta_n} \xrightarrow{w} N$  in  $M_p(\mathbb{R} \times E)$  as  $\Delta_n \rightarrow 0$ . ただし,  $N$  はの強度関数をもつマーク付き Hawkes 過程:

$$\lambda_E(t | \mathcal{H}_t^N) = \left( \eta + \int_{-\infty}^t h(t-s) c(\tilde{Z}_s) N_g(ds) \right) (1 + \xi u)^{-1/\xi},$$
$$\tilde{Z}_s = (Z_s - u)^+, Z_s \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{GPD}(\xi, 1).$$

# 主結果

- Theorem 1 は Proposition 1 の一般化.  
 $h(t) \equiv 0, \eta = 1, c(x) = 1$  とすると,  
 $X_E^{\Delta_n}(k) \sim Poi(\Delta_n P(b_{[\Delta_n^{-1}]^{-1}}(X_1 - a_{[\Delta_n^{-1}]}))$
- Kirchner(2016) の結果の i.i.d. マーク付き Hawkes 過程への拡張.
- また Theorem 1 の結果から, 点過程  $N_E^{\Delta_n}$  は SEPOT モデルの離散近似とみることが出来る.  
 $X_E^{\Delta_n}$  は Hawkes 過程の局所的な離散近似. その条件付き期待値は  $N_E^{\Delta_n}$  の強度関数に対応.

# 主結果

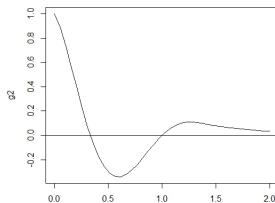
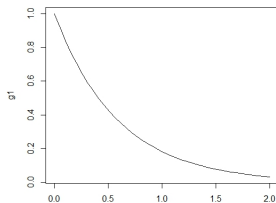
- 条件  $L \int h(t) dt < 1$  は非線形 Hawkes 過程の stability (定常解の存在, CLT) の議論でも利用される (Brémaud and Massoulié(1996), Zhu(2013)).
- $\tilde{N}_E^{\Delta_n}$  は一般論で導入した  $\tilde{N}^\Delta$  に対応する. また  $N_E^{\Delta_n}((a, b]) = \sum_{k: k\Delta_n \in (a, b]} X_E^{\Delta_n}(k)$  は  $N^\Delta$  に対応する.

$$P \left( X_E^{\Delta_n}(k) \in \{0, 1\} : k\Delta_n \in (a, b] \right) \xrightarrow{\Delta_n \downarrow 0} 1, \quad \forall a < b.$$

# 数値実験

Theorem 1 を確認するため,  
近似的に以下の RCINAR( $p$ ) からデータ生成:

- $p = 30, \eta = 1, Z_k \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{GPD}(0.2, 0.01)$
- Case I :  $g_1(x, t) = [(1+x) \wedge 1.5]e^{-1.7t}$ ,  
Case II:  $g_2(x, t) = [(1+x) \wedge 1.5]e^{-1.7t} \times \cos((1.5\pi t) \wedge 2\pi)$ ,
- $\Delta_n = 1/4, 1/16, 1/32$  (Case A, B, C)



## 数値実験

- $N_E^{\Delta_n}((0, k\Delta_n])$ ,  $k\Delta_n \in (0, 10]$
- $X_E^{\Delta_n}(k)$ ,  $k\Delta_n \in (0, 10]$  (RCINAR( $p$ ))
- $X_E^{\Delta_n}(k)$  の scaled conditional mean (conditional intensity):

$$P_n^{-1} E \left[ \frac{X_E^{\Delta_n}(k)}{\Delta_n} \mid \mathcal{F}_{(k-1)\Delta_n}^{\Delta_n} \right] = \eta + \sum_{m=1}^p h(k\Delta_n - m) c(\tilde{Z}_{k-m}) X_E^{\Delta_n}(k - m),$$

where  $P_n = \Delta_n^{-1} P \left( \frac{X_1 - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u \right)$ .

# 数値実験 ( $\Delta_n = 1/4$ )

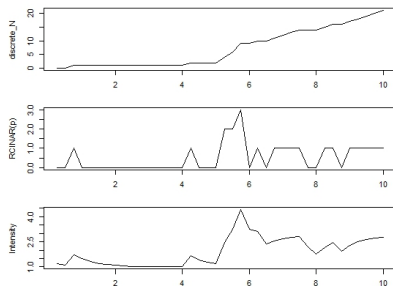


Figure: Case I-A

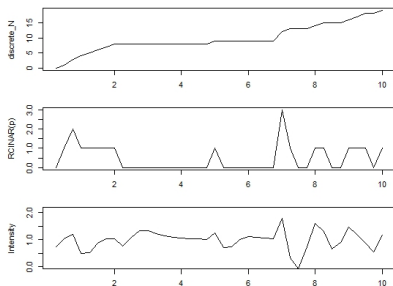


Figure: Case II-A



# 数値実験 ( $\Delta_n = 1/16$ )

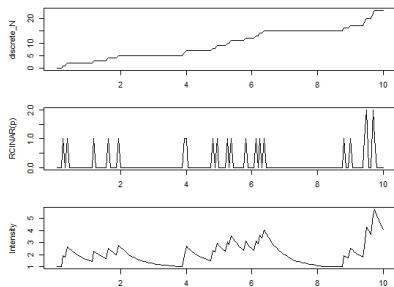


Figure: Case I-B

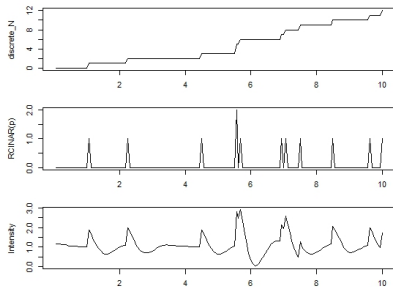


Figure: Case II-B

# 数値実験 ( $\Delta_n = 1/32$ )

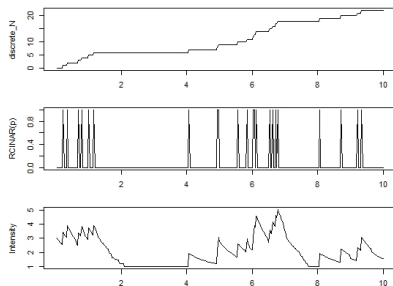


Figure: Case I-C

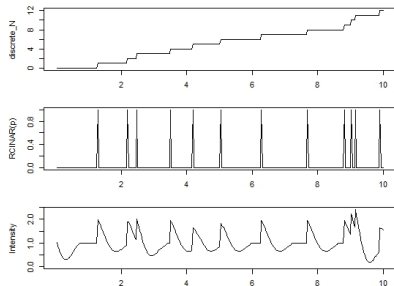


Figure: Case II-C

# まとめ

- 点過程の離散観測の枠組みを議論.
- 高頻度データ分析における理論と応用のギャップを埋める.
- RCINAR( $\infty$ ) (離散時間の確率過程) とマーク付き Hawkes 過程 (連続時間の確率過程) の関係.
- 従来の SEPOP モデルを点過程の離散観測の枠組みで見直す.
- self-damping のケースの数値実験.

## 今後の課題

- 多次元への拡張: 多変量極値理論と関連.
- self (mutually) damping: 多次元のケースではある成分での jump が他の成分の将来の jump の発生確率 (閾値超過のレート) を低下させるケースも考えられる.

例: ある銘柄の売買行動が他の銘柄の取引頻度を低下させる.

- Hawkes 過程はパラメータが多いのが難点:

Bayesian modeling (離散・連続の場合両方):

- (i) RCINAR( $p$ ) において: Poisson 分布  $\rightarrow$  二項分布,
- (ii) RCINAR( $p$ ) の次数選択.

## 参考文献 1

- Boshnakov, G.N. (2011), On first and second stationarity of random coefficient models, *Linear Algebra and its Appl.* 434, 415-423.
- Brémaud, P. and Massoulié, L. (1996), Stability of nonlinear Hawkes processes. *Ann. Probab.* 24-3, 1563-1588.
- Grothe, O., Korniiichuk, V. and Manner, H. (2014), Modeling multivariate extreme events using self-exciting point processes. *J. Econometrics* 182, 269-289.
- Kirchner, M. (2016), Hawkes and INAR( $\infty$ ) processes, *Stoch. Proc. Appl.*, 126, 2494-2525.
- 国友直人・江原斐夫・栗栖大輔 (2016), 「多次元ホークス型モデルによる金融市場の因果性分析」 CIRJE-J-278.

## 参考文献 2

- Kurisu, D. (2016), Discretization of Self-Exciting Peaks Over Threshold Models. arXiv:1612.06109.
- Nicholls, D.F. and Quinn, B.G. (1982), *Random-Coefficient Autoregressive Models: An Introduction*. Lecture Notes in Statist. 11. Springer, New York.
- Resnick, S. (2007), *Heavy Tail Phenomena*, Springer.
- Solo, V. (2007), Likelihood function for multivariate point processes with coincidences. *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control New Orleans, LA, USA, Dec. 12-14, 2007*.
- Zhu, L. (2013), Central limit theorem for nonlinear Hawkes processes. *J. Appl. Probab.* 50-3, 760-771.

# Dynamic risk measures for stochastic asset processes from ruin theory

Yasutaka Shimizu

Department of Applied Mathematics, Waseda University

経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再起的事象@東大  
2016年12月22日

Joint work with S.Tanaka (Nihon Univ.)

# Introduction

- A new regulation framework, e.g., **Solvency II**, requires a company to keep not only a *technical provision* that is a “best estimate” of obligations plus a “risk margin” but also an additional asset called **Solvency Capital Requirement (SCR)** to absorb an “unexpected future loss”.
- In the spirit of a solvency regulation, the SCR should be determined in *“going-concern view”*: Not only that the value of asset is greater than the liability (*“run-off” view*), but also a company can continue their business up to a maturity without ruin.
- Solvency risk is closely related to the company’s ruin.  
⇒ “Ruin-related” risk measure for solvency evaluation.
- In this talk, we will propose a risk measure to determine the SCR in going-concern view based on the ruin theory.



# What is solvency?: Asset-and-Liability Model

On a stochastic basis  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ ,

- $X^u = (X_t^u)_{t \geq 0}$ : “Net asset” process:

$$X_t^u = A_t - L_t, \quad X_0^u = u \quad a.s.$$

- $A = (A_t)_{t \geq 0}$ : a process of “market value” of assets;
- $L = (L_t)_{t \geq 0}$ : a process of “market-consistent” liability (technical provisions):  
(a “best estimate” of obligations + “risk margin”).
- The company is solvent at time  $t$  if  $X_t^u \geq 0$  (run-off view).
- The solvency risk depends on “ruin”:

$$\tau := \tau_u = \inf\{t > 0 | X_t^u < 0\} \quad (\text{Time of ruin})$$

# A risk measure $\rho$

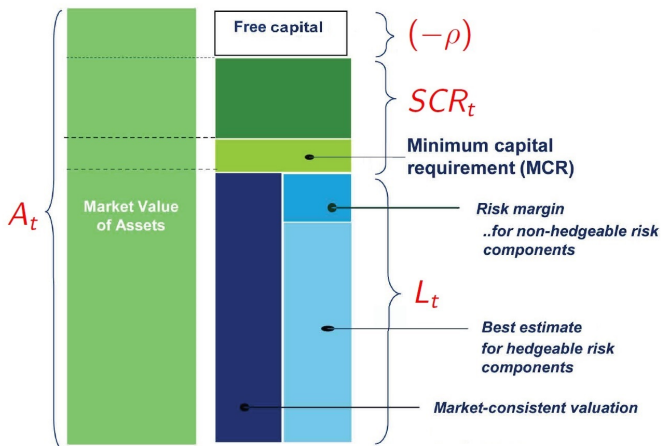
Definition (Actuarial definition, cf. Denuit *et al.* (2005))

A risk measure is a functional  $\rho : \mathcal{M}(\text{"future loss"}) \rightarrow \mathbb{R}$  representing the **extra cash** which has to be added to the current state to make it **"acceptable"**.

- " $\rho > 0$ ": the company has to add the extra cash  $\rho$  for "acceptability";
- " $\rho \leq 0$ ": it is "acceptable" even if they use the cash  $(-\rho)$  (*Free capital*).  
e.g., Wüthrich and Merz (2013): **Acceptability condition**.
- In preparation for an "unexpected future loss", the company should keep the reserve

$$SCR_t := X_t^u - (-\rho) \geq 0$$

## Solvency II capital requirement (SCR)



# Solvency on going-concern view

## Definition (Wüthrich and Merz (2013))

The company with  $X^u$  is *solvent* at time  $t$  w.r.t. a “*risk measure  $\rho$* ” if

- (i)  $X_t^u \geq 0$  (accounting condition).
- (ii)  $\rho \leq 0$  (acceptability condition);

- Condition (i) is of *run-off view*.
- If  $\rho$  reflects some “*ruin risk in  $[t, T]$* ”, (ii) can be *going-concern view*.

# Risk measures: axiomatic approach

## Definition (Risk measures, coherency)

A map  $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  is called a *risk measure* if  $\rho$  satisfies:

- *Monotonicity*:  $\rho(X) \leq \rho(Y)$  for any  $X, Y \in \mathcal{M}$  such that  $X \preceq Y$ .
- *Translativity*:  $\rho(X + c) = \rho(X) + c$  for any  $X \in \mathcal{M}$  and  $c \in \mathbb{R}$ .

In addition, a risk measure  $\rho$  is called *coherent* if  $\rho$  further satisfies:

- *Positive Homogeneity*:  $\rho(\lambda \cdot X) = \lambda\rho(X)$  for any  $X \in \mathcal{M}$  and  $\lambda > 0$ .
- *Subadditivity*:  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$  for any  $X, Y \in \mathcal{M}$ .

## Examples:

Consider a classical risk model:  $X_t^u = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Z_j$ , where  $Z_j \sim^d Z$  (IID).

VaR-type risk measure due to ruin: Trufin et al. (2010)

- VaR-type:  $\rho_\epsilon(Z) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(\tau_{u+x} < \infty) < \epsilon\}$
- TVaR-type:  $\bar{\rho}_\epsilon(Z) := \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \rho_u(Z) du$  (coherent)

But they suppose that a “loss  $Z$ ” is the individual claim size...?

Expected area in red: Loisel and Trufin (2014)

For fixed  $T, A > 0$ ,

$$\rho_A^T(X^u) = \inf\{v \in \mathbb{R} \mid \mathbb{E} \left[ \int_0^T |X_t^v| \mathbf{1}_{\{X_t < 0\}} dt \right] \leq A\}$$

They consider the ordering  $X^u \preceq Y^u \Leftrightarrow X_t^u \leq_{icx} Y_t^u$  for any  $t \geq 0$ .

# What is $\rho$ to be?

- $\rho$  should reflect “ruin-related” risks for *going-concern view point*.
- $\rho$  should measure a “future loss”:  $\rho = \rho(\tilde{X}^u)$  for  $\tilde{X}^u = (-X_t^u)_{t \in [0, T]}$ .
- $\rho$  should satisfy some **mathematical** conditions:  
*Monotonicity, cash invariant, positive homogeneity, subadditivity, ... etc.*
- The risk should be measured “dynamically in time”:

$$\rho = (\rho_t(\tilde{X}^u))_{t \in [0, T]},$$

adapted to the “information”  $\mathcal{F}_t$ .

## Goal

Ruin-related, mathematically valid, dynamic risk measures:

$$\rho_t(\tilde{X}^u) : \text{“Stochastic processes”} \rightarrow \text{“}\mathcal{F}_t\text{-measurable r.v.”}$$

# Notation

- $\mathbb{D} := \mathbb{D}[0, \infty)$ : a space of càdlàg functions on  $[0, \infty)$ .
- For  $X, Y \in \mathbb{D}$ , denote by

$$X + Y = (X_t + Y_t)_{t \geq 0}, \quad X \cdot Y = (X_t Y_t)_{t \geq 0} \in \mathbb{D}.$$

- $\mathcal{M}_t(\mathbb{R})$ : a family of  $\mathcal{F}_t$ -measurable random variables;
- $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$ : a family of stochastic processes whose paths are in  $\mathbb{D}$ , and an order “ $\preceq$ ” is defined in  $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$ : if  $X, Y$  are “loss processes”,

$$X \preceq Y \quad \Leftrightarrow \quad Y \text{ is “riskier” than } X$$

- $\mathcal{M}_t(\mathbb{D}) := \{X_{\cdot \wedge t} = (X_{u \wedge t})_{u \geq 0} \mid X \in \mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})\}$ : a “stopped” processes.  
Note  $X \in \mathcal{M}_t(\mathbb{D})$  is  $\mathcal{F}_t$ -measurable.



# Dynamic risk measures

Let  $\widetilde{\mathcal{M}}_T(\mathbb{D}) \subset \mathcal{M}_T(\mathbb{D})$  for some  $T > 0$ .

**Definition (DRM cf. Kriele and Wolf (2014))**

A **dynamic risk measure** on  $\widetilde{\mathcal{M}}_T(\mathbb{D})$  is a family of maps  $\rho = (\rho_t)_{t \in [0, T]}$  with

$$\rho_t : \widetilde{\mathcal{M}}_T(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{M}_t(\mathbb{R}),$$

such that the following two properties hold true:

**[MO]**  $\rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$  a.s. for any  $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}_T(\mathbb{D})$  such that  $X \preceq Y$ ;

**[TR]**  $\rho_t(X + C) = \rho_t(X) + C_t$  a.s. for any  $C \in \widetilde{\mathcal{M}}_t(\mathbb{D})$ ,  $X \in \widetilde{\mathcal{M}}_T(\mathbb{D})$ .

In addition, a dynamic risk measure  $\rho$  is called **coherent** if it satisfies that

**[PH]**  $\rho_t(K \cdot X) = K_t \rho_t(X)$  a.s. for any  $K \in \widetilde{\mathcal{M}}_t(\mathbb{D})$  with  $K > 0$  a.s.;

**[SA]**  $\rho_t(X_1 + X_2) \leq \rho_t(X_1) + \rho_t(X_2)$  a.s. for any  $X_1, X_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_T(\mathbb{D})$ .

## Ruin-related risks?

- A “ruin-related” loss up to the maturity  $T$ :

$$R_T := \begin{cases} e^{-\delta\tau} w(X_{\tau-}, X_{\tau}) & (\tau \leq T) \\ e^{-\delta T} w(X_{T-}, X_T) & (\tau > T) \end{cases} = e^{-\delta(\tau \wedge T)} w(X_{(\tau \wedge T)-}^u, X_{\tau \wedge T}^u)$$

- “Risk at time  $t$ ”: for  $t \in [0, T]$ ,

$$\phi_t^X(u, T) = \begin{cases} \mathbb{E} \left[ e^{-\delta(\tau \wedge T)} w(X_{(\tau \wedge T)-}^u, X_{\tau \wedge T}^u) \mid \mathcal{F}_t \right] & (\tau > t) \\ \infty & (\tau \leq t) \end{cases}$$

$\Rightarrow \phi_0^X(u, T)$ : **Finite-time Gerber-Shiu function**: [Cojocaru, Garrido and Zhou \(2014\)](#).

### Definition

We call the process  $\phi^X(u, T) = (\phi_t^X(u, T))_{t \geq 0}$  a “*Gerber-Shiu risk process*” if the function “ $w$ ” is chosen so that

$$\phi_0^X(u + v, T) \leq \phi_0^X(u, T),$$

for any  $u, v, T > 0$ .

## Example

When  $w(x, y) = \mathbf{1}_{\{y < 0\}}$  and  $\delta = 0$ ,

$$\phi_0^X(u, T) = \mathbb{P}(X_{\tau_u \wedge T}^u < 0) = \mathbb{P}(\tau_u \leq T),$$

that represents the finite-time ruin probability. This clearly satisfies that

$$\phi_0^X(u, T) = \mathbb{P}(\tau_u \leq T) > \mathbb{P}(\tau_{u+v} \leq T) = \phi_0^X(u + v, T)$$

for any  $v, T > 0$  and  $u \in \mathbb{R}$ .

# Gerber-Shiu “dynamic” risk measure

## Definition

For  $\epsilon > 0$ , a map  $GS_{t,T}^\epsilon : \mathcal{M}_T(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{M}_t(\mathbb{R})$  is defined by

$$GS_{t,T}^\epsilon(\tilde{X}^u) := \inf \{z \in \mathbb{R} \mid \phi_t^X(u + z, T) < \epsilon\} \quad a.s.,$$

where  $\phi^X(u, T)$  is a “Gerber-Shiu risk process”;  $\inf\{\emptyset\} = \infty$ .

- $GS_{t,T}^\epsilon$  is the **minimum extra capital** that should have been added to the initial surplus  $u$  in order to make a **Gerber-Shiu risk between  $[t, T]$  less than  $\epsilon > 0$** .
- If  $X$  is a **Markov process**, it follows by the Markov property that

$$GS_{t,T}^\epsilon(\tilde{X}^u) = \inf \left\{ z \in \mathbb{R} \mid \phi_0^X(X_t + z, T - t) < \epsilon \right\} \quad \text{on } \{\tau > t\}.$$

Let  $\mathcal{M}_T^*(\mathbb{D}) = \mathcal{M}_T(\mathbb{D}) \cap \mathcal{M}^*$  for  $\mathcal{M}^*$ : a family of Markov processes:

$$GS_{t,T}^\epsilon : \mathcal{M}_T^*(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{M}_t(\mathbb{R}).$$

### Theorem

Suppose that  $\phi^X$  is a “Gerber-Shiu risk process” for any  $X \in \mathcal{M}_T^*(\mathbb{D})$ . Then  $GS_{t,T}^\epsilon$  satisfies

- [TR];
- [MO] if  $\tilde{X}^u \preceq \tilde{Y}^u \Rightarrow \phi_0^X(u, T) \leq \phi_0^Y(u, T)$ ;
- [PH] if  $\phi_0^{\lambda X}(\lambda u, T) = \phi_0^X(u, T)$ ,  $\lambda, u, T > 0$ .

### Remark

We could not expect [SA] to  $GS_{t,T}^\epsilon$  due to its VaR-type structure.

# Examples: Gerber-Shiu dynamic risk measure

## Example (Finite-time ruin probability)

Take  $w(x, y) = \mathbf{1}_{\{y < 0\}}$  and  $\delta = 0$  :

$$GS_{t,T}^\epsilon(\tilde{X}^u) = \inf\{z \geq 0 \mid P(\tau_{u+z} \leq T \mid \mathcal{F}_t) < \epsilon\} \quad \text{on } \{\tau > t\}$$

- Define an order in  $M_T(\mathbb{D})$ :

$$\tilde{X}^u \preceq \tilde{Y}^u \quad \Leftrightarrow \quad \tau^Y \leq_{st} \tau^X,$$

where  $\leq_{st}$  is the “stochastic order”:  $X \leq_{st} Y \Leftrightarrow F_X(x) \geq F_Y(x)$  a.e.  
 (The portfolio with earlier ruin is riskier than the one with later ruin.)

- Then  $GS_{t,T}^\epsilon$  is a dynamic risk measure.
- [PH] also holds true:

$$GS_{t,T}^\epsilon(\lambda \cdot \tilde{X}^u) = \lambda_t GS_{t,T}^\epsilon(\tilde{X}^u).$$

## Example (Distribution of deficit)

Take  $w(x, y) = \mathbf{1}_{\{-y > \beta\}}$  with a small  $\beta$  and  $\epsilon = 1 - \alpha$  ( $\alpha \approx 1$ ):

$$GS_{t,T}^{\epsilon}(\tilde{X}^u) = \inf\{z \geq 0 \mid P(-X_{\tau \wedge T}^{u+z} \leq \beta \mid \mathcal{F}_t) \geq \alpha\} \quad \text{on } \{\tau > t\}$$

- Define an order in  $M_T(\mathbb{D})$ :

$$\tilde{X}^u \preceq \tilde{Y}^u \quad \Leftrightarrow \quad -X_{\tau \wedge T}^u \leq_{st} -Y_{\tau \wedge T}^u$$

(The portfolio with stochastically larger deficit (at ruin, or at maturity) is riskier than the one with smaller deficit.)

- Then  $GS_{\cdot,T}^{\epsilon}$  is a dynamic risk measure.

## Example: Financial and insurance liabilities

- $\mathbb{D}^d[0, T]$ :  $d$ -dimensional càdlàg functions  $x = (x_t)_{t \in [0, T]}$ .
- $\mathcal{B}_t^d := \sigma(x : x_s, s \leq t)$  and  $\mathbb{B}^d := (\mathcal{B}_t^d)_{t \in [0, T]}$ .
- $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  with

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{T}_t,$$

where

- $\mathbb{G} := (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$  is the financial information;
  - $\mathbb{T} := (\mathcal{T}_t)_{t \in [0, T]}$  is the insurance information.
- Suppose that  $\mathcal{G}_t$  and  $\mathcal{T}_t$  are independent under  $\mathbb{P}$ .



An asset of an insurance company, say  $V = (V_t)_{t \geq 0}$ , of the form

$$V_t = u + P_t + Y_t(F) - S_t - S'_t(F), \quad t \in [0, T],$$

- $P : \Omega \rightarrow \mathbb{D}[0, T]$  is  $\mathbb{T}$ -adapted: the premium income.
- $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}^d[0, T]$  is  $\mathbb{G}$ -adapted: a value of an investing financial portfolio.
- $Y : \Omega \times \mathbb{D}^d[0, T] \rightarrow \mathbb{D}[0, T]$  is  $\mathbb{G} \otimes \mathbb{B}^d$ -adapted:  
an aggregate financial gain-and-loss due to  $F$ , that is, the company has a latent profit at  $t$  if  $Y_t(F) > 0$ , and has a latent loss if  $Y_t(F) < 0$ .
- $S : \Omega \rightarrow \mathbb{D}[0, T]$  is  $\mathbb{T}$ -adapted: aggregate claims and other insurance technical variables.
- $S' : \Omega \times \mathbb{D}^d[0, T] \rightarrow \mathbb{D}[0, T]$  is  $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}^d$ -adapted,
- For given  $x \in \mathbb{D}^d[0, T]$ ,  $S'(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{D}[0, T]$  is  $\mathbb{T}$ -adapted.  
 $S'(F)$ : insurance obligations due to a financial variable  $F$ . e.g., payments for equity-linked insurance or variable annuities, among others.

- Liability:  $l_t := -Y_t(F) + S_t + S'_t(F)$ .
- Let  $R_t(l_T)$  be a “best estimate” of the future loss  $l_T$  at time  $t$ :

$$R_t(l_T) := - \left\{ Y_t(F) + \mathbb{E}^*[\widehat{Y}_{t,T}(F)|\mathcal{G}_t] \right\} \\ + \left\{ S_t + \mathbb{E}^*[\widehat{S}_{t,T}|\mathcal{T}_t] \right\} + \left\{ S'_t(F) + \mathbb{E}^*[\widehat{S}'_{t,T}(F)|\mathcal{F}_t] \right\}$$

where

$$\widehat{Z}_{t,T} := e^{rt} \int_t^T e^{-rs} dZ_s;$$

$\mathbb{P}^*$  is the risk neutral prob. and  $\mathbb{P}^\star$  is the actuarial risk adjusted prob.

Then the net asset is given by

$$X_t^u = u + P_t - R_t(l_T)$$

## Example (A simple example of ALM)

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  with a Wiener process  $W$  and a compound Poisson process  $S$ .
- $\mathcal{G}_t = \sigma(W_u : u \leq t)$ ,  $\mathcal{T}_t = \sigma(S_u : u \leq t)$ .
- $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$ , where  $N_t \sim Po(\lambda t)$  is a number process of insurance claims, and  $U_i$ 's are claim sizes, which are i.i.d. with mean  $\mu$ .
- $S'_t(F) \equiv 0$  for simplicity.
- $Y_t(F) = F_t - F_0$  for a stock price  $F$ , e.g.,  $dF_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$ .
- $P_t = (1 + \theta)\lambda\mu t$ , where  $\theta > 0$  is a safety loading.
- $\mathbb{P}^*$ : the risk neutral probability:

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{G}_t} = \exp \left( - \int_0^t \vartheta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \vartheta_s^2 ds \right) \quad \text{with} \quad \vartheta_t = \frac{b_t - rF_t}{\sigma_t}$$

- $P^*$ : a risk adjusted probability s.t.  $\mathbb{E}^*[S_T | \mathcal{T}_t] > \mathbb{E}[S_T | \mathcal{T}_t]$  (loading condition).

## A simple example of ALM (cont.)

Then there exists some  $\beta > 0$  such that

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^* \left[ \widehat{Y}_{s,T}(F) | \mathcal{G}_t \right] &= \left( 1 - e^{-r(T-t)} \right) F_t, \\ \mathbb{E}^* \left[ \widehat{S}_{t,T} | \mathcal{T}_t \right] &= \frac{\lambda\mu}{r} (1 + \beta) \left( 1 - e^{-r(T-t)} \right)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}R_t(I_T) &:= - \left\{ Y_t(F) + \mathbb{E}^* [\widehat{Y}_{t,T}(F) | \mathcal{G}_t] \right\} + \left\{ S_t + \mathbb{E}^* [\widehat{S}_{t,T} | \mathcal{T}_t] \right\} \\ &= - \left\{ [1 + (1 - e^{-r(T-t)})] F_t - F_0 \right\} + \left\{ S_t + \frac{\lambda\mu}{r} (1 + \beta) \left( 1 - e^{-r(T-t)} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Considering the case:  $r \rightarrow 0$ , we have

$$X_t^x = u - \lambda\mu(1 + \beta)T + \lambda\mu(2 + \theta + \beta)t - S_t + (F_t - F_0) + o(1), \quad r \rightarrow 0.$$

# Diffusion perturbation model

## Example

- Consider a simple case:  $F_t = F_0 + \alpha t + \sigma W_t$ ,

$$X_t^u = u - \lambda\mu(1 + \beta)T + \lambda\mu(2 + \theta + \beta + \alpha)t - S_t + (F_t - F_0) + o(1), \quad r \rightarrow 0.$$

- $SCR_t$  is computed by **Cramér-Lundberg approximation**:

$$SCR_t \sim \frac{1}{\gamma} \log \frac{\lambda C(\rho, \gamma) + w(0, 0)(\rho + \gamma)\sigma^2/2}{\epsilon(\lambda \int_0^\infty x e^{\gamma x} F_U(dx) - c + \sigma^2\gamma)}, \quad u \rightarrow \infty,$$

where positive constants  $\rho$  and  $-\gamma$  are solutions to

$$\lambda\mu(2 + \theta + \beta + \alpha)\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\gamma^2 - \lambda(m_U(\gamma) - 1) = \delta.$$

and the constant  $C(\rho, \gamma)$  is given explicitly:

$$C(\rho, \gamma) = \int_0^\infty (e^{\gamma x} - e^{-\rho x}) \int_x^\infty w(x, y - x) F_U(dy) dx.$$

- This simple model could be a **"benchmark"** to evaluate SCR.

## Further studies

- Computation or approximation of  $\phi_0^X(u, T)$ : e.g., [Cojocaru et al. \(2014\)](#).
- Statistical inference for  $\phi_0^X(u, T)$ ; cf. [S. \(2011\)](#); [Zhimin and S. \(2014\)](#)
- Generalization of  $\phi_0^X$ : e.g., [Feng and S. \(2013\)](#)

$$\phi_0^X(x, T) = \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau \wedge T} V(X_u) du \mid X_0 = x \right]$$

a path-dependent case, which is an extension of [Loisel and Trufin \(2014\)](#).

# 日本人の寿命 -過去・現在・未来-

田中 周二 (発表者) [日本大学文理学部]  
長谷川敏彦 [未来医療研究機構代表理事]  
伊藤 憲祐 [日本医大大学院循環器内科学分野]

December 5, 2016

(注) 当研究は, 研究代表者 国友直人 基盤研究 (A) 経済リスクの統計学の新展開 : 稀な事象と再起的事象 No.1260104138030001 の資金援助を受けている。

- 1 概要
- 2 将来人口推計
- 3 使用データとモデル
- 4 AIC, BIC 基準によるモデル選択
- 5 モデルによるコーホート生存率予測
- 6 結論と今後の課題



# 発表の概要

わが国は、今から 50 年後には、人類史的に見ても未曾有の超高齢化社会を迎えることになる。

- 社会保障・人口問題研究所の H24 年将来人口推計では、1960 年生まれのコーホート 100 歳生存率は女性で 17 % [13.9 %, 20.3 %] (それぞれ中位推定 [低位推定, 高位推定]), 男性で 4.7 % [3.6 %, 6.0 %] である。これから 1970 年生まれ、1980 年生まれの女性では 20 % を上回ってゆく可能性が高いことが示唆される。
- しかし、問題はより深刻である可能性がある。今回、我々は国勢調査が最初に公表された明治 24 年 (1891 年) 以降から 2014 年までの長期の死亡率のデータにより、最近、飛躍的な発展を遂げている死亡率予測の代表的な確率論的死亡率モデルを用いて検証することにした。
- 我々の選択したモデルの一つでは 1980 年代生まれのコーホート 100 歳生存率は中央値で女性で約 30~50 %, 男性で約 20~30 % となる。もし、このような結果が実現すると、現在の社会保障制度の根幹を揺るがす可能性がある。
- 超高齢期、特に 100 歳以上人口の分析を行うことが益々重要になってきている。幸い 100 歳前後の超高齢期のデータの入手が容易になってきたことから、研究の環境は整ってきている。

# 人類の寿命の記録

- 今年8月31日に127歳の誕生日を迎えたメキシコ人女性、リーンドラ・ベッセラ・ランブラレスさんが最高齢とされるが出生届けがない。はっきりした出生届のあるギネス世界記録は122歳のフランス人女性 Jeanne Calment (1997年死去) さん。
- ギネス世界記録の「存命している世界最高齢者」に認定されているのが、日本人女性の大川ミサヲさん,116歳。先月、男性の世界最高齢者として111歳の百井盛さんもギネスに認定。
- きんさんぎんさんは、記録的な長寿で話題となったアイドル双子姉妹。

成田きん (なりた きん,107歳,1892年8月1日 - 2000年1月23日)

蟹江ぎん (かにえ ぎん,108歳,1892年8月1日 - 2001年2月28日)

- インドネシアのジャワ島に住むムバフ・ゴト (Mbah Gotho) さんは1870年12月31日生まれで現在145歳になるとされるが？

# 人類の寿命の限界？

Human age limit claim sparks debate : Nature News  
Comment(2016.10.5) Analysis suggests people will never live much beyond 115 but some scientists say that it's too soon to assume a fixed shelflife.



Figure 1: 122 歳まで生存した  
フランス人女性 Jeanne  
Calment(1997 年死亡)

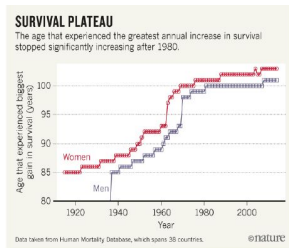


Figure 2: 1980 年代以降, 寿命  
の延びは鈍化？

# 超高齢者死亡率の予測

超高齢者の予測に関しては以前より政府機関, また学会では統計学や公衆衛生学, アクチュアリー学など様々な研究分野にまたがり数多くの研究が行われてきた。

**人口統計** 国勢調査実施年の2年後に社会保障・人口問題研究所より将来人口推計が公表されている(過去4回1997年, 2002年, 2007年, 2012年)。花田等 [2,3]

**統計学** 統計学会の75周年記念出版でも少子高齢化の統計的問題が採り上げられている。また, 極地理論を使った渋谷等 [4] もある。

**公衆衛生学** 例えば, 日本でも100歳以上生存者の疫学的な分析を行っている研究が数多くある。(堀内 [5],[8],[9] など)

**アクチュアリー学** 米国アクチュアリー会では"Living to 100"というシンポジウムを2002年から3年ごとに開催し, 最近では2014年に開催された(次回は2017年)。英国では, 本発表で採り上げる多くの確率論的な死亡率モデルが研究されており, 死亡率デリバティブやリスク管理に利用されている。

# 将来人口推計

- 社会保障・人口問題研究所では、5年に一度、将来の人口を推計し公表しているが、直近のH24年将来人口推計では、2060年までの3通り（中位、上位、下位）の生命表とそれに基づく推計人口を提示している。<sup>1</sup>
- 特に75歳以上の後期高齢者、85歳以上のスーパーシニア層、さらには100歳以上のセンチュリアンの人口増加は著しい。（Figure 1）
- それによると、1900年から1980年までの生年コーホートの人口を追跡すると以下の図のようになり、最近のコーホートになるほど寿命が伸びてきていることが分かる。（Figure 2）
- その前提となる死亡率は以下のように着実な改善を見せている。しかし、2060年以降の死亡率改善は見込んでいないため、1960年生まれ以降のコーホートの余命については保守的な評価になっている。
- しかしながら、将来の姿がこのようなものになるかについては、スーパーシニア層の死亡率の推定精度に依存し、場合によってはより厳しい未来を想定しなければならないかもしれない。本稿では、最近開発されたいくつかの（確率論的）死亡率モデルによってこの事実を検証することにしたい。

<sup>1</sup>それ以降、2100年までは2060年の生命表に基づき延長した表を示している。

# 日本人口の推移（1880-2105年）

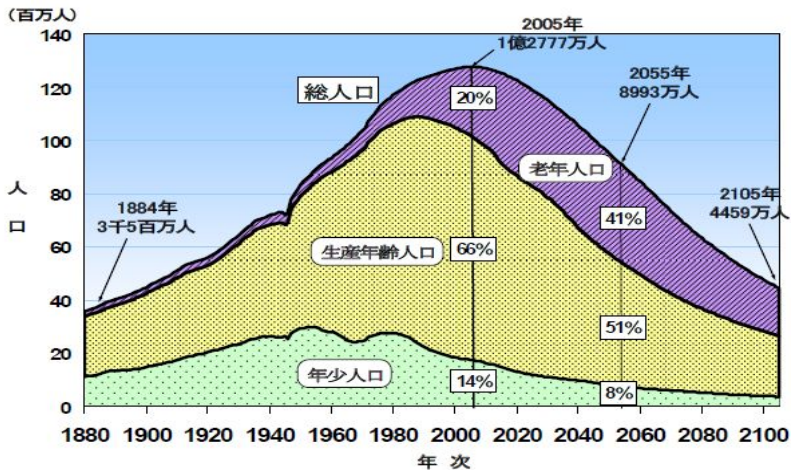
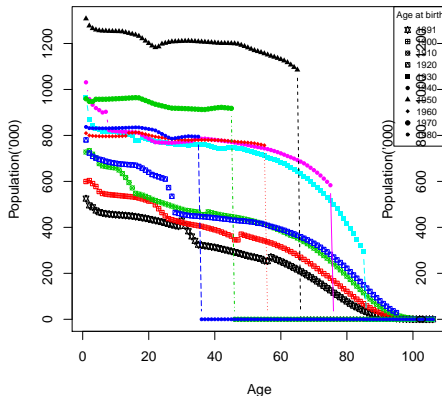


Figure 3: 日本人口の推移（年齢3区分：1880-2105年）

# H24 将来人口推計によるコホート人口

Experience Survivor Curve (Male)



Experience Survivor Curve (Female)

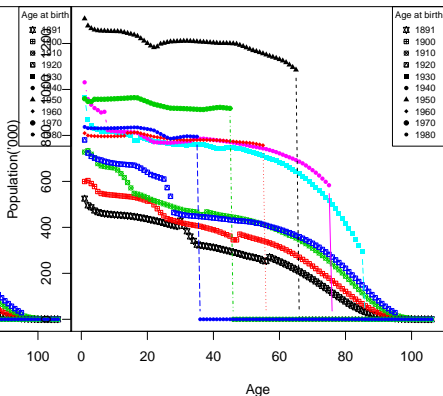


Figure 4: 65歳,75歳,85歳,95歳の2060年までの予測 (男性)

Figure 5: 65歳,75歳,85歳,95歳の2060年までの予測 (女性)

# H24 将来人口推計の死亡率予測

Mortality Forecast by IPSS 2012 Estimates (Male) Mortality Forecast by IPSS 2012 Estimates (Female)

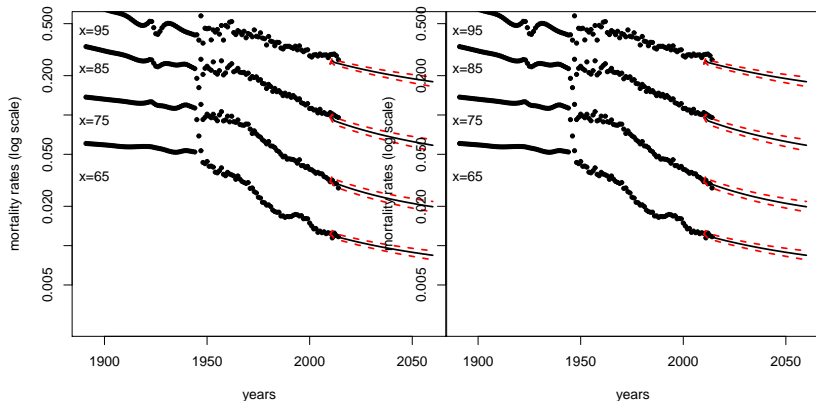


Figure 6: 65歳,75歳,85歳,95歳の2060年までの予測(男性)

Figure 7: 65歳,75歳,85歳,95歳の2060年までの予測(女性)



# 将来人口推計

この結果, 将来推計人口では, それぞれの生年コーホートの 90 歳, 100 歳生存率は以下のとおりとなる。

生年	性/年齢 ('15)	90 歳生存率	100 歳生存率
1930	男性 85 歳	55.8 [52.4,59.1]	5.3 [4.3,6.4]
1940	男性 75 歳	35.7 [32.8,38.5]	4.1 [3.2,5.1]
1950	男性 65 歳	35.4 [32.4,38.5]	4.7 [3.7,6.0]
1960	男性 55 歳	33.7 [30.6,36.6]	5.1 [3.9,6.5]
1970	男性 45 歳	34.9 [31.6,38.1]	5.5 [4.2,7.1]
1980	男性 35 歳	35.7 [32.3,39.2]	5.7 [4.3,7.3]
1930	女性 85 歳	71.7[68.6,74.6]	14.0 [11.8,16.4]
1940	女性 75 歳	58.9[55.9,61.8]	13.5 [11.3,16.0]
1950	女性 65 歳	62.7[59.4,65.7]	16.3 [13.5,19.5]
1960	女性 55 歳	59.9[56.7,63.0]	17.4 [14.2,20.8]
1970	女性 45 歳	60.7[57.4,63.9]	18.2 [14.9,21.9]
1980	女性 35 歳	61.2[57.8,64.4]	18.4 [15.0,22.1]

Table 1: 1980 年までのコーホート残存率

1970 年代以降の生年コーホートでは女性の 100 歳生存率は 20 %程度まで徐々に上昇してゆくが, 中位推計は 20 %以内に留まる。また, 男性は 10 %以内に留まることになる。

# 使用データとモデル

- 死亡率については,1891 年以降の生命表およびその後の政府公表の生命表を利用した。(生命表研究については山口, 南條, 重松, 小林 [1] に詳しい。)
- また, 年齢別人口については,1920 年以降 2014 年までは政府公表データ (完全生命表および簡易生命表), 1920 年までと戦時中の 1944 年から 1946 年までは生命表研究の著者推定によるものを使用した。
- 将来推計人口・死亡率については国立社会保障・人口問題研究所の報告書 [2] を参照した。
- 確率論的死亡率モデルは,2000 年代に Lee-Carter(1992) を拡張した数多くのモデル開発が行われた。
- その主なものとして Cairns,Blake and Dowd(2006),Renshaw-Haberman(2003,2006),Cairns et al(2009) などを含むモデル群があり, これらを総称して GAPC(Generalized Age-Periodic Cohort) ファミリーと呼ばれる。
- その特徴は, 将来死亡率を年齢効果, 暦年効果, コホート効果によって説明しようとする。
- 今回は,LC,CBD,APC,RH(簡易版),M7,PLAT(簡易版) をモデル選択の候補として採用した

# 死亡率モデル

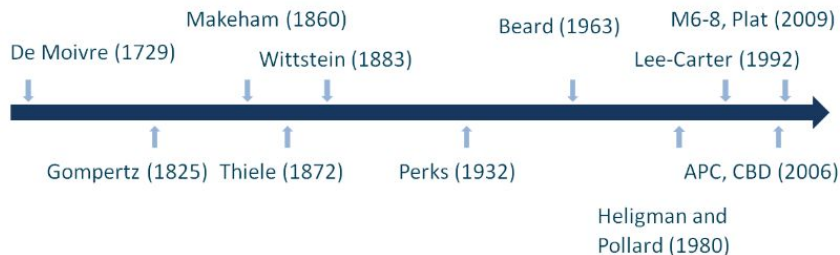


Figure 8: 死亡率モデルの発展 (R in Insurance: Olga Mierzwa Frankie Gregorkiewicz)

GAPC モデル族は, GLM に類似する以下の構造を有する。

- ① (random component)  $D_{xt} \sim \text{Poisson}(E_{xt}^c \mu_{xt})$  または  $\sim \text{Binomial}(E_{xt}^0, q_{xt})$ .
- ② (systematic component)

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{(t-x)} \quad (3.1)$$

- ③ (link function:  $g$ )

$$g\left(\mathbb{E}\left[\frac{D_{xt}}{E_{xt}}\right]\right) = \eta_{xt}$$

- ④ (a set of parameter constraints)  $\theta = (\alpha_x, \beta_x^{(i)}, \gamma_{t-x})$  が一意に決まるための制約

# 確率論的死亡率モデル

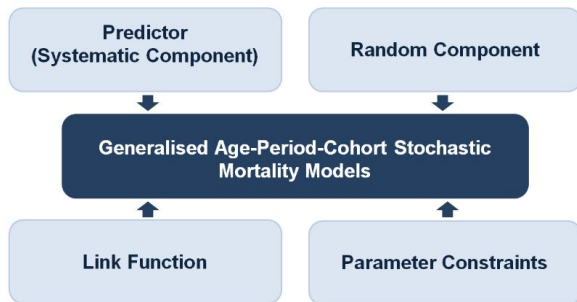


Figure 9: 死亡率モデルの発展 (R in Insurance: Olga Mierzwa Frankie Gregorkiewicz)

# GAPC モデル族の systematic component

このモデル族に属する典型的なモデルについて *systematic component*  $\eta_{xt}$  を書き下すことにより、モデルの特徴を説明する。

Model	Predictor
LC	$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)}$
CBD	$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)}$
CBD2	$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) \kappa_t^{(3)}$
APC	$\eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + \gamma_{(t-x)}$
RH	$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \gamma_{(t-x)}$
M7	$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) \kappa_t^{(3)} + \gamma_{(t-x)}$
PLAT	$\eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + \gamma_{(t-x)}$

# AIC,BIC 基準によるモデル選択 (全年齢)

全年齢でのモデルの適合度を AIC,BIC で判定すると、男女とも RH が最も良好な結果となる。以下,PLAT,APC,LC などが続く。

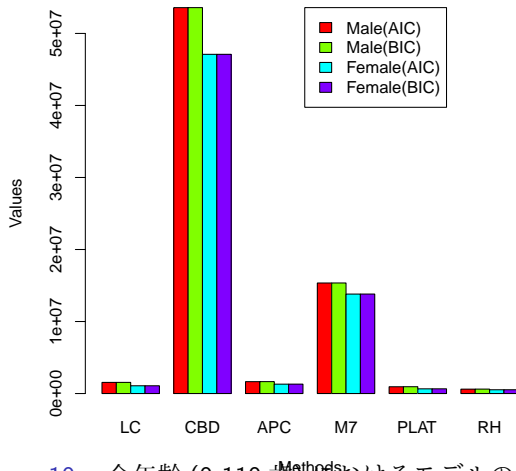


Figure 10: 全年齢 (0-110 歳) におけるモデルの適合度

# 確率論的死亡率モデル比較

Characteristic	Generalised Age-Period-Cohort Stochastic Mortality Models							
	LC	APC	CBD	RH	M6	M7	M8	Plat
General Shape of Mortality $\alpha_x$	Y	Y	N	Y	N	N	N	Y
Cohort Effect $\gamma_{px}$	N	Y	N	Y	Y	Y	Y	Y
Mortality Trend $\kappa_t$	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
Number of Age-Period Terms $N$	1	1	2	1	2	3	2	2
Age Modulating Terms $\beta_x$	Non-Parametric Need to be estimated	Non-Parametric Static	Mixed	Non-Parametric Need to be estimated	Mixed	Mixed	Mixed	Mixed

Requirement	LC	APC	CBD	RH	M6	M7	M8	Plat
Popularity	1	3	2	2	3	3	3	4
Complexity	1	3	2	3	3	4	3	4
Quality	3	2	3	2	2	2	2	3
Objectivity	2	2	2	2	2	2	3	2



Figure 11: 死亡率モデル比較 (R in Insurance: Olga Mierzwa Frankie Gregorkiewicz)



# AIC,BIC 基準によるモデル選択 (90歳で分割)

35歳から89歳の年齢層では,RH,PLAT,CBD2など,90歳以上では大きな差異はないが相対的にはAPC,CBDが良い。

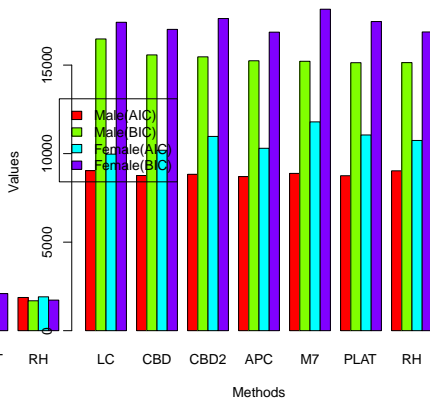
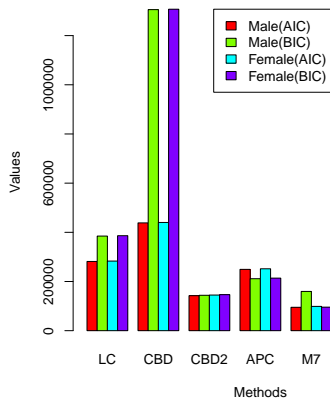


Figure 12: 35歳から89歳の年齢層におけるモデルの適合度

Figure 13: 90歳以上の年齢層におけるモデルの適合度

# モデル選択上の注意

- モデル選択は、まず AIC や BIC などの情報量基準にもとづいて行うが、全年齢で推定した場合には、1つのモデルだけで適合させることは難しく、やはり年齢層に分けた混合型のモデルの方が良い。今回は、35歳から89歳までと90歳以上の年齢層で異なるモデルが選択された。
- モデルの候補にはコーホート効果を取り入れたものがある。しかしコーホート効果の識別については、従来より様々な問題があることが指摘されている。
- 主な問題は、コーホート効果が（暦年-年齢）の関数で評価されるため、年齢効果と期間効果との分離が難しく、しばしばオーバーフィッティングの問題が生ずることにある。
- コーホート効果の予測モデルには、ARIMA などの時系列モデルを適用するが、うまく推定できていない場合にはとんでもない結果を導くことがある。
- コーホート効果に求められる性質については次葉に様な議論があるため、慎重に採否を決定すべきであると考えられる。このため、外挿テスト（いわゆるバックテスト）によるモデル選択を並行して実施する必要がある。

# コーホート効果に求められる性質について

コーホート効果に求められる性質については, Hunt, Blake[16] に以下のような記述がある。

- 年齢 (age), 期間 (period) 効果に比べて小さいこと。
- コーホート全体の平均がゼロ (すなわちコーホート効果は主要な傾向からの偏差である)。
- ある種の自己回帰性がある。ある生年が例外的な環境にある場合を除き, その他の近い暦年のコーホートは類似の履歴を辿り, 従ってコーホート効果も類似していると考えられる。
- 説明できない継続性を示していない。例えば, 祖父の世代の影響が孫の世代に影響することはない。
- 理想的には平均回帰的であること。すなわち, あるコーホートに影響した事象は続く年代への影響は徐々に消えてゆく。
- 人口学的に意味がある。すなわち, コーホート効果が特定の社会経済的・医学的な要因で説明できる。

# コーホート効果の推定誤差（男性：APC,M7）

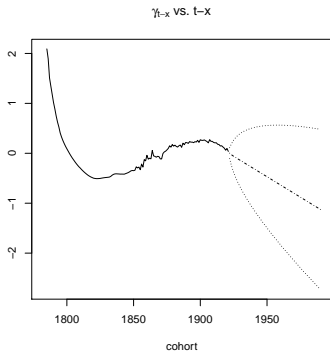


Figure 14: モデル APC のコーホート要因 ( $\gamma_{t-x}$ )

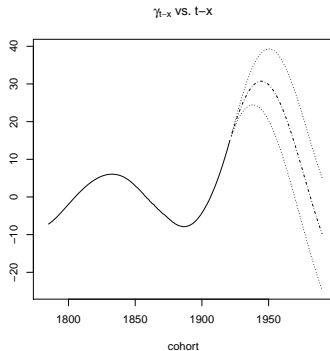


Figure 15: モデル M7 のコーホート要因 ( $\gamma_{t-x}$ )

# モデル別 95 歳死亡率予測値

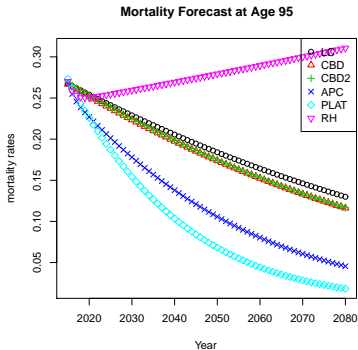


Figure 16: 男性：モデル:LC,CBD,APC,PLAT,RH

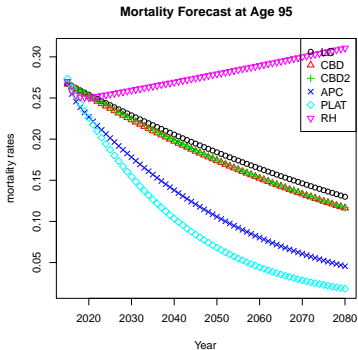


Figure 17: 女性：モデル:LC,CBD,APC,PLAT,RH

# 内挿テスト (男性)

Mortality trend: Age 70,75,80,85 (Male)

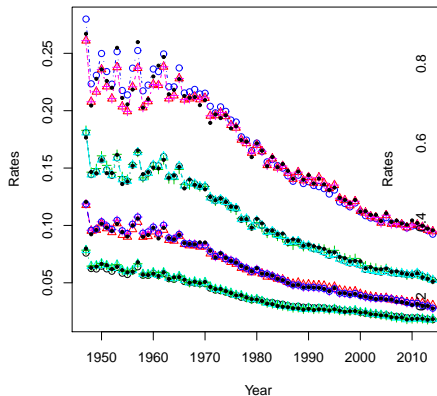


Figure 18: 年齢 : 70 歳,75 歳,80 歳,85 歳 (男性), モデル:RH,CBD2,M7

Mortality trend: Age 90,95,100,105 (Male)

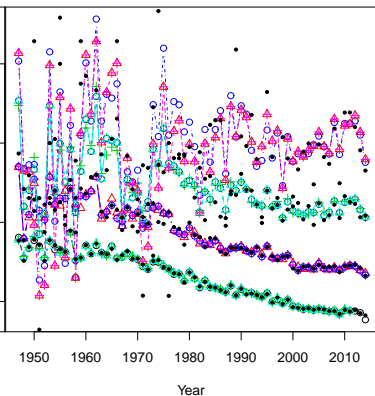


Figure 19: 年齢 : 90 歳,95 歳,100 歳,105 歳 (男性), モデル:RH,CBD2,M7

# 内挿テスト (女性)

Mortality trend: age 70,75,80,85 (from below)

Mortality trend: age 90,95,100,105 (from below)

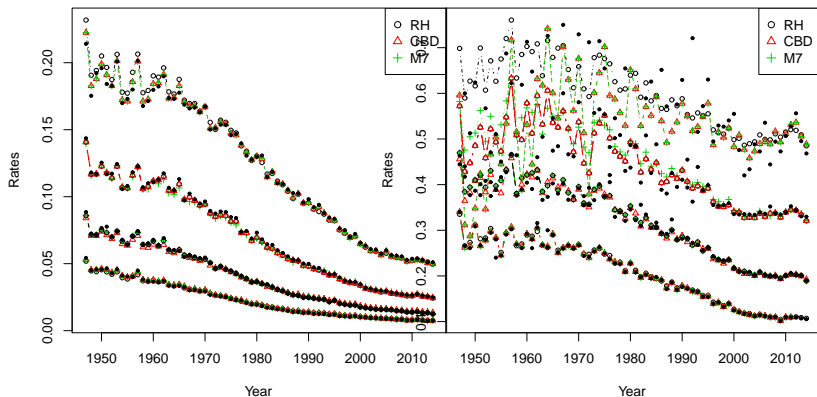


Figure 20: 年齢 : 70 歳,75 歳,80 歳,85 歳 (女性), モデル:RH,CBD2,M7

Figure 21: 年齢 : 90 歳,95 歳,100 歳,105 歳 (女性), モデル:RH,CBD2,M7

# 外挿テスト

- 外挿テストでは,1947年から1980年までの死亡率データから,1981年から2014年までの,それぞれのモデルによる点推定値と実際死亡率の予測誤差を計測した。
- 男女別,年齢層は90歳から109歳までの平均二乗誤差の標準偏差をモデルLC,CBD,APC,PLAT,M7,RHについて求めた。
- 結果は以下の表のとおり,男女ともCBDモデルが選択されるが,APCモデルと大差はない。
- 予測誤差を小さくするためには,データの人口や最近の年度への加重などの選択も重要である。

	LC	CBD	APC	PLAT	M7	RH
男性	0.2350	0.1828	0.1875	0.3500	0.5944	0.1902
女性	0.1832	0.1309	0.1326	0.2478	0.6409	0.2874

Table 2: 平均二乗誤差の標準偏差



# 外挿テスト (男性)

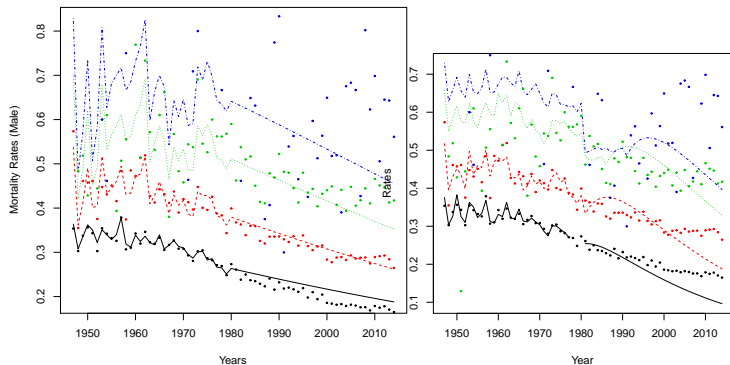


Figure 22: モデル: CBD, 男性, Figure 23: モデル: RH, 男性, 年  
年齢 : 90 歳, 95 歳, 100 歳, 105 歳 年齢 : 90 歳, 95 歳, 100 歳, 105 歳

# 外挿テスト (女性)

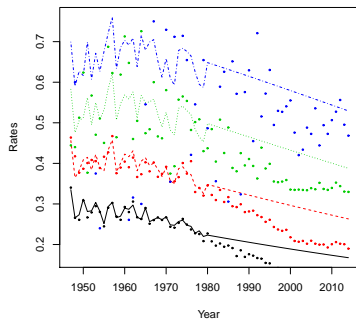


Figure 24: モデル: CBD, 女性,  
年齢: 90歳, 95歳, 100歳, 105歳

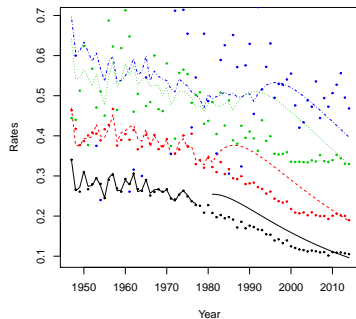


Figure 25: モデル: APC, 女性,  
年齢: 90歳, 95歳, 100歳, 105歳

# CBD2モデルによる死亡率予測（男性）

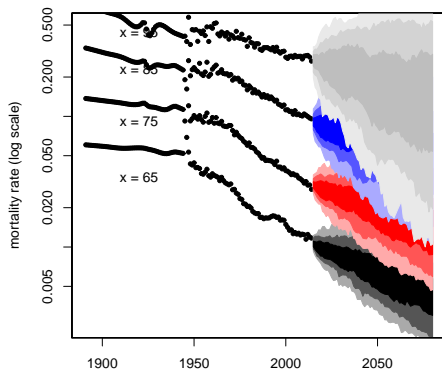


Figure 26: 男性 65 歳, 75 歳, 85 歳, 95 歳の死亡率予測

# CBD2-CBDモデルによるコーホート生存率 (図)

Cohort Survival Function (CBD2+CBD), Male

Cohort Survival Function (CBD2+CBD), Female

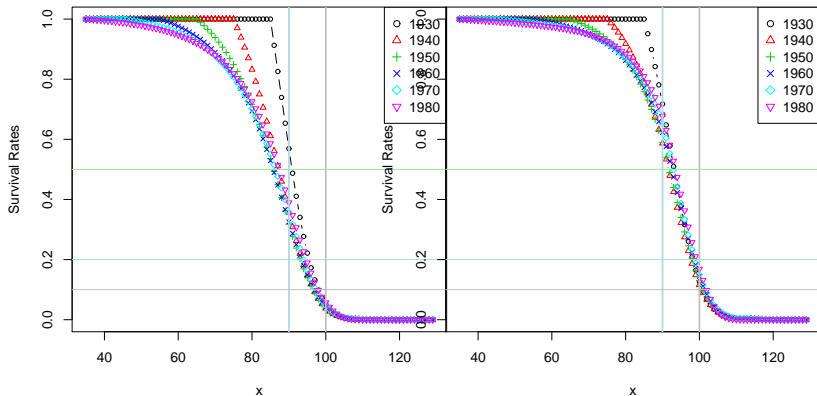


Figure 27: 出生コーホート  
1930年から1980年までの男性  
の90歳,100歳生存確率

Figure 28: 出生コーホート  
1930年から1980年までの女性  
の90歳,100歳生存確率

# CBD2-CBD モデルによるコーホート生存率 (表)

生年	性/年齢 ('15)	90 歳生存率	100 歳生存率
1930	男性 85 歳	55.5 [46.6,66.6]	5.0 [ 0.1,21.3]
1940	男性 75 歳	33.7 [20.6,55.3]	3.6 [ 0.0,26.6]
1950	男性 65 歳	29.1 [12.5,59.4]	3.5 [ 0.0,37.4]
1960	男性 55 歳	28.8 [ 8.8,63.1]	3.8 [ 0.0,43.0]
1970	男性 45 歳	30.9 (38.0) [ 9.6,70.1]	4.1 (4.0) [ 0.0,53.1]
1980	男性 35 歳	32.6 (43.8) [ 9.6,76.0]	4.8 (7.3) [ 0.0,60.8]
生年	性/年齢 ('15)	90 歳生存率	100 歳生存率
1930	女性 85 歳	71.7[66.0,77.5]	12.7 [ 2.4,41.5]
1940	女性 75 歳	58.7[43.2,71.2]	11.6 [ 1.4,46.6]
1950	女性 65 歳	59.0[41.8,75.1]	13.0 [ 1.2,56.6]
1960	女性 55 歳	62.3[44.4,79.6]	14.4 [ 1.1,62.7]
1970	女性 45 歳	65.2 (67.4) [ 45.0,83.1]	15.0 (23.5) [ 0.6,69.3]
1980	女性 35 歳	67.8 (71.3) [44.5,87.1]	16.8 (31.0) [ 0.6,75.8]

# CBD2-APCモデルによるコホート生存率(図)

Cohort Survival Function (CBD2+APC), Male

Cohort Survival Function (CBD2+APC), Female

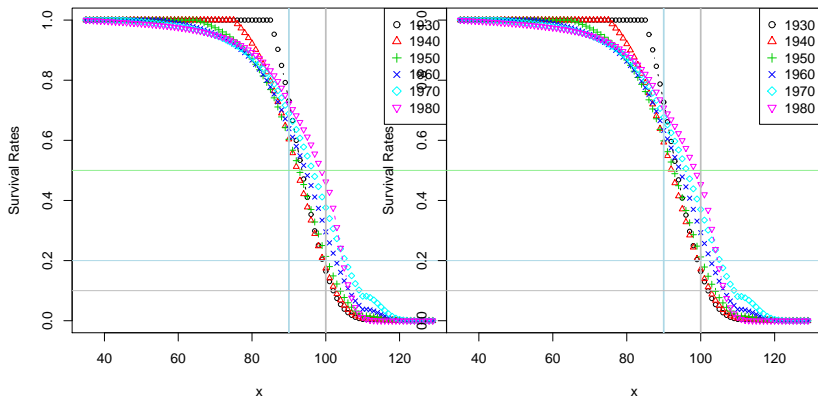


Figure 29: 出生コホート  
1930年から1980年までの男性  
の90歳,100歳生存確率

Figure 30: 出生コホート  
1930年から1980年までの女性  
の90歳,100歳生存確率

# CBD2-APCモデルによるコーホート生存率（表）

生年	性/年齢 ('15)	90歳生存率	100歳生存率
1930	男性 85歳	55.5 [46.6,66.6]	7.0 [ 0.1,22.3]
1940	男性 75歳	33.7 [20.6,55.3]	5.4 [ 0.0,41.9]
1950	男性 65歳	29.1 [12.5,59.4]	6.0 [ 0.0,54.3]
1960	男性 55歳	28.8 [ 8.8,63.1]	8.0 [ 0.0,63.1]
1970	男性 45歳	30.9 (38.0) [ 9.6,70.1]	11.2 (25.9) [ 0.0,69.7]
1980	男性 35歳	32.6 (43.8) [ 9.6,76.0]	12.2 (34.7) [ 0.0,75.9]
1930	女性 85歳	71.7[66.0,77.5]	15.9[ 6.1,37.0]
1940	女性 75歳	58.7[43.2,71.2]	14.9[ 3.3,45.4]
1950	女性 65歳	59.0[41.8,75.1]	17.7[ 2.7,58.6]
1960	女性 55歳	62.3[44.4,79.6]	22.9[ 3.6,65.2]
1970	女性 45歳	65.2 (67.4) [ 45.0,83.1]	28.7 (36.9) [ 5.6,72.1]
1980	女性 35歳	67.8 (71.3) [44.5,87.1]	30.6 (45.7) [ 2.9,80.7]

# 結論と今後の課題

- 超高齢期の死亡率を複数の確率論的な死亡率モデルを使って予測し、そのパフォーマンスの評価を行った。
- 一つのモデルでは全年齢を説明できず、年齢を分割する方が良いことが分かった。
- 内挿テストでは良好でも、コーホート効果の推定による予測誤差が大きいモデルがあり、外挿テストが重要であることが分かった。
- コーホート効果については識別が難しく、オーバーフィッティングの問題が生ずることがある。
- この結果、モデルとしては高齢層までは CBD2, 超高齢層では CBD, または APC が選択された。
- しかし,100 歳以上の死亡率は, データの変動も大きく, より踏み込んだ検討が必要である。
- 公衆衛生学的な見地や地域差や経済状況などからの考察による日本人の寿命伸長の原因の解明が必要である。



# 参考文献 I

- [1] 山口喜一, 南條義治, 重松峻夫, 小林和正編著 1993, 『生命表研究』, 古今書院
- [2] 花田恭, 飯塚かず子, 「エキストラ・スーパー・オールド生命表」, 厚生の指標, 第 36 巻第 8 号, 1989.8
- [3] 花田恭, 「100 歳以上の死亡確率」, 研究ノート,
- [4] 渋谷政昭, 華山宣胤, 2004, 「年齢時代区分データによる超高齢者寿命分布の推測」, 統計数理, 第 52 巻第 1 号, 117-134
- [5] 日本統計学会, 「21 世紀の統計科学」, 第 1 巻, 社会・経済の統計科学 (人口・政府統計・金融と保険) 国友直人・山本拓 編集・監修
- [6] 堀内四郎, 2010, 「日本人の寿命伸長: 要因と展望」, 人口問題研究, 66 - 3, 2010.9, 40-49
- [7] 国立社会保障・人口問題研究所 2012, 「日本の将来推計人口 (平成 24 年 1 月推計)」

- [8] Freeman S(1), Kurosawa H, Ebihara S, Kohzuki M., Understanding the oldest old in northern Japan: an overview of the functional ability and characteristics of centenarians., *Geriatr Gerontol Int.* 2010 Jan;10(1):78-84.
- [9] Shimizu K, Hirose N, Takayama M, Arai Y, Gondo Y, Ebihara Y, Yamamura K, Nakazawa S, Inagaki H, Masui Y, Kitagawa K., Relationship between physical and cognitive function, blood pressure and serumlipid concentration in centenarians. *Geriatr Gerontol Int.* 2008 Dec;8(4):300-2.
- [10] Lee, R. D., Carter, L. R., 1992. Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87 (419), 659-671.

- [11] Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., 2006a. A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance* 73 (4), 687-718.
- [12] Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A., Balevich, I., 2009. A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States. *North American Actuarial Journal* 13 (1), 1-35.
- [13] Haberman, S., Renshaw, A., 2009. On age-period-cohort parametric mortality rate projections. *Insurance: Mathematics and Economics* 45 (2), 255-270.
- [14] Plat, R., 2009. On stochastic mortality modeling. *Insurance: Mathematics and Economics* 45 (3), 393-404.

## 参考文献 IV

- [15] Haberman, S., Renshaw, A., 2011. A comparative study of parametric mortality projection models. Insurance: Mathematics and Economics 48 (1), 35-55.
- [16] Hunt, A., Blake, D., 2014. A general procedure for constructing mortality models. North American Actuarial Journal 18 (1), 116-138.
- [17] Human Mortality Database (HMD): website at [www.mortality.org](http://www.mortality.org)
- [18] Edouard Debonneuil, 2010, A simple model of mortality trends aiming at universality: Lee Carter + Cohort, AXA Cessions, Paris, France, <https://arxiv.org/pdf/1003.1802.pdf>
- [19] Andres M. Villegasa, Pietro Millosovichb, Vladimir Kaishev, 2016, StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling
- [20] Olga Mierzwa Frankie Gregorkiewicz, 2015, R in Insurance: Use of Stochastic Mortality Models, [http://rpubs.com/olgamie/smm\\_n/](http://rpubs.com/olgamie/smm_n/)