Discretization Self-Exciting Peaks Over Threshold models

栗栖大輔

東京大学 経済学研究科 D1

2016 年 12 月 22 日
研究集会
「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再帰的事象」

概要

- 導入
- 点過程の離散観測
- マーク付き Hawkes 過程
- SEPOT モデル
- 先行研究との関連
- 主結果
- 数値実験
- まとめ

導入

- 高頻度データの統計分析における仮定:

  (A) 観測データはある真の確率過程 (semimartingale) の離散観測

- 点過程の理論に基づく (高頻度データの) 実証分析の仮定:

  (B) 観測データは真の点過程からの実現値

- データは点過程 (semimartingale) を含む連続時間の確率過程からの離散観測であるという立場に立つと, (B) の考え方は正確ではない.

導入

- 高頻度観測 $\Delta_n \to 0$ における点過程モデリングの正当化
  - SEPOT の離散観測に対応するモデルは何か？
  - 離散時間モデルの漸近的挙動の理論的考察・数値実験
  - self-damping の場合の漸近的挙動 (数値実験)

点過程の離散観測

- まず点過程の離散観測における一般的な枠組みを考える．観測期間における点過程 N の jump time を $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{N(T)} \leq T$ とする．
- データの観測間隔が Δ であるとき,

$$J_k = \#\{i : t_i \in ((k-1)\Delta, k\Delta]\}.$$

- 補助的な確率過程を考える:

$$N^{\Delta}(t) = N((k-1)\Delta), \quad (k-1)\Delta \leq t < k\Delta.$$

点過程の離散観測

- 一般に N の経路ごとに以下の関係が成り立つ:

$$\sup_{(k-1)\Delta<t\leq k\Delta} |N^{\Delta}(t) - N(t)| \leq J_k$$

さらに前述の議論により, $\tilde{\Delta}$ を十分小さくとると,

$$\sup_{0<\Delta<\tilde{\Delta}} \sup_{0\leq t\leq T} |N^{\Delta}(t) - N(t)| \leq 1$$

が成り立つ.

点過程の離散観測

- 金融時系列データ (ex. negative return) を点過程で分析する際, 観測間隔 Δ のデータに関して, 時刻 $k\Delta$ での時系列の値が閾値 u_0 を超えていれば, jump が発生したとみなし, データそのものが点過程に従っているとして分析する方法が (B) の方法.
- しかし, 観測期間 $[0, T]$ において閾値 u_0 を超える事象が点過程に従っているとすると, (B) の考え方では離散観測された点過程を点過程としてモデル化しているため, 現実とは齟齬が生じる.

$$\widetilde{N}^{\Delta}(t) = \sum_{1 \leq m \leq k-1} \frac{N(((m-1)\Delta, m\Delta])}{J_m}, \quad (k-1)\Delta \leq t < k\Delta.$$

点過程の離散観測

- 実際, 例えば観測点 $k\Delta$ での値のみがデータとして利用可能な場合, 区間 $((k-1)\Delta, k\Delta)$ においてジャンプがあったとしても $k\Delta$ での値が閾値を下回っていた場合, 区間 $((k-1)\Delta, k\Delta]$ ではジャンプは無かったと判定されてしまう.
- 区間 $((k-1)\Delta, k\Delta]$ におけるデータの最大値や最小値も利用可能な場合はそのようなことは起こらない:

$$
\begin{aligned}
J_k > 0 &\Leftrightarrow N \text{ が } ((k-1)\Delta, k\Delta] \text{ で少なくとも 1 回ジャンプ} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{N}^{\Delta}(k\Delta) - \widetilde{N}^{\Delta}((k-1)\Delta) = 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

マーク付き Hawkes 過程

Definition (マーク付き Hawkes 過程の強度関数)

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \left(\eta + \int_{-\infty}^{t} \int_E g(t-s, z) N(ds \times dz)\right) P(\widetilde{Z}_t \in E|\mathcal{H}_t^N)$$
$$= \left(\eta + \int_{-\infty}^{t} g(t-s, \widetilde{Z}_s) N_g(ds)\right) P(\widetilde{Z}_t \in E|\mathcal{H}_t^N),$$

$\mathcal{H}_t^N$: N の過去の情報, $E = [u, \infty)$, $\eta > 0$,
$\widetilde{Z}_t|\mathcal{H}_t^N \sim F(\cdot|\mathcal{H}_t^N)$,
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$: 核関数,
$N_g(ds) = N(ds \times E)$: *ground process.*

- 特に, $g(t, z) = h(t)c(z)$ と書けるとき, h を減衰関数, $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ をインパクト関数という.

SEPOT モデル

Self-exciting peaks over threshold (SEPOT) model は金融時系列の点過程モデルとして知られている．このモデルでは閾値 u_0 を設定し，閾値を超過したイベントをカウントする 閾値超過のレートはマーク付き Hawkes 過程に従うとする:

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \left(\eta + \int_{-\infty}^{t} h(t-s, \widetilde{Z}_s) N_g(ds)\right)(1 - F(u)),$$

$E = [u, \infty)$, $u \geq 0$,
$\widetilde{Z}_s = (Z_s - u)^+$: $Z_s \overset{i.i.d.}{\sim} F$, 非負確率変数列, $a^+ = \max(a, 0)$.

SEPOT モデル

例 1 : Models with exponential decay and generalized linear impact function:

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \left(\eta_0 + \eta_1 \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)} \left[(\widetilde{Z}_s)^\delta \wedge L\right] N_g(ds)\right) (1+\xi u)^{-1/\xi},$$

$E = [u, \infty)$, $u \geq 0$.
$\widetilde{Z}_s = (Z_s - u)^+$, $Z_s \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{GPD}(\xi, 1)$,
$\eta_0, \eta_1, \gamma > 0$, $L > 1$, $0 \leq \delta \leq 1$: 定数.

- このモデルは国友・江原・栗栖 (2016) で複数の金融市場の因果性の分析に利用されている.

SEPOT モデル

例２：Models with exponential decay and non-linear impact function:

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \left(\eta_0 + \eta_1 \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)} \left[\left(1 + G^{\leftarrow}(F(\widetilde{Z}_s))\right) \wedge L\right] N_g(ds)\right) \times (1+\xi u)^{-1/\xi},$$

$E = [u, \infty)$, $u \geq 0$,
$\widetilde{Z}_s = (Z_s - u)^+$, $Z_s \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{GPD}(\xi, 1)$,
$\eta_0, \eta_1, \gamma > 0$, $L > 1$: 正定数,
F: CDF of $\mathrm{GPD}(\xi, u, 1)$,
$G^{\leftarrow}(\cdot)$: 平均 δ 非負確率変数の分布関数 G.

- このモデルは Grothe et al. (2014) (の special case) で将来の資産価格のジャンプに予測に利用されている.

先行研究との関連

点過程の弱収束：

- E: 完備可分距離空間, $(E, \mathcal{E})$: 可測空間,
- $M_p(E)$: E 上の点測度,
- $\mathcal{M}_p(E)$: $M_p(E)$ 上の σ-field,
- $N : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$, $P_N = P \circ N^{-1}$,

$$N_n \xrightarrow{w} N \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad P_{N_n} \xrightarrow{w} P_N$$

先行研究との関連

- $F \in D(G_\xi)$: 極値分布 G_ξ の吸引域.

  $X \sim F \in D(G_\xi)$

  $\Rightarrow \exists\{a_n\}, \{b_n\}, a_n \in \mathbb{R}, b_n > 0$ s.t.

$$nP\left(\frac{X - a_n}{b_n} \geq u\right) = n(1 - F(a_n u + b_n)) \overset{n\to\infty}{\to} (1 + \xi u)^{-1/\xi}.$$

先行研究との関連

主な結果を述べる前に, 先行研究の結果を紹介.

Proposition 1(Theorem 6.3 in Resnick(2007))

$X_k \overset{i.i.d.}{\sim} F \in D(G_\xi)$. 以下のマーク付き点過程を考える:

$$N_E^{\Delta_n}((a,b]) = \#\left\{k : \left(k\Delta_n, \frac{X_k - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n]^{-1}}}\right) \in (a,b] \times E, \right\},$$

$a < b$, $E = [u, \infty)$, $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$: centering and scaling sequences of G_ξ.

このとき, $N^{\Delta_n} \xrightarrow{w} N$ in $M_p([0,\infty) \times E)$ as $\Delta_n \to 0$. N は以下の強度をもつ

Poisson 過程:

$$\lambda(t|\mathcal{H}_t^N) = (1 + \xi u)^{-1/\xi}.$$

先行研究との関連

Proposition 1 は以下のように考えることが出来る:

$$N_E^{\Delta_n}((a,b]) = \sum_{k:k\Delta_n\in(a,b]} \tilde{\epsilon}_n(k) \approx \sum_{k:k\Delta_n\in(a,b]} \epsilon_n(k), \quad E=[u,\infty),$$

$$\tilde{\epsilon}_n(k) \overset{i.i.d.}{\sim} Bin\left(1, P\left(\frac{X_k - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u\right)\right),$$

$$\epsilon_n(k) \overset{i.i.d.}{\sim} Poi\left(P\left(\frac{X_k - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u\right)\right).$$

従って, $\{k\Delta_n, b_{[\Delta_n^{-1}]}^{-1}(X_k - a_{[\Delta_n^{-1}]})\}_{1\leq k\leq[\Delta_n^{-1}]}$ を観測データとみると, これは強度 $\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = (1+\xi u)^{-1/\xi}$ をもつ斉時 Poisson 過程 (non self-excited Hawkes) からの離散観測とみることが出来る.

先行研究との関連

- Poisson 過程

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \underbrace{1}_{\text{イベント発生レート}} \times \underbrace{(1+\xi u)^{-1/\xi}}_{\text{ジャンプ分布}}.$$

- SEPOT モデル

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \underbrace{\left(\eta + \int_{-\infty}^{t} h(t-s, \widetilde{Z}_s) N_g(ds)\right)}_{\text{イベント発生レート}} \times \underbrace{(1+\xi u)^{-1/\xi}}_{\text{ジャンプ分布}}.$$

主結果

- N: マーク付き Hawkes 過程,

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \left(\eta + \int_{-\infty}^{t} c(\widetilde{Z}_s)h(t-s)N_g(ds)\right)(1+\xi u)^{-1/\xi}.$$

- $X_E^{\Delta_n}$: N の離散観測:

$$\begin{aligned} X_E^{\Delta_n}(k) &= N(\{k\Delta_n\} \times E) - N(\{(k-1)\Delta_n\} \times E) \\ &= N_g(((k-1)\Delta_n, k\Delta_n]), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

主結果

$$\lambda_E((k-1)\Delta_n|\mathcal{H}^N_{(k-1)\Delta_n})$$
$$= \left(\eta + \int_{-\infty}^{(k-1)\Delta_n} c(\widetilde{Z}_s)h((k-1)\Delta_n - s)N_g(ds)\right)(1+\xi u)^{-1/\xi}$$
$$\approx \left(\eta + \sum_{m=1}^{\infty} c(\widetilde{Z}_{k-m})h(m\Delta_n)X_E^{\Delta_n}(k-m)\right)\Delta_n^{-1}P\left(\frac{X_1 - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u\right).$$

ここで,
$X_E^{\Delta_n}(k) = N(((k-1)\Delta_n, k\Delta_n] \times E) = N_g(((k-1)\Delta_n, k\Delta_n]).$

主結果

Proposition 1 の拡張として以下の確率過程を考える:

$$X_E^{\Delta_n}(k) = \epsilon_n(k) + \sum_{l=1}^{\infty}\left[h(l\Delta_n)\, c\left(\widetilde{Z}_{k-l}\right) P\left(\frac{X_{(k-l)} - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u\right)\right] \circ X_E^{\Delta_n}(k-l), \tag{1}$$

$X_k \overset{i.i.d.}{\sim} F \in D(G_\xi)$, $\widetilde{Z}_k \overset{i.i.d.}{\sim} GPD(\xi, 1)$,
$\epsilon_n(k) \overset{i.i.d.}{\sim} Poi(\eta P(b^{-1}_{[\Delta_n^{-1}]}(X_1 - a_{[\Delta_n^{-1}]}) \geq u))$ with $\eta > 0$,
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$: piecewise continuous, $h(t) = 0,\ t < 0$,
$E[c(\widetilde{Z}_1)] \int_0^\infty h(t)dt < 1$.

$E[c(\widetilde{Z}_1)^2] < \infty$ を仮定.

主結果

このとき, $\mathcal{F}_k^{\Delta_n} = \sigma(X_E^{\Delta_n}(m), \widetilde{Z}_m : m \leq k)$ とすると,

$$E\left[\frac{X_E^{\Delta_n}(k)}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{k-1}^{\Delta_n}\right]$$

$$= \left(\eta + \sum_{m=1}^{\infty} c(\widetilde{Z}_{k-m})h(m\Delta_n)X_E^{\Delta_n}(k-m)\right)\Delta_n^{-1}P\left(\frac{X_1 - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u\right).$$

更に,

$$E\left[\frac{X_E^{\Delta_n}(k)}{\Delta_n}|\mathcal{F}_{k-1}^{\Delta_n}\right] \approx E\left[\frac{N(dt \times E)}{dt}|\mathcal{H}_t^N\right] = \lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N).$$

$X_E^{\Delta_n}$ は random coefficient integer-valued autoregressive (RCINAR(∞)) process.

主結果

Definition (RCINAR(∞))

$\epsilon_n \overset{i.i.d.}{\sim} Poi(\alpha_0)$, $Z_n \overset{i.i.d.}{\sim} F$ *with* $E[Z_n^2] < \infty$,
$\alpha_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: *piecewise continuous*, $k = 1, 2, \ldots$.

$$\begin{aligned} X_n &= \epsilon_n + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(Z_{n-k}) \circ X_{n-k} \qquad (2) \\ &= \epsilon_n + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{X_{n-k}} \xi_l^{n,k}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$\xi_l^{n,k} \sim Poi(\alpha_k)$ かつ相異なる l, n, k に対して独立.
作用素 $\circ$ は *thinning operator*, $\alpha \circ X$ は X 個の *i.i.d.* $Poi(\alpha)$ の和で定義される. ($\alpha < 0$ のときは $\alpha \circ X = -(-\alpha) \circ X$ と解釈する)

主結果

Proposition 2 (RCINAR(∞) の平均定常性)

$\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ は以下を満たす:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} E[\alpha_k(Z_k)], \quad \sum_{k=1}^{\infty} |E[\alpha_k(Z_k)]| < 1.$$

このとき, (2) は平均定常で $E[X_n] = \alpha_0/(1 - \sum_{k=1}^{\infty} E[\alpha_k(Z_k)])$.

主結果

Proposition 3 (RCINAR(∞) の共分散の評価)

(X_n): Proposition 2 の条件を満たす RCINAR(∞).
$|\alpha_k(\cdot)| \leq L_k$, $k = 1, 2, \ldots$,
$K_L = \sum_{k=1}^{\infty} L_k < 1$
を仮定. このとき, RCINAR(∞) は共分散定常かつ,
$R(m) = \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+m})$ として,

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} R(m) \right| \leq \frac{\alpha_0}{(1 - K_L)^3}.$$

主結果

- Proposition 2 を利用すると,

$$E[X_E^{\Delta_n}(k)] = \frac{\eta \Delta_n P_n}{1 - E[c(\widetilde{Z}_1)] P_n \sum_{l=1}^{\infty} \Delta_n h(l\Delta_n)} = O(\Delta_n),$$

$$P_n = \Delta_n^{-1} P(b_{[\Delta_n^{-1}]}^{-1}(X_1 - a_{[\Delta_n^{-1}]}) \geq u).$$

- Proposition 3 を利用すると,

$$\mathrm{Var}(X_E^{\Delta_n}(k)) = O(\Delta_n), \quad \sum_{m=0}^{\infty} R^{\Delta_n}(m) = O(\Delta_n).$$

$$R^{\Delta_n(m)} = \mathrm{Cov}(X_E^{\Delta_n}(k), X_E^{\Delta_n}(k+m)).$$

主結果

Proposition 4 (RCINAR(∞) の RCAR(∞) 表現)

(X_n) を Proposition 2 の条件を満たす RCINAR(∞) とする．
このとき

$$u_n = X_n - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(Z_{n-k})X_{n-k} - \alpha_0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

は以下を満たす定常確率過程 (u_n):

$$E[u_n u_m] = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \frac{\alpha_0}{1-K} & n = m, \end{cases}$$

$K = \sum_{k=1}^{\infty} E[\alpha_k(Z_k)]$.

主結果

- $k > p$ に対して $\alpha_k \equiv 0$ ならば, random coefficient AR(∞) (RCAR(∞)) 過程 (3) は RCAR(p) 過程となる. この場合

$$Y_n = (X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-p+1})^\top, \quad \xi_n = (u_n, 0, \ldots, 0)^\top,$$

$$c_0 = (a_0, 0, \ldots, 0)^\top, A_n = \begin{pmatrix} a_1(Z_{n-1}) & a_2(Z_{n-2}) & \cdots & a_p(Z_{n-p}) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, (3) は RCAR(1) 過程の形で書ける:

$$Y_n = c_0 + A_n Y_{n-1} + \xi_n.$$

主結果

- Boshnakov(2011) では RCINAR(p) が定常であるための必要十分条件が議論されている．我々のケースでは, 平均定常であるための必要十分条件は

$$\mathrm{spr}(E[A_n]) < 1$$

である．またこの条件は RCAR(p) 過程の定常性の条件と同じ (Nicholls and Quinn(1982)). Proposition 2 の仮定の下では $\mathrm{spr}(E[A_n]) < 1$ が成り立つ.

主結果

また RCINAR(p) が共分散定常であるための必要十分条件は

$$\mathrm{spr}(E[A_n \otimes A_n]) < 1.$$

このことに関して以下の結果が得られる.

Proposition 5 (RCINAR(p) の共分散定常性)

以下の条件を満たす RCINAR(p) は共分散定常：

$$0 \leq \sum_{k=1}^{p} E[\alpha_k(Z_k)], \quad \sum_{k=1}^{p} |E[\alpha_k(Z_k)]| < 1, \quad \sup_{1\leq k\leq p} E[\alpha_k(Z_k)^2] < 1.$$

主結果

SEPOT モデルの離散化の話に戻る．RCINAR(∞)

$$
\begin{aligned}
X_E^{\Delta_n}(k) &= \epsilon_n(k) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \left[h\left(l\Delta_n\right) c\left(\widetilde{Z}_{k-l}\right) P\left(\frac{X_{(k-l)} - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u \right) \right] \circ X_E^{\Delta_n}(k-l)
\end{aligned}
$$

を用いて以下の点過程を考える:

$$
\widetilde{N}_E^{\Delta_n}((a,b]) = \sum_{k: k\Delta_n \in (a,b]} \widetilde{X}_E^{\Delta_n}(k), \quad E = [u, \infty),
$$

$$
\widetilde{X}_E^{\Delta_n}(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } X_E^{\Delta_n}(k) > 0, \\ 0 & \text{if } X_E^{\Delta_n}(k) = 0. \end{cases}
$$

主結果

Theorem 1(マーク付き SEPOT モデルの離散近似)

$X_E^{\Delta_n}$ を (1) の RCINAR(∞) 過程,

$$0 \leq c(x) \leq \exists L > 0, \quad L \int h(t)dt < 1,$$

を仮定. このとき, $\widetilde{N}_E^{\Delta_n} \xrightarrow{w} N$ in $M_p(\mathbb{R} \times E)$ as $\Delta_n \to 0$. ただし, N はの強度関数をもつマーク付き Hawkes 過程:

$$\lambda_E(t|\mathcal{H}_t^N) = \left(\eta + \int_{-\infty}^{t} h(t-s)c(\widetilde{Z}_s)N_g(ds)\right)(1+\xi u)^{-1/\xi},$$

$$\widetilde{Z}_s = (Z_s - u)^+, Z_s \overset{i.i.d.}{\sim} GPD(\xi, 1).$$

主結果

- Theorem 1 は Propositon 1 の一般化.
  $h(t) \equiv 0$, $\eta = 1$, $c(x) = 1$ とすると,
  $X_E^{\Delta_n}(k) \sim Poi(\Delta_n P(b_{[\Delta_n^{-1}]^{-1}}(X_1 - a_{[\Delta_n^{-1}]})))$

- Kirchner(2016) の結果の i.i.d. マーク付き Hawkes 過程への拡張.

- また Theorem 1 の結果から, 点過程 $N_E^{\Delta_n}$ は SEPOT モデルの離散近似とみることが出来る.
  $X_E^{\Delta_n}$ は Hawkes 過程の局所的な離散近似. その条件付き期待値は $N_E^{\Delta_n}$ の強度関数に対応.

主結果

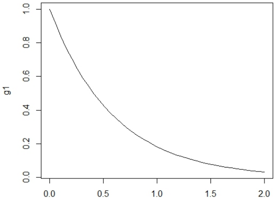
- 条件 $L\int h(t)dt < 1$ は非線形 Hawkes 過程の stability (定常解の存在, CLT) の議論でも利用される (Brémaud and Massoulié(1996), Zhu(2013)).
- $\widetilde{N}_E^{\Delta_n}$ は 一般論で導入した $\widetilde{N}^{\Delta}$ に対応する. また $N_E^{\Delta_n}((a,b]) = \sum_{k:k\Delta_n\in(a,b]} X_E^{\Delta_n}(k)$ は N^{Δ} に対応する.

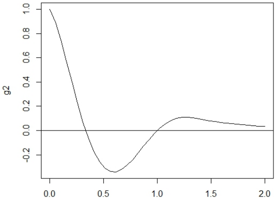
$$P\left(X_E^{\Delta_n}(k) \in \{0,1\} : k\Delta_n \in (a,b]\right) \xrightarrow{\Delta_n \downarrow 0} 1, \quad \forall a < b.$$

数値実験

Theorem 1 を確認するため,
近似的に以下の RCINAR(p) からデータ生成:

- $p = 30$, $\eta = 1$, $Z_k \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{GPD}(0.2, 0.01)$
- Case I : $g_1(x,t) = [(1+x) \wedge 1.5]e^{-1.7t}$,
  Case II: $g_2(x,t) = [(1+x) \wedge 1.5]e^{-1.7t} \times \cos((1.5\pi t) \wedge 2\pi)$,
- $\Delta_n = 1/4, 1/16, 1/32$ (Case A, B, C)





数値実験

- $N_E^{\Delta_n}((0, k\Delta_n]),\ k\Delta_n \in (0, 10]$
- $X_E^{\Delta_n}(k),\ k\Delta_n \in (0, 10]$ (RCINAR(p))
- $X_E^{\Delta_n}(k)$ の scaled conditional mean (conditional intensity):

$$P_n^{-1} E\left[\frac{X_E^{\Delta_n}(k)}{\Delta_n} | \mathcal{F}_{(k-1)}^{\Delta_n}\right] = \eta + \sum_{m=1}^{p} h(k\Delta_n - m) c(\widetilde{Z}_{k-m}) X_E^{\Delta_n}(k-m),$$

where $P_n = \Delta_n^{-1} P\left(\frac{X_1 - a_{[\Delta_n^{-1}]}}{b_{[\Delta_n^{-1}]}} \geq u\right)$.

数値実験 ($\Delta_n = 1/4$)

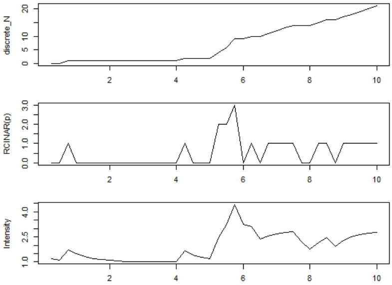


Figure: Case I-A

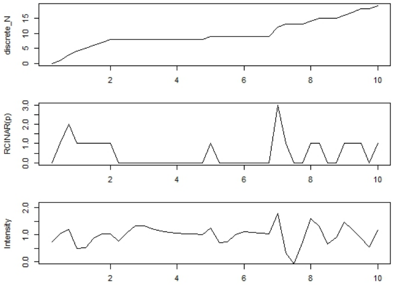


Figure: Case II-A

数値実験 $(\Delta_n = 1/16)$

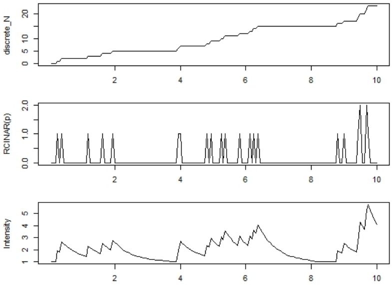


Figure: Case I-B

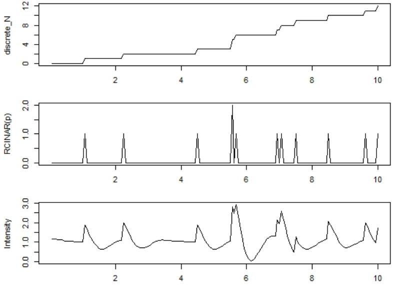


Figure: Case II-B

数値実験 ($\Delta_n = 1/32$)

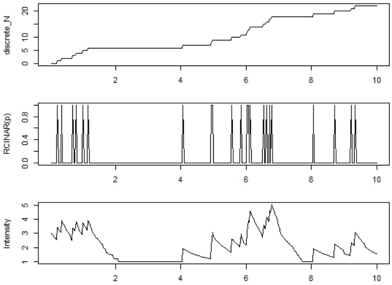


Figure: Case I-C

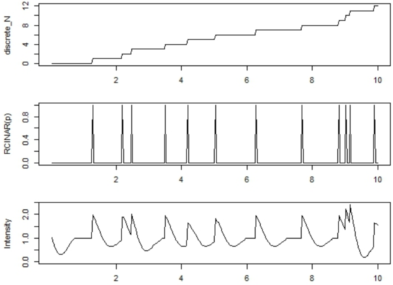


Figure: Case II-C

まとめ

- 点過程の離散観測の枠組みを議論.
- 高頻度データ分析における理論と応用のギャップを埋める.
- RCINAR(∞) (離散時間の確率過程) とマーク付き Hawkes 過程 (連続時間の確率過程) の関係.
- 従来の SEPOT モデルを点過程の離散観測の枠組みで見直す.
- self-damping のケースの数値実験.

今後の課題

- 多次元への拡張: 多変量極値理論と関連.
- self (mutually) damping: 多次元のケースではある成分でのjump が他の成分の将来の jump の発生確率 (閾値超過のレート) を低下させるケースも考えられる.

  例: ある銘柄の売買行動が他の銘柄の取引頻度を低下させる.

- Hawkes 過程はパラメータが多いのが難点:

  Bayesian modeling (離散・連続の場合両方):
  (i) RCINAR(p) において: Poisson 分布 $\rightarrow$ 二項分布,
  (ii) RCINAR(p) の次数選択.

参考文献 1

- Boshnakov, G.N. (2011), On first and second stationarity of random coefficient models, *Linear Algebra and its Appl.* 434, 415-423.
- Brémaud, P. and Massoulié, L. (1996), Stability of nonlinear Hawkes processes. *Ann. Probab.* 24-3, 1563-1588.
- Grothe, O., Korniichuk, V. and Manner, H. (2014), Modeling multivariate extreme events using self-exciting point processes. *J. Econometrics* 182, 269-289.
- Kirchner, M. (2016), Hawkes and INAR(∞) processes, *Stoch. Proc. Appl.*, 126, 2494-2525.
- 国友直人・江原斐夫・栗栖大輔 (2016), 「多次元ホークス型モデルによる金融市場の因果性分析」 CIRJE J-278.

参考文献 2

- Kurisu, D. (2016), Discretization of Self-Exciting Peaks Over Threshold Models. arXiv:1612.06109.
- Nicholls, D.F. and Quinn, B.G. (1982), *Random-Coefficient Autoregressive Models: An Introduction*. Lecture Notes in Statist. 11. Springer, New York.
- Resnick, S. (2007), *Heavy Tail Phenomena*, Springer.
- Solo, V. (2007), Likelihood function for multivariate point processes with coincidences. *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control New Orleans, LA, USA, Dec. 12-14, 2007*.
- Zhu, L. (2013), Central limit theorem for nonlinear Hawkes processes. *J. Appl. Probab.* 50-3, 760-771.

Dynamic risk measures for stochastic asset processes from ruin theory

Yasutaka Shimizu

Department of Applied Mathematics, Waseda University

経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再起的事象@東大
2016 年 12 月 22 日

Joint work with S.Tanaka (Nihon Univ.)

Introduction

- A new regulation framework, e.g., Solvency II, requires a company to keep not only a *technical provision* that is a "best estimate" of obligations plus a "risk margin" but also an additional asset called Solvency Capital Requirement (SCR) to absorb an "unexpected future loss".
- In the spirit of a solvency regulation, the SCR should be determined in *"going-concern view"*: Not only that the value of asset is greater than the liability (*"run-off" view*), but also a company can continue their business up to a maturity without ruin.
- Solvency risk is closely related to the company's ruin.
  $\Rightarrow$ "Ruin-related" risk measure for solvency evaluation.
- In this talk, we will propose a risk measure to determin the SCR in going-concern view based on the ruin theory.

What is solvency?: Asset-and-Liability Model

On a stochastic basis $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$,

- $X^u = (X_t^u)_{t\geq 0}$: "Net asset" process:

$$X_t^u = A_t - L_t, \quad X_0^u = u \quad a.s.$$

- $A = (A_t)_{t\geq 0}$: a process of "market value" of assets;
- $L = (L_t)_{t\geq 0}$: a process of "market-consistent" liability (technical provisions): (*a "best estimate" of* obligations + *"risk margin"*).
- The company is solvent at time t if $X_t^u \geq 0$ (*run-off view*).
- The solvency risk deoends on "ruin":

$$\tau := \tau_u = \inf\{t > 0 | X_t^u < 0\} \text{ (Time of ruin)}$$

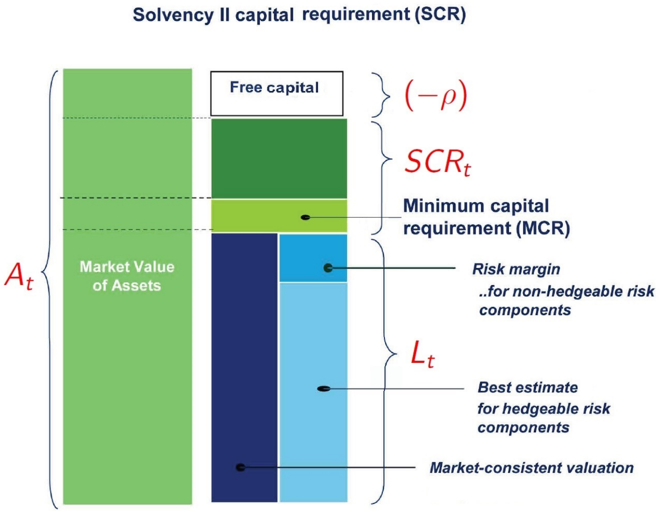
A risk measure ρ

Definition (Actuarial definition, cf. Denuit *et al.* (2005))

A risk measure is a functional $\rho : \mathcal{M}(\text{"future loss"}) \to \mathbb{R}$ representing the extra cash which has to be added to the current state to make it "acceptable".

- "$\rho > 0$": the company has to add the extra cash ρ for "acceptability";
- "$\rho \leq 0$": it is "acceptable" even if they use the cash $(-\rho)$ (*Free capital*).
  e.g., Wüthrich and Merz (2013): Acceptability condition.
- In preparation for an "unexpected future loss", the company should keep the reserve

$$SCR_t := X_t^u - (-\rho) \ \geq 0$$


Solvency II capital requirement (SCR)
Free capital
$(-\rho)$
SCR_t
Minimum capital requirement (MCR)
A_t
Market Value of Assets
Risk margin
..for non-hedgeable risk components
L_t
Best estimate for hedgeable risk components
Market-consistent valuation

Solvency on going-concern view

Definition (Wüthrich and Merz (2013))

The company with X^u is *solvent* at time t w.r.t. a *"risk measure ρ"* if

(i) $X_t^u \geq 0$ (acounting condition).

(ii) $\rho \leq 0$ (acceptability condition);

- Condition (i) is of *run-off view*.
- If ρ reflects some "ruin risk in $[t, T]$", (ii) can be *going-concern view*.

Risk measures: axiomatic approach

Definition (Risk measures, coherency)

A map $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ is called a *risk measure* if ρ satisfies:

- *Monotonicity:* $\rho(X) \leq \rho(Y)$ for any $X, Y \in \mathcal{M}$ such that $X \preceq Y$.
- *Translativity:* $\rho(X + c) = \rho(X) + c$ for any $X \in \mathcal{M}$ and $c \in \mathbb{R}$.

In addition, a risk measure ρ is called *coherent* if ρ further satisfies:

- *Positive Homogeneity:* $\rho(\lambda \cdot X) = \lambda\rho(X)$ for any $X \in \mathcal{M}$ and $\lambda > 0$.
- *Subadditivity:* $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ for any $X, Y \in \mathcal{M}$.

Examples:

Consider a classical risk model: $X_t^u = u + ct - \sum_{j=1}^{N_t} Z_j$, where $Z_j \sim^d Z$ (IID).

VaR-type risk measure due to ruin: Trufin et al. (2010)

- VaR-type: $\rho_\epsilon(Z) = \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mathbb{P}(\tau_{u+x} < \infty) < \epsilon\}$
- TVaR-type: $\overline{\rho}_\epsilon(Z) := \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \rho_u(Z)\,\mathrm{d}u$ (coherent)

But they suppose that a “loss Z” is the individual claim size...?

Expected area in red: Loisel and Trufin (2014)

For fixed $T, A > 0$,

$$\rho_A^T(X^u) = \inf\left\{v \in \mathbb{R} \,\middle|\, \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t^v| \mathbf{1}_{\{X_t<0\}}\,\mathrm{d}t\right] \le A\right\}$$

They consider the ordering $X^u \preceq Y^u \;\Leftrightarrow\; X_t^u \le_{icx} Y_t^u$ for any $t \ge 0$.

What is ρ to be?

- ρ should reflect "ruin-related" risks for *going-concern view point*.
- ρ should measure a "future loss": $\rho = \rho(\widetilde{X}^u)$ for $\widetilde{X}^u = (-X_t^u)_{t\in[0,T]}$.
- ρ should satisfy some mathematical conditions:
  Monotonicity, cash invariant, positive homogenity, subadditivity, ... etc.
- The risk should be measured "dynamically in time":

$$\rho = (\rho_t(\widetilde{X}^u))_{t\in[0,T]},$$

adapted to the "information" $\mathcal{F}_t$.

Goal

Ruin-related, mathematically valid, dynamic risk measures:

$$\rho_t(\widetilde{X}^u) \ : \ \text{"Stochastic processes"} \to \text{"}\mathcal{F}_t\text{-measurable r.v."}$$

Notation

- $\mathbb{D} := \mathbb{D}[0,\infty)$: a space of càdlàg functions on $[0,\infty)$.
- For $X, Y \in \mathbb{D}$, denote by

$$X + Y = (X_t + Y_t)_{t\geq 0}, \quad X \cdot Y = (X_t Y_t)_{t\geq 0} \in \mathbb{D}.$$

- $\mathcal{M}_t(\mathbb{R})$: a family of $\mathcal{F}_t$-measurable random variables;
- $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$: a family of stochastic processes whose paths are in $\mathbb{D}$, and an order " $\preceq$ " is defined in $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})$: if X, Y are "loss processes",

$$X \preceq Y \quad \Leftrightarrow \quad Y \text{ is "riskier" than } X$$

- $\mathcal{M}_t(\mathbb{D}) := \{X_{\cdot\wedge t} = (X_{u\wedge t})_{u\geq 0} \,|\, X \in \mathcal{M}_\infty(\mathbb{D})\}$: a "stopped" processes. Note $X \in \mathcal{M}_t(\mathbb{D})$ is $\mathcal{F}_t$-measurable.

Dynamic risk measures

Let $\widetilde{\mathcal{M}}_T(\mathbb{D}) \subset \mathcal{M}_T(\mathbb{D})$ for some $T > 0$.

Definition (DRM cf. Kriele and Wolf (2014))

A dynamic risk measure on $\widetilde{\mathcal{M}}_T(\mathbb{D})$ is a family of maps $\rho = (\rho_t)_{t\in[0,T]}$ with

$$\rho_t \; : \; \widetilde{\mathcal{M}}_T(\mathbb{D}) \to \mathcal{M}_t(\mathbb{R}),$$

such that the following two properties hold true:

[MO] $\rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$ *a.s.* for any $X, Y \in \widetilde{\mathcal{M}}_T(\mathbb{D})$ such that $X \preceq Y$;

[TR] $\rho_t(X + C) = \rho_t(X) + C_t$ *a.s.* for any $C \in \widetilde{\mathcal{M}}_t(\mathbb{D})$, $X \in \widetilde{\mathcal{M}}_T(\mathbb{D})$.

In addition, a dynamic risk measure ρ is called coherent if it satisfies that

[PH] $\rho_t(K \cdot X) = K_t \rho_t(X)$ *a.s.* for any $K \in \widetilde{\mathcal{M}}_t(\mathbb{D})$ with $K > 0$ *a.s.*;

[SA] $\rho_t(X_1 + X_2) \leq \rho_t(X_1) + \rho_t(X_2)$ *a.s.* for any $X_1, X_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}_T(\mathbb{D})$.

Ruin-related risks?

- A "ruin-related" loss up to the maturity T:

$$R_T \quad := \quad \begin{cases} e^{-\delta\tau} w(X_{\tau-}, X_\tau) & (\tau \le T) \\ e^{-\delta T} w(X_{T-}, X_T) & (\tau > T) \end{cases} = e^{-\delta(\tau\wedge T)} w(X^u_{(\tau\wedge T)-}, X^u_{\tau\wedge T})$$

- "Risk at time t": for $t \in [0, T]$,

$$\phi^X_t(u, T) = \begin{cases} \mathbb{E}\left[e^{-\delta(\tau\wedge T)} w(X^u_{(\tau\wedge T)-}, X^u_{\tau\wedge T}) \middle| \mathcal{F}_t \right] & (\tau > t) \\ \infty & (\tau \le t) \end{cases}$$

$\Rightarrow \phi^X_0(u, T)$: Finite-time Gerber-Shiu function: **Cojocaru, Garrido and Zhou (2014)**.

Definition

We call the process $\phi^X(u, T) = (\phi^X_t(u, T))_{t\ge 0}$ a *"Gerber-Shiu risk process"* if the function "w" is chosen so that

$$\phi^X_0(u + v, T) \le \phi^X_0(u, T),$$

for any $u, v, T > 0$.

Example

When $w(x, y) = \mathbf{1}_{\{y<0\}}$ and $\delta = 0$,

$$\phi_0^X(u, T) = \mathbb{P}(X^u_{\tau_u \wedge T} < 0) = \mathbb{P}(\tau_u \leq T),$$

that represents the finite-time ruin probability. This clearly satisfies that

$$\phi_0^X(u, T) = \mathbb{P}(\tau_u \leq T) > \mathbb{P}(\tau_{u+v} \leq T) = \phi_0^X(u + v, T)$$

for any $v, T > 0$ and $u \in \mathbb{R}$.

Gerber-Shiu "dynamic" risk measure

Definition

For $\epsilon > 0$, a map $GS^{\epsilon}_{t,T} : \mathcal{M}_T(\mathbb{D}) \to \mathcal{M}_t(\mathbb{R})$ is defined by

$$GS^{\epsilon}_{t,T}(\widetilde{X}^u) := \inf\left\{z \in \mathbb{R} \,|\, \phi^X_t(u+z, T) < \epsilon\right\} \quad a.s.,$$

where $\phi^X(u, T)$ is a "Gerber-Shiu risk process"; $\inf\{\emptyset\} = \infty$.

- $GS^{\epsilon}_{t,T}$ is the minimum extra capital that should have been added to the initial surplus u in order to make a Gerber-Shiu risk between $[t, T]$ less than $\epsilon > 0$.
- If X is a Markov process, it follows by the Markov property that

$$GS^{\epsilon}_{t,T}(\widetilde{X}^u) = \inf\left\{z \in \mathbb{R} \,|\, \phi^X_0(X_t + z, T - t) < \epsilon\right\} \quad \text{on } \{\tau > t\}.$$

Let $\mathcal{M}^*_T(\mathbb{D}) = \mathcal{M}_T(\mathbb{D}) \cap \mathcal{M}^*$ for $\mathcal{M}^*$: a family of Markov processes:

$$GS^{\epsilon}_{t,T} : \mathcal{M}^*_T(\mathbb{D}) \to \mathcal{M}_t(\mathbb{R}).$$

Theorem

Suppose that ϕ^X is a "Gerber-Shiu risk process" for any $X \in \mathcal{M}^*_T(\mathbb{D})$. Then $GS^{\epsilon}_{t,T}$ satisfies

- *[TR];*
- *[MO] if $\widetilde{X}^u \preceq \widetilde{Y}^u \;\Rightarrow\; \phi^X_0(u,T) \le \phi^Y_0(u,T)$;*
- *[PH] if $\phi^{\lambda X}_0(\lambda u, T) = \phi^X_0(u,T), \quad \lambda, u, T > 0$.*

Remark

We could not expect [SA] to $GS^{\epsilon}_{t,T}$ due to its VaR-type structure.

Examples: Gerber-Shiu dynamic risk measure

Example (Finite-time ruin probability)

Take $w(x, y) = \mathbf{1}_{\{y<0\}}$ and $\delta = 0$:

$$GS^{\epsilon}_{t,T}(\widetilde{X}^u) = \inf\{z \geq 0 \,|\, P(\tau_{u+z} \leq T|\mathcal{F}_t) < \epsilon\} \quad \text{on } \{\tau > t\}$$

- Define an order in $M_T(\mathbb{D})$:

$$\widetilde{X}^u \preceq \widetilde{Y}^u \quad \Leftrightarrow \quad \tau^Y \leq_{st} \tau^X,$$

  where $\leq_{st}$ is the "stochastic order": $X \leq_{st} Y \;\Leftrightarrow\; F_X(x) \geq F_Y(x)$ *a.e.*
  (The portfolio with earlier ruin is riskier than the one with later ruin.)
- Then $GS^{\epsilon}_{\cdot,T}$ is a dynamic risk measure.
- [PH] also holds true:

$$GS^{\epsilon}_{t,T}(\lambda \cdot \widetilde{X}^u) = \lambda_t GS^{\epsilon}_{t,T}(\widetilde{X}^u).$$

Example (Distribution of deficit)

Take $w(x,y) = \mathbf{1}_{\{-y>\beta\}}$ with a small β and $\epsilon = 1-\alpha$ $(\alpha \approx 1)$:

$$GS^{\epsilon}_{t,T}(\widetilde{X}^u) = \inf\{z \geq 0 \,|\, P(-X^{u+z}_{\tau\wedge T} \leq \beta | \mathcal{F}_t) \geq \alpha\} \quad \text{on } \{\tau > t\}$$

- Define an order in $M_T(\mathbb{D})$:

$$\widetilde{X}^u \preceq \widetilde{Y}^u \quad \Leftrightarrow \quad -X^u_{\tau^X\wedge T} \leq_{st} -Y^u_{\tau^Y\wedge T}$$

  (The portfolio with stochastically larger deficit (at ruin, or at maturity) is riskier than the one with smaller deficit.)

- Then $GS^{\epsilon}_{\cdot,T}$ is a dynamic risk measure.

Example: Financial and insurance liabilities

- $\mathbb{D}^d[0, T]$: d-dimensional càdlàg functions $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$.
- $\mathcal{B}_t^d := \sigma(x : x_s, s \leq t)$ and $\mathbb{B}^d := (\mathcal{B}_t^d)_{t\in[0,T]}$.
- $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ with

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{T}_t,$$

  where
- $\mathbb{G} := (\mathcal{G}_t)_{t\in[0,T]}$ is the financial information;
- $\mathbb{T} := (\mathcal{T}_t)_{t\in[0,T]}$ is the insurance information.
  Suppose that $\mathcal{G}_t$ and $\mathcal{T}_t$ are independent under $\mathbb{P}$.

An asset of an insurance company, say $V = (V_t)_{t \geq 0}$, of the form

$$V_t = u + P_t + Y_t(F) - S_t - S'_t(F), \quad t \in [0, T],$$

- $P : \Omega \to \mathbb{D}[0, T]$ is $\mathbb{T}$-adapted: the premium income.
- $F : \Omega \to \mathbb{D}^d[0, T]$ is $\mathbb{G}$-adapted: a value of an investing financial portfolio.
- $Y : \Omega \times \mathbb{D}^d[0, T] \to \mathbb{D}[0, T]$ is $\mathbb{G} \otimes \mathbb{B}^d$-adapted:
  an aggregate financial gain-and-loss due to F, that is, the company has a latent profit at t if $Y_t(F) > 0$, and has a latent loss if $Y_t(F) < 0$.
- $S : \Omega \to \mathbb{D}[0, T]$ is $\mathbb{T}$-adapted: aggregate claims and other insurance technical variables.
- $S' : \Omega \times \mathbb{D}^d[0, T] \to \mathbb{D}[0, T]$ is $\mathbb{F} \otimes \mathbb{B}^d$-adapted,
- For given $x \in \mathbb{D}^d[0, T]$, $S'(x) : \Omega \to \mathbb{D}[0, T]$ is $\mathbb{T}$-adapted.
  $S'(F)$: insurance obligations due to a financial variable F. e.g., payments for equity-linked insurance or variable annuities, among others.

- Liability: $l_t := -Y_t(F) + S_t + S'_t(F)$.
- Let $R_t(l_T)$ be a "best estimate" of the future loss l_T at time t:

$$R_t(l_T) := -\left\{ Y_t(F) + \mathbb{E}^*[\widehat{Y}_{t,T}(F)|\mathcal{G}_t] \right\} + \left\{ S_t + \mathbb{E}^\star[\widehat{S}_{t,T}|\mathcal{T}_t] \right\} + \left\{ S'_t(F) + \mathbb{E}^\star[\widehat{S'}_{t,T}(F)|\mathcal{F}_t] \right\}$$

where

$$\widehat{Z}_{t,T} := e^{rt} \int_t^T e^{-rs}\, \mathrm{d}Z_s;$$

$\mathbb{P}^*$ is the risk neutral prob. and $\mathbb{P}^\star$ is the actuarial risk adjusted prob.

Then the net asset is given by

$$X_t^u = u + P_t - R_t(l_T)$$

Example (A simple example of ALM)

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ with a Wiener process W and a compound Poisson process S.
- $\mathcal{G}_t = \sigma(W_u : u \le t)$, $\mathcal{T}_t = \sigma(S_u : u \le t)$.
- $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$, where $N_t \sim Po(\lambda t)$ is a number process of insurance claims, and U_i's are claim sizes, which are i.i.d. with mean μ.
- $S'_t(F) \equiv 0$ for simplicity.
- $Y_t(F) = F_t - F_0$ for a stock price F, e.g., $\mathrm{d}F_t = b_t\,\mathrm{d}t + \sigma_t\,\mathrm{d}W_t$.
- $P_t = (1+\theta)\lambda\mu t$, where $\theta > 0$ is a safety loading.
- $\mathbb{P}^*$: the risk neutral probability:

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{G}_t} = \exp\left(-\int_0^t \vartheta_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \vartheta_s^2\,ds\right) \quad \text{with} \quad \vartheta_t = \frac{b_t - rF_t}{\sigma_t}$$

- $P^\star$: a risk adjusted probability s.t. $\mathbb{E}^\star[S_T|\mathcal{T}_t] > \mathbb{E}[S_T|\mathcal{T}_t]$ (loading condition).

A simple example of ALM (cont.)

Then there exits some $\beta > 0$ such that

$$\mathbb{E}^*\left[\widehat{Y}_{s,T}(F)|\mathcal{G}_t\right] = \left(1 - e^{-r(T-t)}\right) F_t,$$
$$\mathbb{E}^\star\left[\widehat{S}_{t,T}|\mathcal{T}_t\right] = \frac{\lambda\mu}{r}(1+\beta)\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)$$

and

$$R_t(I_T) := -\left\{Y_t(F) + \mathbb{E}^*[\widehat{Y}_{t,T}(F)|\mathcal{G}_t]\right\} + \left\{S_t + \mathbb{E}^\star[\widehat{S}_{t,T}|\mathcal{T}_t]\right\}$$
$$= -\left\{[1 + \left(1 - e^{-r(T-t)}\right)]F_t - F_0\right\} + \left\{S_t + \frac{\lambda\mu}{r}(1+\beta)\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)\right\}.$$

Considering the case: $r \to 0$, we have

$$X_t^x = u - \lambda\mu(1+\beta)T + \lambda\mu(2+\theta+\beta)t - S_t + (F_t - F_0) + o(1), \quad r \to 0.$$

Diffusion perturbation model

Example

- Consider a simple case: $F_t = F_0 + \alpha t + \sigma W_t$,

$$X_t^u = u - \lambda\mu(1+\beta)T + \lambda\mu(2+\theta+\beta+\alpha)t - S_t + (F_t - F_0) + o(1), \quad r \to 0.$$

- SCR_t is computed by Cramér-Lundberg approximation:

$$SCR_t \sim \frac{1}{\gamma} \log \frac{\lambda C(\rho,\gamma) + w(0,0)(\rho+\gamma)\sigma^2/2}{\epsilon(\lambda \int_0^\infty x e^{\gamma x} F_U(dx) - c + \sigma^2\gamma)}, \quad u \to \infty,$$

where positive constants ρ and $-\gamma$ are solutions to

$$\lambda\mu(2+\theta+\beta+\alpha)\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\gamma^2 - \lambda(m_U(\gamma) - 1) = \delta.$$

and the constant $C(\rho,\gamma)$ is given explicitly:

$$C(\rho,\gamma) = \int_0^\infty (e^{\gamma x} - e^{-\rho x}) \int_x^\infty w(x, y-x)\, F_U(dy) dx.$$

- This simple model could be a "benchmark" to evaluate SCR.

Further studies

- Computation or approximation of $\phi_0^X(u, T)$: **e.g., Cojocaru et al. (2014)**.
- Statistical inference for $\phi_0^X(u, T)$; **cf. S. (2011); Zhimin and S. (2014)**
- Generalization of ϕ_0^X: **e.g., Feng and S. (2013)**

$$\phi_0^X(x, T) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau \wedge T} V(X_u)\,\mathrm{d}u \middle| X_0 = x\right]$$

a path-dependent case, which is an extension of Loisel and Trufin (2014).

日本人の寿命
-過去・現在・未来-

田中　周二 (発表者) [日本大学文理学部]
長谷川敏彦 [未来医療研究機構代表理事]
伊藤　憲祐 [日本医大学院循環器内科学分野]

December 5, 2016

(注) 当研究は, 研究代表者　国友直人　基盤研究 (A) 経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再起的事象 No.12601041380300001 の資金援助を受けている。

Contents

発表の概要

わが国は, 今から 50 年後には, 人類史的に見ても未曽有の超高齢化社会を迎えることになる。

- 社会保障・人口問題研究所の H24 年将来人口推計では,1960 年生まれのコーホート 100 歳生存率は女性で 17 % [13.9 %,20.3 %](それぞれ中位推定 [低位推定, 高位推定]), 男性で 4.7 % [3.6 %,6.0 %] である。これから 1970 年生まれ,1980 年生まれの女性では 20 %を上回ってゆく可能性が高いことが示唆される。
- しかし, 問題はより深刻である可能性がある。今回, 我々は国勢調査が最初に公表された明治 24 年 (1891 年) 以降から 2014 年までの長期の死亡率のデータにより, 最近, 飛躍的な発展を遂げている死亡率予測の代表的な確率論的死亡率モデルを用いて検証することにした。
- 我々の選択したモデルの一つでは 1980 年代生まれのコーホート 100 歳生存率は中央値で女性で約 30～50 %, 男性で約 20～30 %となる。もし, このような結果が実現すると, 現在の社会保障制度の根幹を揺るがす可能性がある。
- 超高齢期, 特に 100 歳以上人口の分析を行うことが益々重要になってきている。幸い 100 歳前後の超高齢期のデータの入手が容易になってきたことから, 研究の環境は整ってきている。

人類の寿命の記録

- 今年8月31日に127歳の誕生日を迎えたメキシコ人女性, リーンドラ・ベッセラ・ランブラレスさんが最高齢とされるが出生届けがない。はっきりした出生届のあるギネス世界記録は122歳のフランス人女性 Jeanne Calment（1997年死去）さん。
- ギネス世界記録の「存命している世界最高齢者」に認定されているのが、日本人女性の大川ミサヲさん,116歳。先月、男性の世界最高齢者として111歳の百井盛さんもギネスに認定。
- きんさんぎんさんは、記録的な長寿で話題となったアイドル双子姉妹。

  成田きん（なりた きん,107歳,1892年8月1日 - 2000年1月23日）

  蟹江ぎん（かにえ ぎん,108歳,1892年8月1日 - 2001年2月28日）
- インドネシアのジャワ島に住むムバフ・ゴト（Mbah Gotho）さんは1870年12月31日生まれで現在145歳になるとされるが？

人類の寿命の限界？

Human age limit claim sparks debate : Nature News Comment(2016.10.5) Analysis suggests people will never live much beyond 115 but some scientists say that it's too soon to assume a fixed shelflife.

Jean-Pierre Fizet/Sygma via Getty Images

The world longest lived person, Jeanne Calment, died in 1997 aged 122.

Figure 1: 122 歳まで生存したフランス人女性 Jeanne Calment(1997 年死亡)

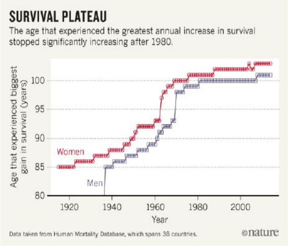


Figure 2: 1980 年代以降, 寿命の延びは鈍化？

超高齢者死亡率の予測

超高齢者の予測に関しては以前より政府機関, また学会では統計学や公衆衛生学, アクチュアリー学など様々な研究分野にまたがり数多くの研究が行われてきた。

人口統計
: 国勢調査実施年の 2 年後に社会保障・人口問題研究所より将来人口推計が公表されている（過去 4 回 1997 年,2002 年,2007 年,2012 年）。花田等 [2,3]

統計学
: 統計学会の 75 周年記念出版でも少子高齢化の統計的問題が採り上げられている。また, 極地理論を使った渋谷等 [4] もある。

公衆衛生学
: 例えば, 日本でも 100 歳以上生存者の疫学的な分析を行っている研究が数多くある。（堀内 [5],[8],[9] など）

アクチュアリー学
: 米国アクチュアリー会では"Living to 100" というシンポジウムを 2002 年から 3 年ごとに開催し, 最近では 2014 年に開催された（次回は 2017 年）。英国では, 本発表で採り上げる多くの確率論的な死亡率モデルが研究されており, 死亡率デリバティブやリスク管理に利用されている。

将来人口推計

- 社会保障・人口問題研究所では,5 年に一度, 将来の人口を推計し公表しているが, 直近の H24 年将来人口推計では,2060 年までの 3 通り (中位, 上位, 下位) の生命表とそれに基づく推計人口を提示している。[1]
- 特に 75 歳以上の後期高齢者,85 歳以上のスーパーシニア層, さらには 100 歳以上のセンチュリアンの人口増加は著しい。(Figure 1)
- それによると,1900 年から 1980 年までの生年コーホートの人口を追跡すると以下の図のようになり, 最近のコーホートになるほど寿命が伸びてきていることが分かる。(Figure 2)
- その前提となる死亡率は以下のように着実な改善を見せている。しかし,2060 年以降の死亡率改善は見込んでいないため,1960 年生まれ以降のコホートの余命については保守的な評価になっている。
- しかしながら, 将来の姿がこのようなものになるかについては, スーパーシニア層の死亡率の推定精度に依存し, 場合によってはより厳しい未来を想定しなければならないかもしれない。本稿では, 最近開発されたいくつかの (確率論的) 死亡率モデルによってこの事実を検証することにしたい。

[1] それ以降,2100 年までは 2060 年の生命表に基づき延長した表を示している。

日本人口の推移（1880-2105 年)

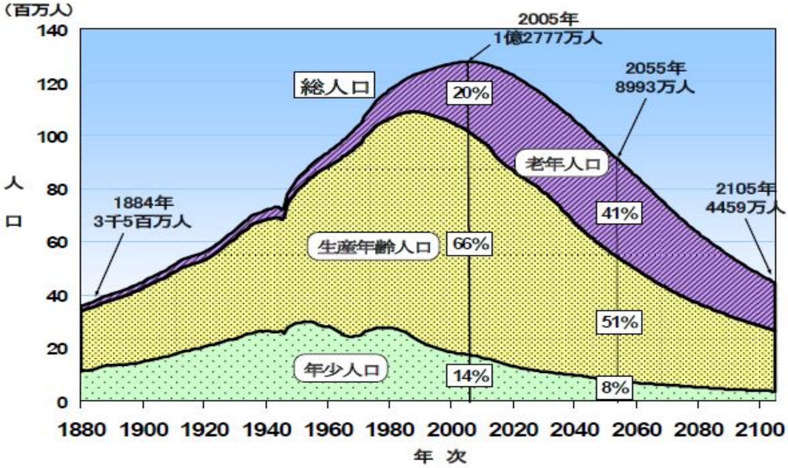


Figure 3: 日本人口の推移（年齢３区分：1880-2105 年)

H24 将来人口推計によるコホート人口

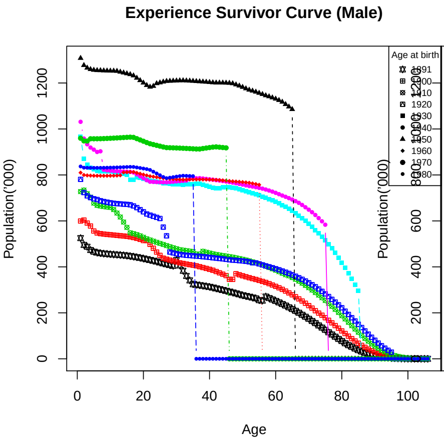


Figure 4: 65 歳,75 歳,85 歳,95 歳の 2060 年までの予測 (男性)

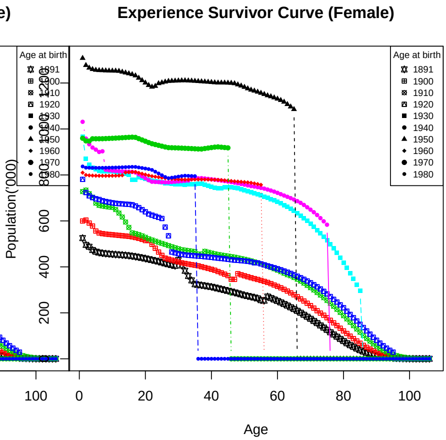


Figure 5: 65 歳,75 歳,85 歳,95 歳の 2060 年までの予測 (女性)

H24 将来人口推計の死亡率予測

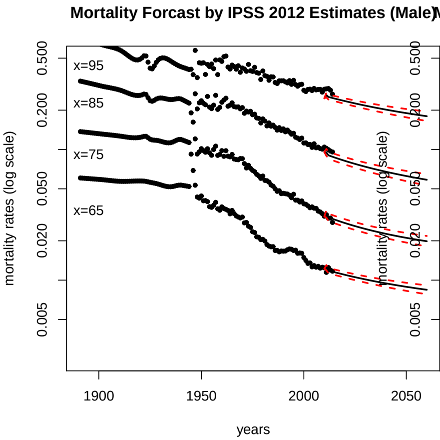


Figure 6: 65 歳,75 歳,85 歳,95 歳の 2060 年までの予測 (男性)

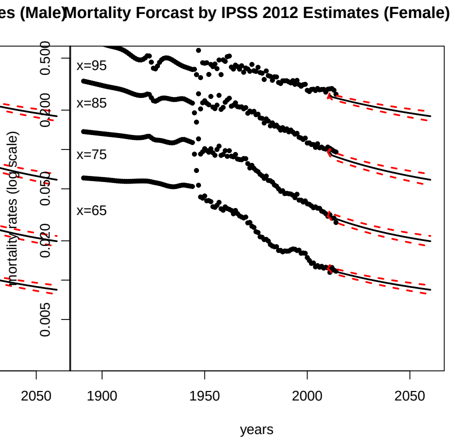


Figure 7: 65 歳,75 歳,85 歳,95 歳の 2060 年までの予測 (女性)

将来人口推計

この結果, 将来推計人口では, それぞれの生年コーホートの 90 歳,100 歳生存率は以下のとおりとなる。

生年	性/年齢 ('15)	90 歳生存率	100 歳生存率
1930	男性 85 歳	55.8 [52.4,59.1]	5.3 [4.3,6.4]
1940	男性 75 歳	35.7 [32.8,38.5]	4.1 [3.2,5.1]
1950	男性 65 歳	35.4 [32.4,38.5]	4.7 [3.7,6.0]
1960	男性 55 歳	33.7 [30.6,36.6]	5.1 [3.9,6.5]
1970	男性 45 歳	34.9 [31.6,38.1]	5.5 [4.2,7.1]
1980	男性 35 歳	35.7 [32.3,39.2]	5.7 [4.3,7.3]
1930	女性 85 歳	71.7[68.6,74.6]	14.0 [11.8,16.4]
1940	女性 75 歳	58.9[55.9,61.8]	13.5 [11.3,16.0]
1950	女性 65 歳	62.7[59.4,65.7]	16.3 [13.5,19.5]
1960	女性 55 歳	59.9[56.7,63.0]	17.4 [14.2,20.8]
1970	女性 45 歳	60.7[57.4,63.9]	18.2 [14.9,21.9]
1980	女性 35 歳	61.2[57.8,64.4]	18.4 [15.0,22.1]

Table 1: 1980 年までのコーホート残存率

1970 年代以降の生年コーホートでは女性の 100 歳生存率は 20 %程度まで徐々に上昇してゆくが, 中位推計は 20 %以内に留まる。また, 男性は 10 %以内に留まることになる。

使用データとモデル

- 死亡率については,1891 年以降の生命表およびその後の政府公表の生命表を利用した。(生命表研究については山口, 南條, 重松, 小林 [1] に詳しい。)
- また, 年齢別人口については,1920 年以降 2014 年までは政府公表データ (完全生命表および簡易生命表), 1920 年までと戦時中の 1944 年から 1946 年までは生命表研究の著者推定によるものを使用した。
- 将来推計人口・死亡率については国立社会保障・人口問題研究所の報告書 [2] を参照した。
- 確率論的死亡率モデルは,2000 年代に Lee-Carter(1992) を拡張した数多くのモデル開発が行われた。
- その主なものとして Cairns,Blake and Dowd(2006),Renshaw-Haberman(2003,2006),Cairns et al(2009) などを含むモデル群があり, これらを総称して GAPC(Generalized Age-Periodic Cohort) ファミリーと呼ばれる。
- その特徴は, 将来死亡率を年齢効果, 暦年効果, コホート効果によって説明しようとする。
- 今回は,LC,CBD,APC,RH(簡易版),M7,PLAT(簡易版) をモデル選択の候補として採用した

死亡率モデル

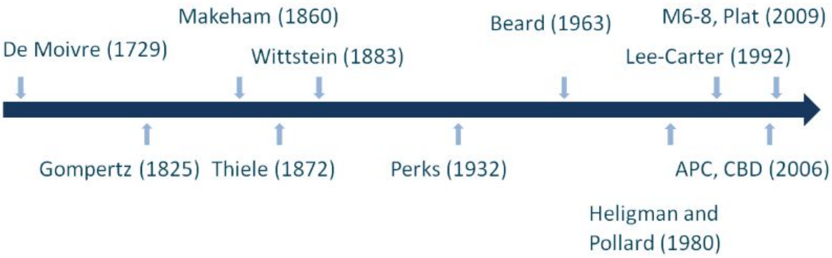


Figure 8: 死亡率モデルの発展 (R in Insurance: Olga Mierzwa Frankie Gregorkiewicz)

GAPC モデル族

GAPC モデル族は,GLM に類似する以下の構造を有する。

1. (ramdom component) $D_{xt} \sim Poisson(E^c_{xt}\mu_{xt})$ または $\sim Binomial(E^0_{xt}, q_{xt})$.
2. (systematic component)

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \sum_{i=1}^{N} \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{(t-x)} \tag{3.1}$$

3. (link function: g)

$$g(\mathbb{E}\left[\frac{D_{xt}}{E_{xt}}\right]) = \eta_{xt}$$

4. (a set of parameter constraints) $\theta = (\alpha_x, \beta_x^{(i)}, \gamma_{t-x})$ が一意に決まるための制約

確率論的死亡率モデル

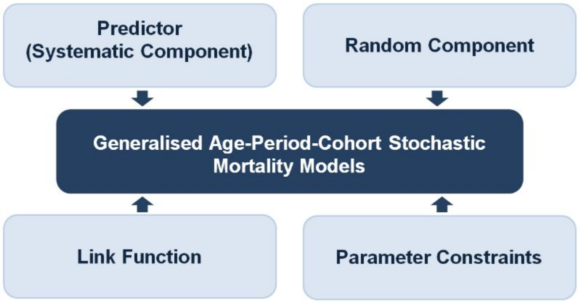


Figure 9: 死亡率モデルの発展 (R in Insurance: Olga Mierzwa Frankie Gregorkiewicz)

GAPC モデル族の systematic component

このモデル族に属する典型的なモデルについて *systematic component* η_{xt} を書き下すことにより，モデルの特徴を説明する。

Model	Predictor
LC	$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)}\kappa_t^{(1)}$
CBD	$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)}$
CBD2	$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)} + ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2)\kappa_t^{(3)}$
APC	$\eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + \gamma_{(t-x)}$
RH	$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)}\kappa_t^{(1)} + \gamma_{(t-x)}$
M7	$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)} + ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2)\kappa_t^{(3)} + \gamma_{(t-x)}$
PLAT	$\eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x})\kappa_t^{(2)} + \gamma_{(t-x)}$

AIC,BIC 基準によるモデル選択 (全年齢)

全年齢でのモデルの適合度を AIC,BIC で判定すると, 男女とも RH が最も良好な結果となる。以下,PLAT,APC,LC などが続く。

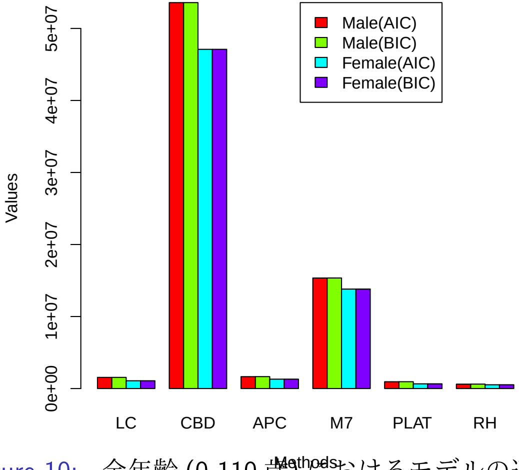


Figure 10: 全年齢 (0-110 歳) におけるモデルの適合度

確率論的死亡率モデル比較

Characteristic	Generalised Age-Period-Cohort Stochastic Mortality Models							
	LC	APC	CBD	RH	M6	M7	M8	Plat
General Shape of Mortality α_x	Y	Y	N	Y	N	N	N	Y
Cohort Effect γ_{t-x}	N	Y	N	Y	Y	Y	Y	Y
Mortality Trend κ_t	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
Number of Age-Period Terms N	1	1	2	1	2	3	2	2
Age Modulating Terms β_x	Non-Parametric Need to be estimated	Non-Parametric Static	Mixed	Non-Parametric Need to be estimated	Mixed	Mixed	Mixed	Mixed

Requirement	LC	APC	CBD	RH	M6	M7	M8	Plat
Popularity	1	3	2	3	3	3	3	4
Complexity	1	3	2	2	3	4	3	4
Quality	3	2	3	2	2	2	2	3
Objectivity	2	2	2	2	2	2	3	2

1	2	2	3	4
Very Good				Bad

Figure 11: 死亡率モデル比較 (R in Insurance: Olga Mierzwa Frankie Gregorkiewicz)

AIC,BIC 基準によるモデル選択 (90 歳で分割)

35 歳から 89 歳の年齢層では,RH,PLAT,CBD2 など,90 歳以上では大きな差異はないが相対的には APC,CBD が良い。

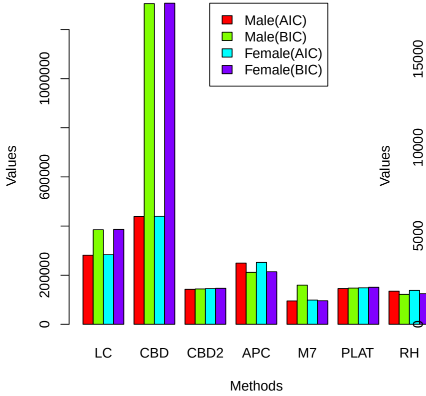


Figure 12: 35 歳から 89 歳の年齢層におけるモデルの適合度

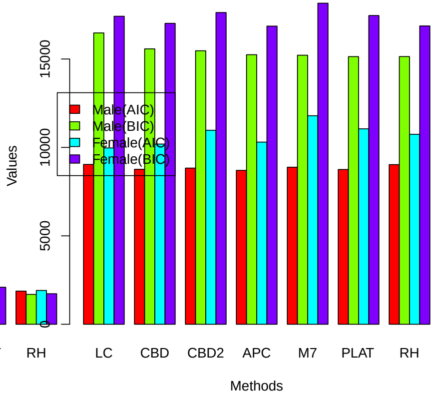


Figure 13: 90 歳以上の年齢層におけるモデルの適合度

モデル選択上の注意

- モデル選択は, まず AIC や BIC などの情報量基準にもとづいて行うが, 全年齢で推定した場合には,1 つのモデルだけで適合させることは難しく, やはり年齢層に分けた混合型のモデルの方が良い。今回は,35 歳から 89 歳までと 90 歳以上の年齢層で異なるモデルが選択された。
- モデルの候補にはコーホート効果を採り入れたものがいくつかある。しかしコーホート効果の識別については, 従来より様々な問題があることが指摘されている。
- 主な問題は, コーホート効果が（暦年-年齢）の関数で評価されるため, 年齢効果と期間効果との分離が難しく, しばしばオーバーフィッティングの問題が生ずることにある。
- コーホート効果の予測モデルには,ARIMA などの時系列モデルを適用するが, うまく推定できていない場合にはとんでもない結果を導くことがある。
- コーホート効果に求められる性質については次葉に様な議論があるため, 慎重に採否を決定すべきであると考えられる。このため, 外挿テスト (いわゆるバックテスト) によるモデル選択を並行して実施する必要がある。

コーホート効果に求められる性質について

コーホート効果に求められる性質については,Hunt, Blake[16] に以下のような記述がある。

- 年齢 (age), 期間 (period) 効果に比べて小さいこと。
- コーホート全体の平均がゼロ (すなわちコーホート効果は主要な傾向からの偏差である)。
- ある種の自己回帰性がある。ある生年が例外的な環境にある場合を除き, その他の近い暦年のコーホートは類似の履歴を辿り, 従ってコーホート効果も類似していると考えられる。
- 説明できない継続性を示していない。例えば, 祖父の世代の影響が孫の世代に影響することはない。
- 理想的には平均回帰的であること。すなわち, あるコーホートに影響した事象は続く年代への影響は徐々に消えてゆく。
- 人口学的に意味がある。すなわち, コーホート効果が特定の社会経済的・医学的な要因で説明できる。

コーホート効果の推定誤差（男性：APC,M7）

Figure 14: モデル APC のコーホート要因 (γ_{t-x})

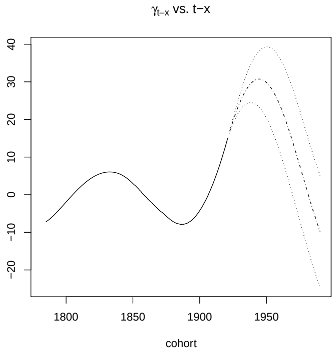


Figure 15: モデル M7 のコーホート要因 (γ_{t-x})

モデル別 95 歳死亡率予測値

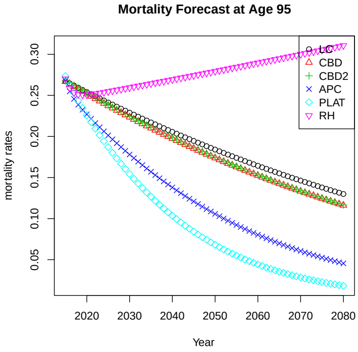


Figure 16: 男性：モデル:LC,CBD,APC,PLAT,RH

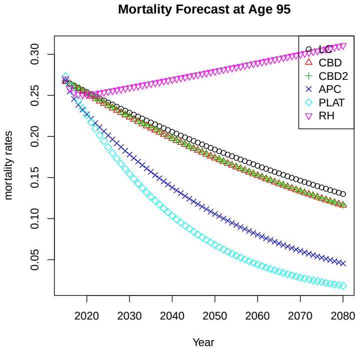


Figure 17: 女性：モデル:LC,CBD,APC,PLAT,RH

内挿テスト (男性)

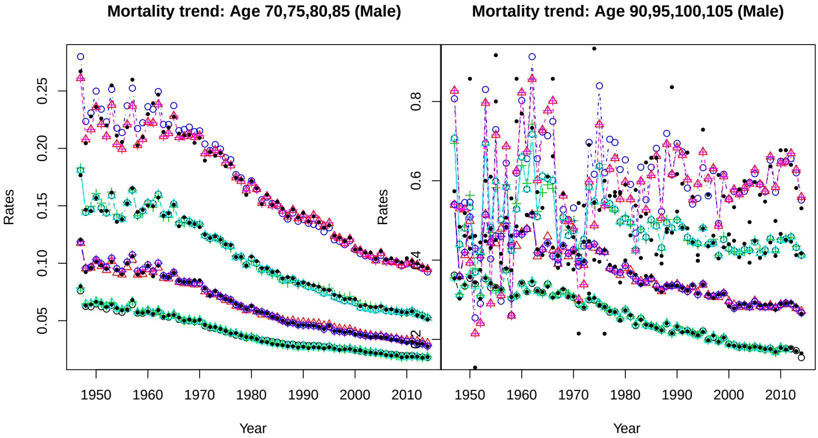


Figure 18: 年齢：70 歳,75 歳,80 歳,85 歳（男性）, モデル:RH,CBD2,M7

Figure 19: 年齢：90 歳,95 歳,100 歳,105 歳（男性）, モデル:RH,CBD2,M7

内挿テスト (女性)

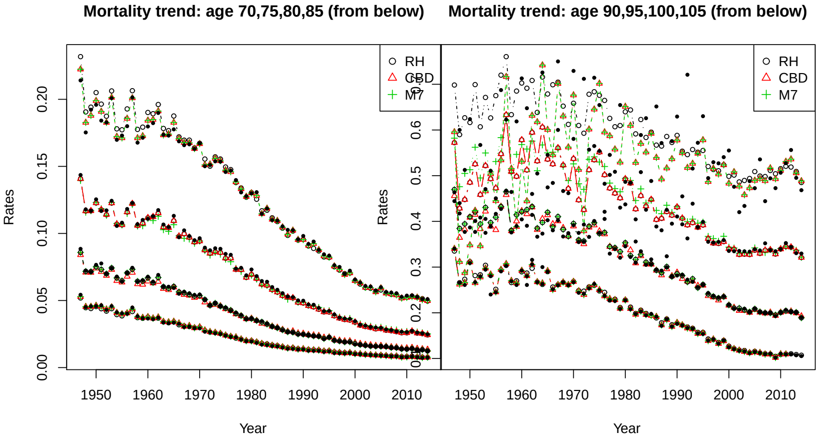


Figure 20: 年齢：70 歳,75 歳,80 歳,85 歳（女性）, モデル:RH,CBD2,M7

Figure 21: 年齢：90 歳,95 歳,100 歳,105 歳（女性）, モデル:RH,CBD2,M7

外挿テスト

- 外挿テストでは,1947 年から 1980 年までの死亡率データから,1981 年から 2014 年までの, それぞれのモデルによる点推定値と実際死亡率の予測誤差を計測した。
- 男女別, 年齢層は 90 歳から 109 歳までの平均二乗誤差の標準偏差をモデル LC,CBD,APC,PLAT,M7,RH について求めた。
- 結果は以下の表のとおり, 男女とも CBD モデルが選択されるが,APC モデルと大差はない。
- 予測誤差を小さくするためには, データの人口や最近の年度への加重などの選択も重要である。

	LC	CBD	APC	PLAT	M7	RH
男性	0.2350	0.1828	0.1875	0.3500	0.5944	0.1902
女性	0.1832	0.1309	0.1326	0.2478	0.6409	0.2874

Table 2: 平均二乗誤差の標準偏差

外挿テスト (男性)

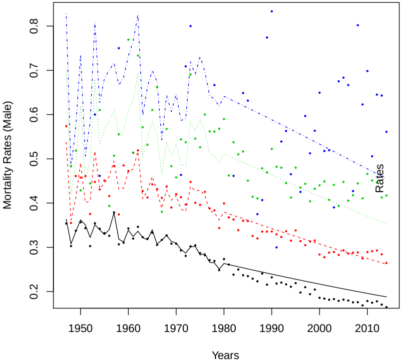


Figure 22: モデル:CBD, 男性, 年齢：90 歳,95 歳,100 歳,105 歳

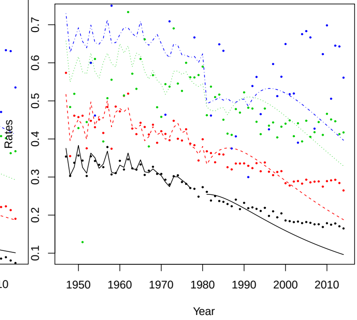
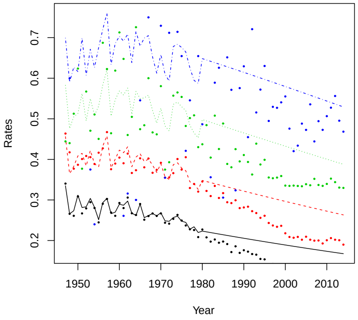


Figure 23: モデル:RH, 男性, 年齢：90 歳,95 歳,100 歳,105 歳

外挿テスト (女性)



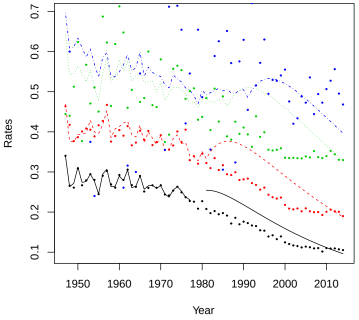


Figure 24: モデル:CBD, 女性, 年齢：90 歳,95 歳,100 歳,105 歳

Figure 25: モデル:APC, 女性, 年齢：90 歳,95 歳,100 歳,105 歳

CBD2 モデルによる死亡率予測（男性）

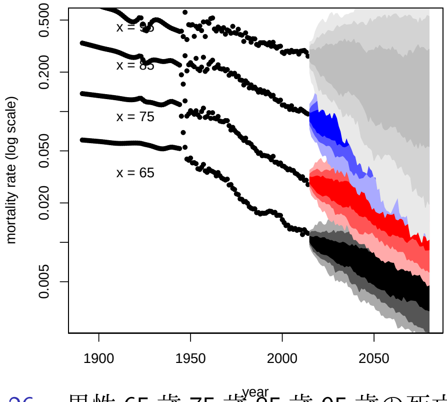


Figure 26: 男性 65 歳,75 歳,85 歳,95 歳の死亡率予測

CBD2-CBD モデルによるコーホート生存率（図）

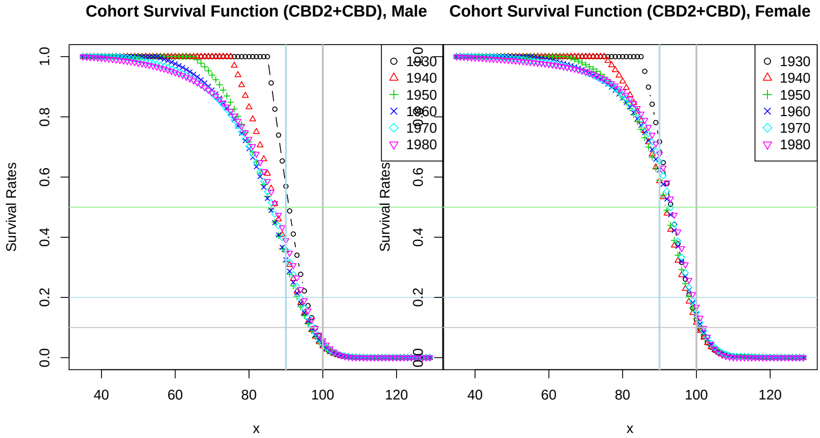


Figure 27: 出生コーホート 1930 年から 1980 年までの男性の 90 歳,100 歳生存確率

Figure 28: 出生コーホート 1930 年から 1980 年までの女性の 90 歳,100 歳生存確率

CBD2-CBD モデルによるコーホート生存率 (表)

生年	性/年齢 ('15)	90 歳生存率	100 歳生存率
1930	男性 85 歳	55.5 [46.6,66.6]	5.0[0.1,21.3]
1940	男性 75 歳	33.7 [20.6,55.3]	3.6[0.0,26.6]
1950	男性 65 歳	29.1 [12.5,59.4]	3.5[0.0,37.4]
1960	男性 55 歳	28.8 [8.8,63.1]	3.8[0.0,43.0]
1970	男性 45 歳	30.9 (38.0) [9.6,70.1]	4.1 (4.0) [0.0,53.1]
1980	男性 35 歳	32.6 (43.8) [9.6,76.0]	4.8 (7.3) [0.0,60.8]
生年	性/年齢 ('15)	90 歳生存率	100 歳生存率
1930	女性 85 歳	71.7[66.0,77.5]	12.7 [2.4,41.5]
1940	女性 75 歳	58.7[43.2,71.2]	11.6 [1.4,46.6]
1950	女性 65 歳	59.0[41.8,75.1]	13.0 [1.2,56.6]
1960	女性 55 歳	62.3[44.4,79.6]	14.4 [1.1,62.7]
1970	女性 45 歳	65.2 (67.4) [45.0,83.1]	15.0 (23.5) [0.6,69.3]
1980	女性 35 歳	67.8 (71.3) [44.5,87.1]	16.8 (31.0) [0.6,75.8]

CBD2-APCモデルによるコーホート生存率(図)

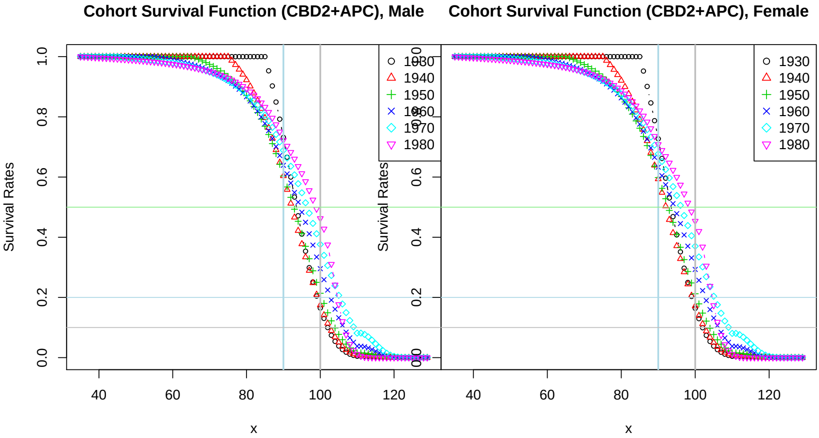


Figure 29: 出生コーホート1930年から1980年までの男性の90歳,100歳生存確率

Figure 30: 出生コーホート1930年から1980年までの女性の90歳,100歳生存確率

CBD2-APC モデルによるコーホート生存率（表）

生年	性/年齢 ('15)	90 歳生存率	100 歳生存率
1930	男性 85 歳	55.5 [46.6,66.6]	7.0 [0.1,22.3]
1940	男性 75 歳	33.7 [20.6,55.3]	5.4 [0.0,41.9]
1950	男性 65 歳	29.1 [12.5,59.4]	6.0 [0.0,54.3]
1960	男性 55 歳	28.8 [8.8,63.1]	8.0 [0.0,63.1]
1970	男性 45 歳	30.9 (38.0) [9.6,70.1]	11.2 (25.9) [0.0,69.7]
1980	男性 35 歳	32.6 (43.8) [9.6,76.0]	12.2 (34.7) [0.0,75.9]
1930	女性 85 歳	71.7[66.0,77.5]	15.9[6.1,37.0]
1940	女性 75 歳	58.7[43.2,71.2]	14.9[3.3,45.4]
1950	女性 65 歳	59.0[41.8,75.1]	17.7[2.7,58.6]
1960	女性 55 歳	62.3[44.4,79.6]	22.9[3.6,65.2]
1970	女性 45 歳	65.2 (67.4) [45.0,83.1]	28.7 (36.9) [5.6,72.1]
1980	女性 35 歳	67.8 (71.3) [44.5,87.1]	30.6 (45.7) [2.9,80.7]

結論と今後の課題

- 超高齢期の死亡率を複数の確率論的な死亡率モデルを使って予測し, そのパフォーマンスの評価を行った。
- 一つのモデルでは全年齢を説明できず, 年齢を分割する方が良いことが分かった。
- 内挿テストでは良好でも, コーホート効果の推定による予測誤差が大きいモデルがあり, 外挿テストが重要であることが分かった。
- コーホート効果については識別が難しく, オーバーフィッティングの問題が生ずることがある。
- この結果, モデルとしては高齢層までは CBD2, 超高齢層では CBD, または APC が選択された。
- しかし,100 歳以上の死亡率は, データの変動も大きく, より踏み込んだ検討が必要である。
- 公衆衛生学的な見地や地域差や経済状況などからの考察による日本人の寿命伸長の原因の解明が必要である。

参考文献 I

[1] 山口喜一, 南條義治, 重松峻夫, 小林和正編著 1993,『生命表研究』, 古今書院

[2] 花田恭, 飯塚かず子,「エキストラ・スーパー・オールド生命表」, 厚生の指標, 第 36 巻第 8 号,1989.8

[3] 花田恭,「100 歳以上の死亡確率」, 研究ノート,

[4] 渋谷政昭, 華山宣胤,2004,「年齢時代区分データによる超高齢者寿命分布の推測」, 統計数理, 第 52 巻第 1 号, 117-134

[5] 日本統計学会, 「21 世紀の統計科学」, 第 1 巻, 社会・経済の統計科学 (人口・政府統計・金融と保険) 国友直人・山本拓 編集・監修

[6] 堀内四郎,2010, 「日本人の寿命伸長：要因と展望」, 人口問題研究,66 − 3,2010.9,40-49

[7] 国立社会保障・人口問題研究所 2012,「日本の将来推計人口 (平成 24 年 1 月推計)」

[8] Freeman S(1), Kurosawa H, Ebihara S, Kohzuki M.,Understanding the oldest old in northern Japan: an overview of the functional ability and characteristics of centenarians.,Geriatr Gerontol Int. 2010 Jan;10(1):78-84.

[9] Shimizu K, Hirose N, Takayama M, Arai Y, Gondo Y, Ebihara Y, Yamamura K, Nakazawa S, Inagaki H, Masui Y, Kitagawa K., Relationship between physical and cognitive function, blood pressure and serumlipid concentration in centenarians. Geriatr Gerontol Int. 2008 Dec;8(4):300-2.

[10] Lee, R. D., Carter, L. R., 1992. Modeling and forecasting U.S. mortality. Journal of the American Statistical Association 87 (419), 659-671.

参考文献 III

[11] Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., 2006a. A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. Journal of Risk and Insurance 73 (4), 687-718.

[12] Cairns, A. J. G., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A., Balevich, I., 2009. A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States. North American Actuarial Journal 13 (1), 1-35.

[13] Haberman, S., Renshaw, A., 2009. On age-period-cohort parametric mortality rate projections. Insurance: Mathematics and Economics 45 (2), 255-270.

[14] Plat, R., 2009. On stochastic mortality modeling. Insurance: Mathematics and Economics 45 (3), 393-404.

参考文献 IV

[15] Haberman, S., Renshaw, A., 2011. A comparative study of parametric mortality projection models. Insurance: Mathematics and Economics 48 (1), 35-55.

[16] Hunt, A., Blake, D., 2014. A general procedure for constructing mortality models. North American Actuarial Journal 18 (1), 116-138.

[17] Human Mortality Database (HMD): website at www.mortality.org

[18] Edouard Debonneuil,2010, A simple model of mortality trends aiming at universality: Lee Carter + Cohort ,AXA Cessions, Paris, France, https://arxiv.org/pdf/1003.1802.pdf

[19] Andres M. Villegasa, Pietro Millossovichb, Vladimir Kaishevb,,2016, StMoMo: An R Package for Stochastic Mortality Modelling

[20] Olga Mierzwa Frankie Gregorkiewicz, 2015, R in Insurance: Use of Stochastic Mortality Models, http://rpubs.com/olgamie/smm$_n$l