

経済リスクの統計学の新展開 : 稀な事象と再起的事象 2015¹

国友直人² & 川崎能典³
(共編)

2016年2月

¹文部科学省・科学研究費プロジェクト「経済統計・政府統計の理論と応用からの提言」(2013年度～)が2015年12月18日に東京大学経済学研究科において開催した研究集会における講演をまとめたものである。

²東京大学大学院経済学研究科

³統計数理研究所

概要

日本では2011年3月に発生した東日本大震災を一つの契機に「通常の常識では起こりにくいと思われる事象」についてのリスク解析や対策の重要性についての認識が高まっている。経済・社会における近年の現象でも2008年に起きたリーマンショック・経済危機、2011年から経験しているヨーロッパ諸国の金融危機なども我々が暮らしている国際的な経済社会においては、従来の議論ではほとんど考慮されていない経済変動の例である。こうした事前には予想が困難で無視されてきた事象、自然災害、経済変動の中でも実際に起きると大きな影響のある不確実な事象を科学的に理解し、有効な対策を考察する研究が必要であり重要である。本研究プロジェクトでは近年の日本など現代の経済・社会の理解にとって重要になっている「きわめて稀に起きる事象」と「しばしば起きる事象」の評価・分析法について研究する予定である。「稀な事象」に関わる経済リスクの分析という課題について理論的・実証的な観点から分析することにより、科学的根拠にもとづいた経済・社会における「経済リスクの分散化」という方策、公共的政策のあり方の提案することが目標である。近年に特に関心が高まっている「従来の常識では希にしか起きない、無視できると見なされる事象」と「ときどき経済・社会では起きると見なされる現象」の科学的解析を柱に、確率論・統計学と経済学・金融（ファイナンス・保険）における既存の理論と現実の乖離、新しい数理的理論の構築と応用、新しい数理的理論を踏まえた「経済リスクの解析と分散化の方策」について研究活動を行う予定である。本研究プロジェクトでは経済リスクを(i)社会・人口リスク、(ii)自然災害と極端な事象のリスク、(iii)経済・金融・保険の対象となるリスク、に関連した3つの領域の経済リスクに分類し、リスクに係わる問題と相互に関わる総合的問題という二つの方向から問題を理論的に解明し、総合的な研究をふまえた経済リスクの科学的制御・管理の方策を提言することを目指す。さらに、経済統計学における研究・研究者と確率論・統計学など数理科学の関係者、さらに金融（ファイナンス）の関係者を交え、現代の社会・経済においては重要ではあるが、既存の研究分野では十分に取り上げられなかった研究課題を研究するとともに、経済リスクの分析と科学的制御・統計的管理法についての共同研究を行う計画である。

今回の研究集会では、経済リスクの統計学を巡るさまざまなトピックについて報告を行う機会であった。このような情報交換が関係者の知的刺激となり、経済リスクの統計学の今後の展開の一助になることを期待する次第である。

2016年2月
編者

研究集会・プログラム

「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再起的事象」

日程：2015年12月18日(金曜)

会場：東京大学経済学部小島ホール1階セミナー室

オーガナイザー：国友直人(東京大学)・川崎能典(統計数理研究所)

<プログラム>

12月18日(金)

<セッションI：経済リスクの統計学>

Chair: 楠岡成雄

13:00~13:40 「公的年金運用の基本ポートフォリオの検証-リスクとファクター配分の観点から-」
田中周二(日本大学)

13:40~14:20 「Evaluating capital allocation with distortion risk measures」塚原英敦(成城大学)

14:20~15:00 「G-expectation and Statistical Problems」一場知之(カリフォルニア大学)

<休憩>

<セッションII：経済リスク分析の統計的基礎>

Chair: 川崎能典

15:10~15:40 「Effects of Jump and Noise via the Small Noise Asymptotics in High-Frequency
Financial Econometrics」栗栖大輔・国友直人(東京大学)

15:40~16:10 「Intensity and G-Causality in Financial Econometrics : an empirical analysis」江
原斐夫・国友直人・栗栖大輔(東京大学)

<休憩>

<セッションIII：金融市場の統計分析>

Chair: 国友直人

16:20~17:00 「経験類似度に基づくボラティリティ予測」川崎能典(統計数理研究所)

17:00~17:40 「株価指数と先物間の因果関係の変化の検証」大屋幸輔(大阪大学)

公的年金運用の基本ポートフォリオの検証

-リスクとファクター配分の観点から-

田中 周二, 新川 康青

日本大学大学院総合基礎科学研究科

October 31, 2015

初めに

- H26年厚生労働省による財政検証の報告書が提示され、引き続き、内外株式のウェイトを増加させる年金積立金管理運用独立行政法人(GPIF)の運用基本ポートフォリオの見直しが行われた。
- 従来は名目リターンをベースとする通常の前分散分析であった。
- 今回のポートフォリオの見直しは、債券なみのリスクを維持しつつ、実質的な運用利回り（積立金の運用利回りから名目賃金上昇率を差し引いたもの）1.7%を確保することを目標としている。
- 一方で、リーマンショックという経験を経て、ここ数年はグローバル運用機関ではより低リスクの運用を目指す動きが加速されている。
- 果たして今回の見直しの決定は正しいのか、またよりよいポートフォリオ運用があるのかを理論的に検討する。

今回の発表内容

- GPIF の基本ポートフォリオの構築法およびデータの確認
- 収集した過去データの確認とリスク尺度 (標準偏差, TailVaR, LPM) を置き換えたポートフォリオ最適化の構築
- 代表的な低リスク運用手法 (GMV, MDP, ERC) のリスク・リターンの比較分析
- 投資対象を 14 系列に増やした場合の低リスク運用のリスク・リターンの比較分析
- 主成分分析を用いたファクター投資の試算

GPIF による基本ポートフォリオの考え方

- 基金全体では基本となるポートフォリオを予め定めておき、できるだけ運用リスクを抑制しつつ運用パフォーマンスを追求する運営が求められている。
- よって、運用リスクは財政投融资の時代と同様、債券運用と同程度のリスクの範囲で行うことが基本的な方針となっていた。
- ところが突然、昨年秋、アベノミクスを背景にして、従来より積極的なリスクテイクを目指す GPIF の基本ポートフォリオの見直しが行われることになった。

中期目標

- ① 財政検証を踏まえ、保険給付に必要な流動性を確保しつつ実質的な運用リターン（運用利回りから名目賃金上昇率を差し引いたもの）1.7%を最低限のリスクで確保すること
- ② 基本ポートフォリオは、資産運用に関し一般に認められている専門的な知見や内外の経済動向を考慮して、フォワードルッキングなリスク分析を踏まえて長期的な観点から設定すること
- ③ 名目賃金上昇率からの下振れリスクが全額国内債券運用の場合を超えないこと

主な変更点

- ① これまでのように長期均衡状態のみを前提とするのではなく、フォワードルッキングなリスク分析を踏まえ、財政検証と整合性をとって、足下から向こう 10 年間の金利上昇シナリオを想定
- ② 基本ポートフォリオ策定の際のリスクの捉え方については、賃金上昇率からの下振れリスクが全額国内債券運用の場合の下振れリスクを超えない確率を基準とする。さらに、賃金上昇率を下回った場合の平均的な不足額も考慮する
- ③ 財政検証でいずれの経済シナリオでも必要な運用利回りが確保できるため運用目標の元となった「経済中位ケース」(財政検証のケース E に相当する)と、現在の市場に織り込まれた将来の金利水準を前提とする「市場基準ケース」(ケース G に相当)の 2 つのケースを想定する

基本ポートフォリオの概要

- ① **想定運用期間** 積立金の水準が最も高くなり、継続的に低下が始まる直前までの 25 年間
- ② **選定方法** 伝統的 4 資産のリターン, リスク等に基づき, 多数のポートフォリオ (5 % 刻み) について, リターン, リスク, 名目賃金上昇率を下回る確率 (下方確率), 名目賃金上昇率を下回るときの平均不足率 (条件付平均不足率) などを推計し, 制約条件については「外国株式比率 \geq 外国債券比率」だけを課している。
この推計結果に基づき検討を行い, 「経済中位ケース」及び「市場基準ケース」において, 運用目標 (名目賃金上昇率 + 1.7 %) を満たしつつ, その一方で, 下方確率が全額国内債券運用の場合を下回り, かつ, 条件付平均不足率が最も小さいポートフォリオを選定
- ③ **検証方法** 基本ポートフォリオで運用した場合の積立金の時系列推移を推計するため, ケースごとに 10 万回のシミュレーションを行う

検証結果

- 想定運用期間の最終年度（平成 51 年（2039 年））において予定積立金額を確保できないリスクは、経済中位ケースでは約 40%，市場基準ケースでは約 25%
- 以上を総合的に勘案すると、GPIF による基本ポートフォリオは、必要な積立金を確保しつつ、下振れリスクの最小化を図った最も効率的なポートフォリオといえる判断を下したということである。

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産
資産構成割合	60 %	12 %	11 %	12 %	5 %
乖離許容幅	± 8 %	± 6 %	± 5 %	± 5 %	-

Table 1: 変更前の基本ポートフォリオ

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産
資産構成割合	35 %	25 %	15 %	25 %	-
乖離許容幅	± 8 %	± 6 %	± 5 %	± 5 %	-

Table 2: 変更後の基本ポートフォリオ

基礎データの確認と基本ポートフォリオの位置づけ

- 変更前後の基本ポートフォリオを客観的に分析
- GPIF では、伝統的 4 資産 (内外債券, 内外株式) のポートフォリオ構築に当たって、従来は名目のリターンに基づく平均分散分析により、今回の見直しは賃金上昇率に基づく平均・分析によって基本ポートフォリオの決定を行った

時系列	平均 (年率)	標準偏差	使用データ
日本債券	2.86 %	2.71 %	野村債券総合インデックス [Nomura-BPI]
日本株式	0.84	17.99	東証第 1 部時価加重収益率 (配当込み)[TSE1]
外国債券	7.18	11.05	Citi World Bond Index[Citi WBIG]
外国株式	9.06	19.15	Morgan Stanley Capital Index[MSCI(KOKUSAI)]
賃金上昇率	-0.01	0.93	毎月勤労統計調査全国調査 [厚生労働省]
物価上昇率	0.17	1.22	消費者物価指数全国総合 [総務省統計局]

Table 3: 伝統的 4 資産に使用した時系列データ¹

¹1995 年 1 月～2014 年 12 月までの 20 年間の月次収益率 (変化率)

各資産のリスク・リターンおよび相関係数

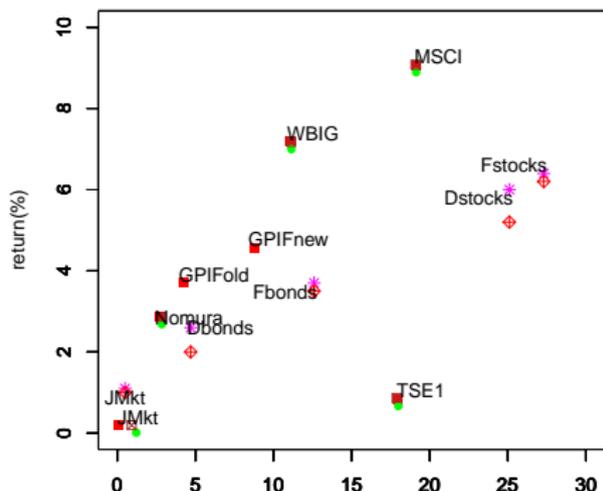


Figure 1: 各資産のリスク・リターン

Sample vs. GPIF Covariances

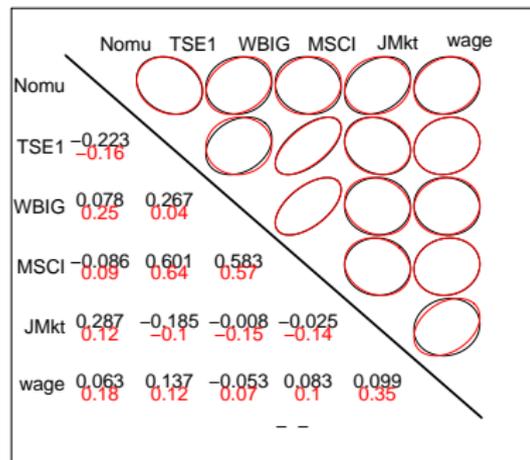


Figure 2: 各資産のピアソン相関係数

GPIF の運用利回り想定値および実質リターン比較

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産	賃金上昇率
経済中位	2.6 %	6.0 %	3.7 %	6.4 %	1.1 %	2.8 %
市場基準	2.0 %	5.2 %	3.5 %	6.2 %	1.0 %	2.1 %

Table 4: GPIF の運用利回り想定値

	Nomura	TSE1	WBIG	MSCI	JMkt
市場実績	2.9 %	0.9 %	7.2 %	9.1 %	0.2 %
GPIF 中位	-0.2	3.2	0.9	3.6	-1.7
GPIF 市場	-0.1	3.1	1.4	4.1	-1.1

Table 5: 実質リターン比較 (年率)

- 以降の結果は最小分散ポートフォリオ (GMVP) と接点ポートフォリオ (TP), および賃金上昇率を年率 1.7 % 上回る最適ポートフォリオ (OP) のリスク, リターンおよび資産配分の結果である。
- 日本国債 : 日本株式 : 外国債券 : 外国株式 : 短期資産の割合は賃金上昇率を年率 1.7 % (月率 0.14 %) 上回るポートフォリオである。

過去実績での資産配分結果

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=39:2:0:2:56

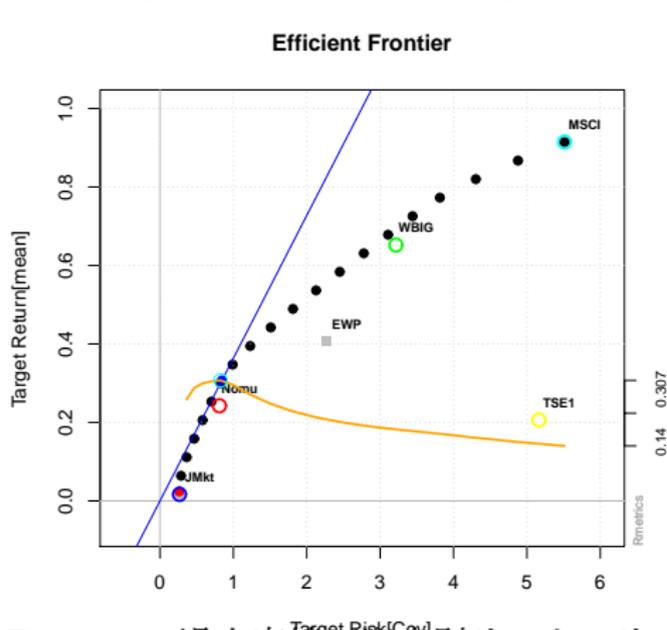


Figure 3: 過去実績の資産別リスク・リターン

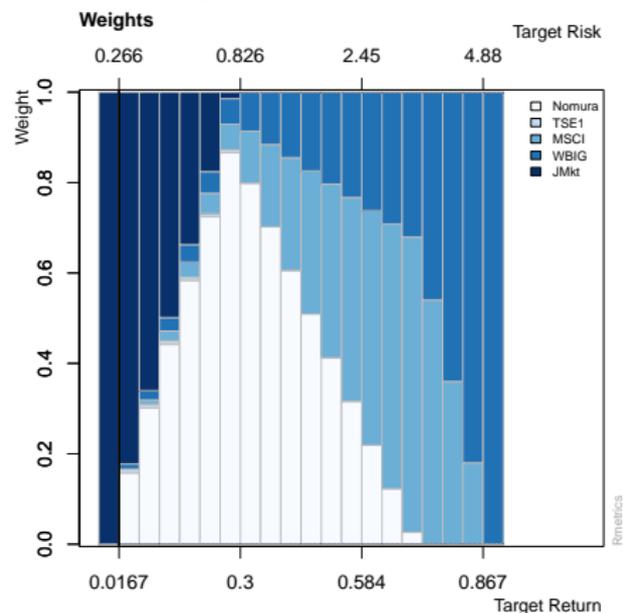


Figure 4: 過去実績のリスク・リターンに基づく資産配分

GPIFの「経済中位ケース」での資産配分結果

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=50:42:0:8:0

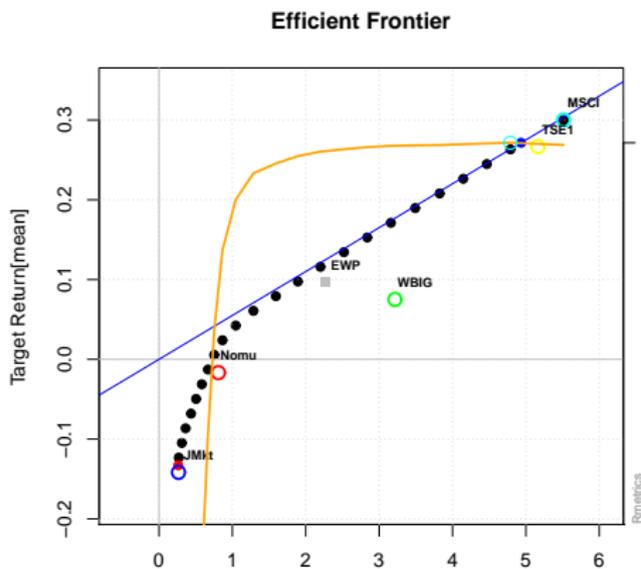


Figure 5: GPIF リターン(中位)に基づく資産別リスク・リターン

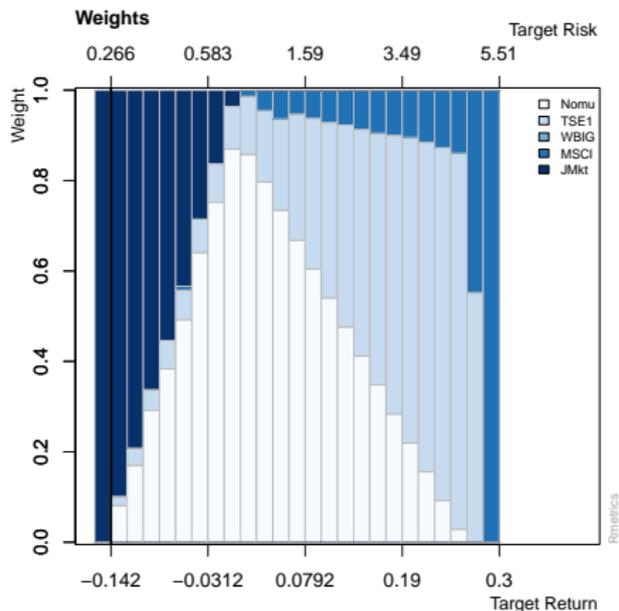


Figure 6: GPIF リターン(中位)に基づく資産別配分

GPIFの「市場基準ケース」での資産配分結果

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=50:42:0:8:0

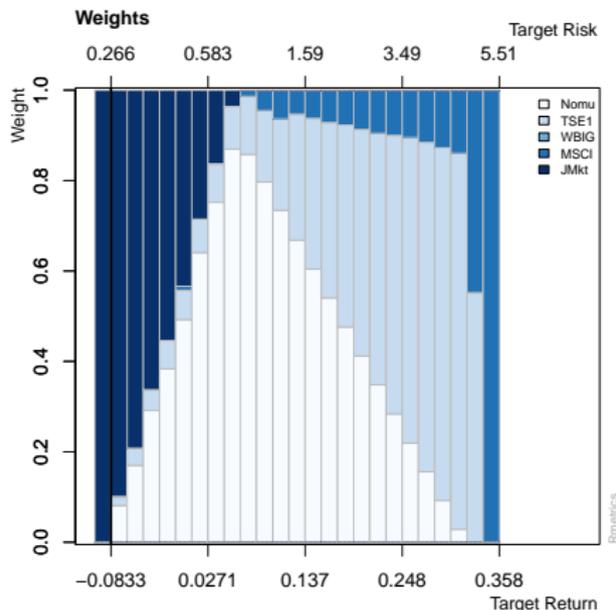
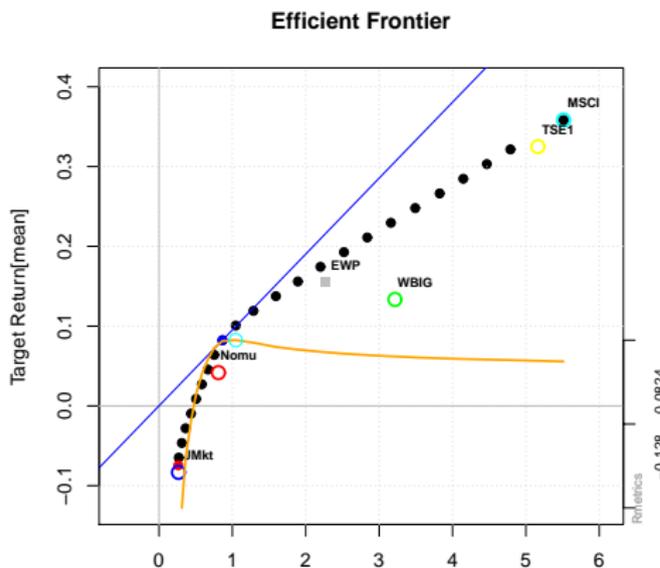


Figure 7: GPIF リターン(市場)に基づく資産別配分

Figure 8: GPIF リターン(市場)に基づく資産別配分

TailVaR, LPM

定義 (VaR)

X の分布関数 $F_X(x)$ により, 所与の確率 α について, バリュアットリスク $VaR_\alpha(X)$ は

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \leq \alpha\} \quad (3.1)$$

定義 (TailVaR)

$TailVaR$ ($CVaR$) は, $VaR_\alpha(X)$ により損失の条件付き期待値として定義される。

$$TailVaR_\alpha(X) = \mathbb{E}[X | X > VaR_\alpha(X)] \quad (3.2)$$

定義 (LPM)

閾値 τ の冪 $a \geq 1$ の下方部分積率 (LPM : Lower Partial Moments) は以下の期待値で定義される。

$$LPM_{a,\tau}(X) = \mathbb{E}[\max(0, \tau - X)^a] \quad (3.3)$$

TailVaR($\alpha = 0.05$)

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=29:2:0:2:56

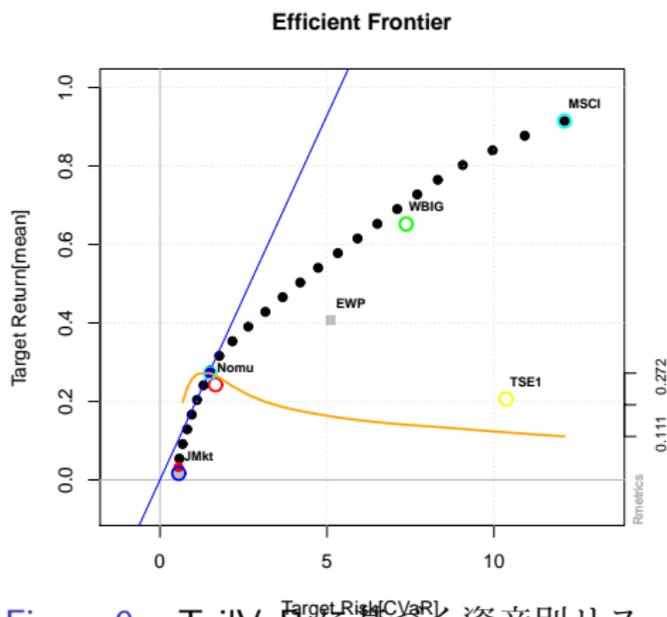


Figure 9: TailVaRに基づく資産別リスク・リターン

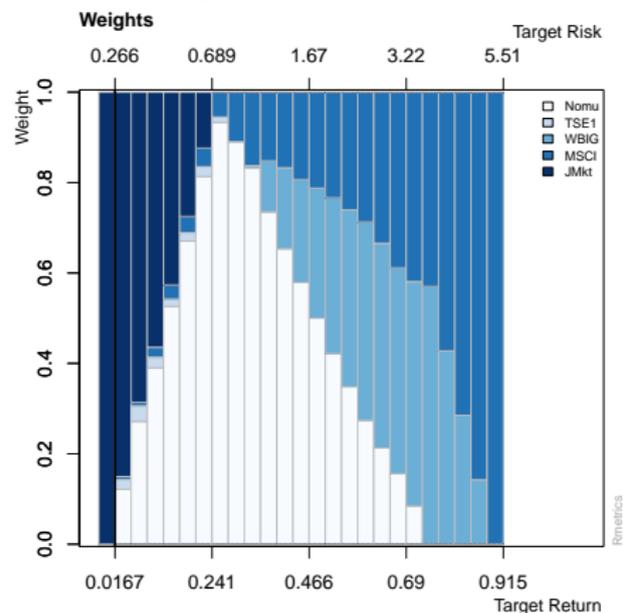
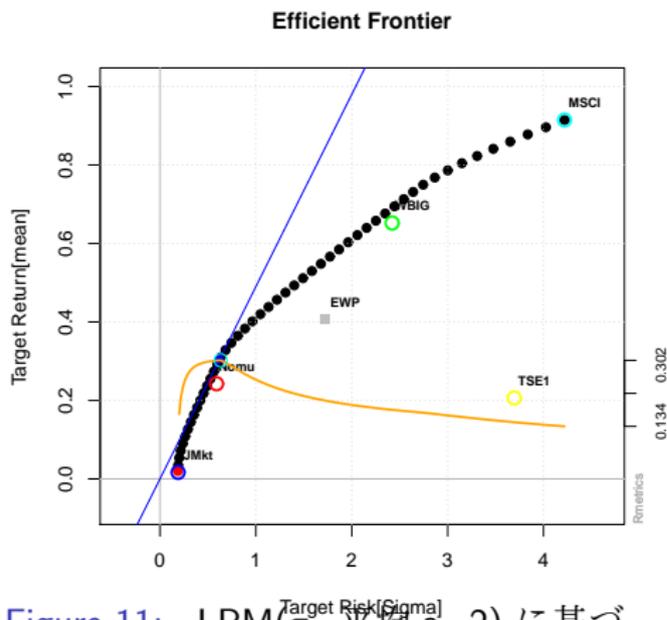
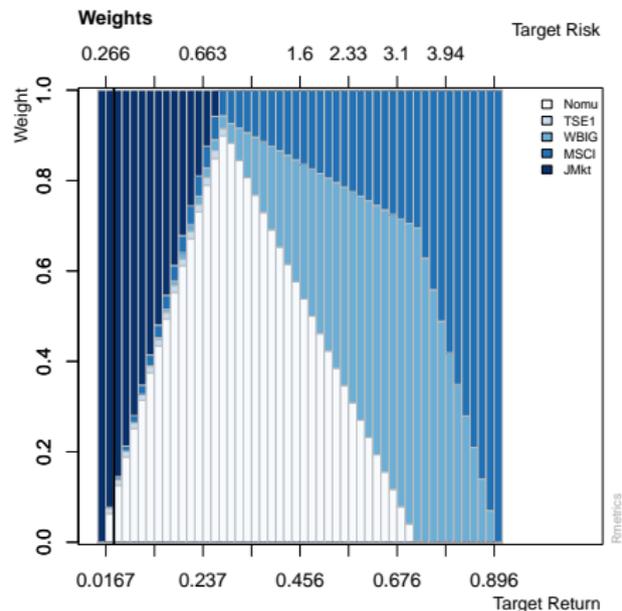


Figure 10: TailVaRに基づく資産配分

LPM(τ =平均, $a=2$)

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=38:1:0:2:59

Figure 11: LPM(τ =平均, $a=2$)に基づく資産別リスク・リターンFigure 12: LPM(τ =平均, $a=2$)に基づく資産配分

中位シナリオ:LPM

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=48:30:0:21:0

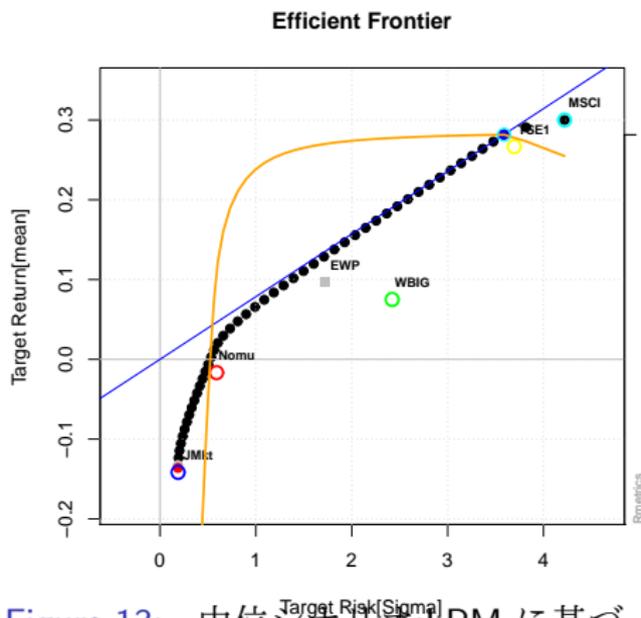


Figure 13: 中位シナリオ:LPM に基づく資産別リスク・リターン

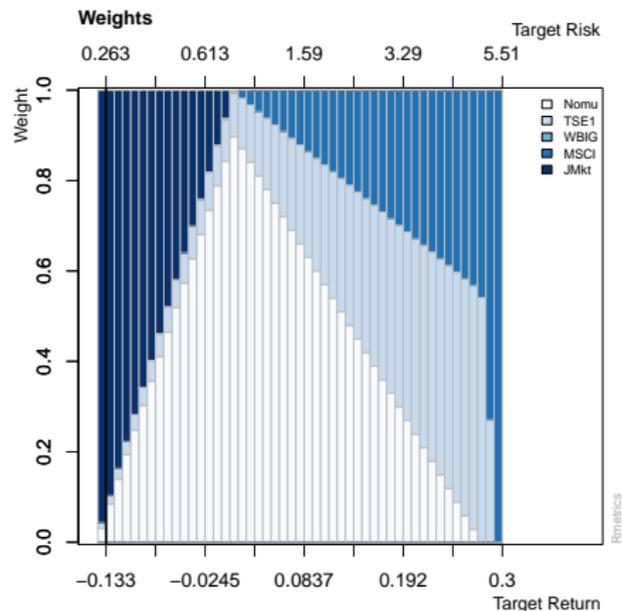


Figure 14: 中位シナリオ:LPM に基づく資産配分

市場シナリオ:LPM

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=69:20:0:11:0

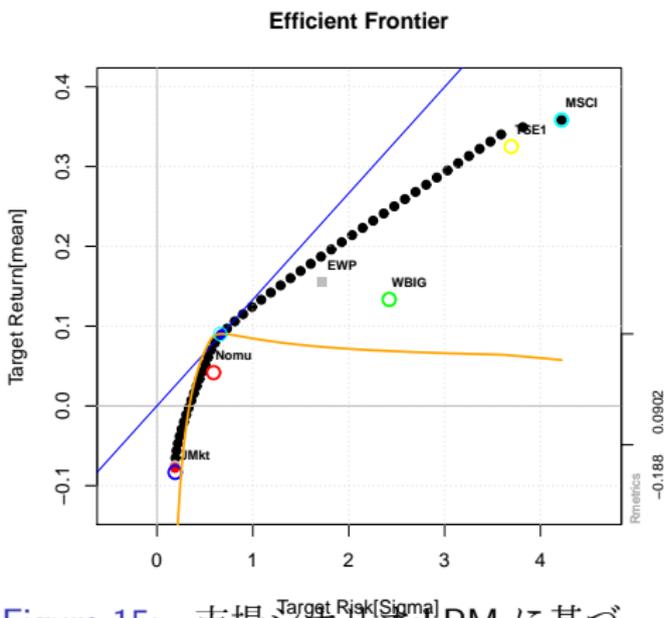


Figure 15: 市場シナリオ:LPM に基づく資産別リスク・リターン

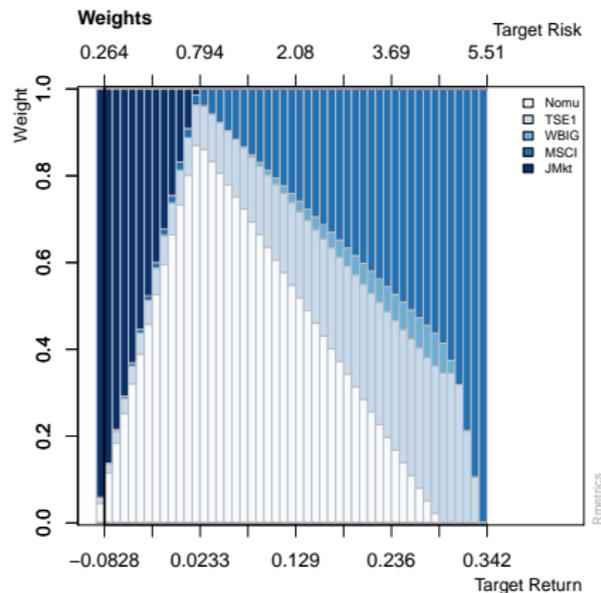


Figure 16: 市場シナリオ:LPM に基づく資産配分

低リスク運用ポートフォリオ

- 平均分散法と CAPM によれば, 同一リターン (リスク) で最小 (最大) のリスク (リターン) となる最適な各資産の組み合わせの集合は, ポートフォリオの標準偏差をリスクとし, 平均をリターンとする平面上で曲線を描き, 投資家はその効用に見合う最適ポートフォリオを選択することがよいとされている。
- N 個の危険資産が, それぞれ分散 σ_i^2 と, 二つの資産間の共分散 $\sigma_{ij} (i, j = 1, \dots, N)$ を持つとすると, 分散共分散行列 $\Omega = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^N$ が定義できる。また, C を対応する相関行列, 標準偏差ベクトルを $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)'$ とする。危険資産のポートフォリオを, 投資比率ベクトル $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)'$ で表すとポートフォリオの総リスクは, $\sigma(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}'\Omega\mathbf{w}}$ となる。

- ① 平均分散法による大域最小分散ポートフォリオ (GMV); ポートフォリオの総分散を最小化
- ② 等金額投資 (EW); 各資産の投資比率を同一とする
- ③ 最大分散化ポートフォリオ (MDP); 分散化比率 (DR) を最大化
- ④ 均等リスク寄与度法 (ERC); 各資産のリスク寄与率を同一させるように資産配分を決定

GMV

GMV においてはポートフォリオの総分散を最小化するので制約条件の下で以下の量の最小化を行った最適解となる。

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \mathbf{w}' \Omega \mathbf{w} \\ \text{s.t.} & \mathbf{w}' \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ は総和をとるためのベクトルである。構成比率ベクトルの非負制約がなければ、この解は以下のようになることが簡単な計算により確かめられる。

$$\mathbf{w}^* = \frac{\Omega^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \Omega^{-1} \mathbf{1}} \quad (4.1)$$

このときの最小分散は、

$$\sigma^2(\mathbf{w}^*) = \mathbf{w}^* \Omega \mathbf{w}^* = \frac{1}{\mathbf{1}' \Omega^{-1} \mathbf{1}} \quad (4.2)$$

となる。これから、以下の比例関係が成り立つ。

$$\mathbf{w} \propto \Omega^{-1} \cdot \mathbf{1} = \text{diag}(\sigma^{-1}) \cdot C^{-1} \cdot \text{diag}(\sigma^{-1}) \cdot \mathbf{1} \quad (4.3)$$

MDP

MDP では、分散化比率 DR を最大化する。

$$R(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}'\sigma}{\sqrt{\mathbf{w}'\Omega\mathbf{w}}}$$

$$\mathbf{w}^* = \arg \max_{\mathbf{w}'\mathbf{1}=1} DR(\mathbf{w})$$

この解は Choueifaty and Coignard [2008] によれば、以下のとおりの比例関係が成り立つ。
MVP とは $\text{diag}(\sigma^{-1})$ の項だけ異なる。

$$\mathbf{w}^* \propto \text{diag}(\sigma^{-1}) \cdot C^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (4.4)$$

なお分散化比率 DR とボラティリティ加重の集中度 CR

$$CR(\mathbf{w}) = \frac{\sum_i (w_i \sigma_i)^2}{(\sum_i w_i \sigma_i)^2}$$

にはボラティリティ加重平均相関 $\rho(\mathbf{w})$

$$\rho(\mathbf{w}) = \frac{\sum_{i \neq j} (w_i w_j \sigma_i \sigma_j) \rho_{ij}}{\sum_{i \neq j} (w_i w_j \sigma_i \sigma_j)}$$

を用いて、以下の関係があることが知られている。

$$DR(\mathbf{w}) = [\rho(\mathbf{w})(1 - CR(\mathbf{w})) + CR(\mathbf{w})]^{-\frac{1}{2}}$$

ERC

ERC あるいはリスクパリティポートフォリオ (RPP: Risk Parity Portfolio) は以下のように定義される。まず, 各資産の投資比率 \mathbf{w} に対し, 第 i 資産以外の投資比率を 0 としたものを $\hat{\mathbf{w}}^i$ とすると, 以下の等式が成り立つ。

$$\sigma(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}'\Omega\mathbf{w}} = \sum \frac{\hat{\mathbf{w}}^{i'}\Omega\hat{\mathbf{w}}^i}{\sigma(\mathbf{w})} \quad (4.5)$$

この時, $\frac{\hat{\mathbf{w}}^{i'}\Omega\hat{\mathbf{w}}^i}{\sigma(\mathbf{w})}$ を第 i 資産のリスク寄与度 RC_i と呼ぶ。ERC は, 各資産のリスク寄与度を均一にしたポートフォリオとして定義される。

$$\frac{RC_i}{\sigma(\mathbf{w})} = \frac{1}{N} \quad (4.6)$$

伝統的 4 資産を用いた低リスク運用戦略の比較分析

- ① 分散・共分散行列は過去 20 年間の収益率の時系列データに基づく。
- ② ただしここでの集中度はハーフィンダール指数のことであり、 $\mathcal{H}(w) = \sum_{i=1}^n w_i^2$ で定義される。

名目	ポートフォリオ戦略名	集中度	日本債券	日本株式	外国債券	外国株式
1	GMV	88	94	5	1	0
2	ERC	57	74	8	12	6
3	MDP	65	80	10	8	2
4	EW	25	25	25	25	25

Table 6: 名目リターン

実質	ポートフォリオ戦略名	集中度	日本債券	日本株式	外国債券	外国株式
1	GMV	88	94	5	1	0
2	ERC	55	72	9	12	7
3	MDP	64	79	10	8	3
4	EW	25	25	25	25	25

Table 7: 実質リターン

低リスク運用ポートフォリオの比較

- リターンは過去 20 年間の平均 (添え字なし) と GPIF の中位ケース (添え字 1) および市場ケース (添え字 2) を使い分ける。
- 実質リターンでは,MDP や ERC では日本債券なみのリスクで年率 1.7 % を上回る。
- GPIF の新しいポートフォリオでは, リターンは少し高いが, リスクは 8 % と大幅に増加する。

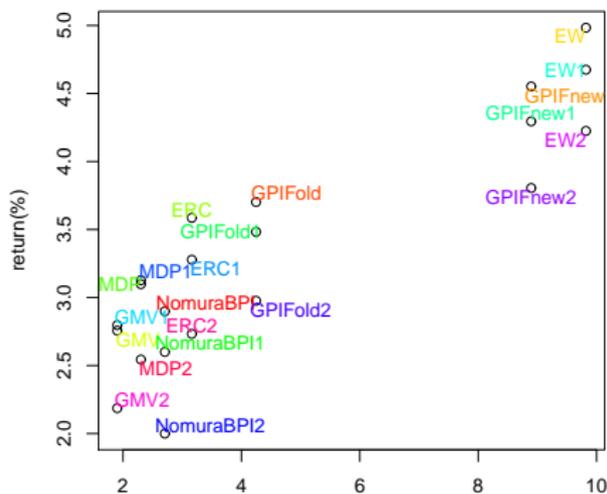


Figure 17: 名目リターンベースの場合

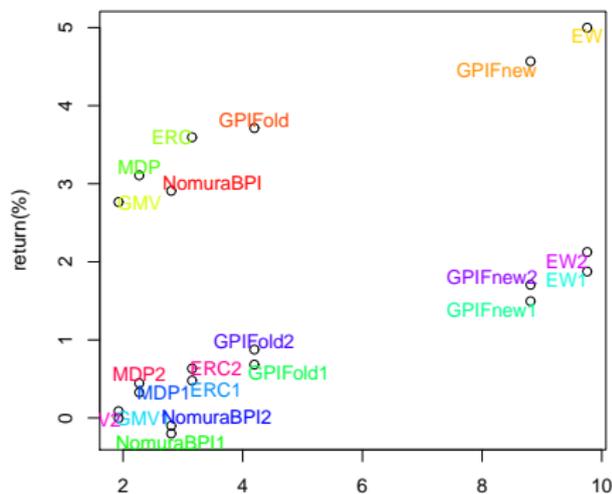


Figure 18: 実質リターンベースの場合

投資対象の拡大と分散化の追求

- 資産区分を細分化することによってさらに低リスク運用を進められる可能性がある。
- 資産数を 14 系列に増やした場合の、資産は 5 つのグループに分ける。²

グループ	グループに属する資産の時系列名
日本債券	NomuraBPI 国債 1-3
	NomuraBPI 国債 3-7
	NomuraBPI 国債 7 年以上
日本株式	TSE1
	REITJ
	JapanHD(高配当利回り)
外国債券	WBIG
	WBIGhgd(フルヘッジ)
	InflUS(米国インフレ運動債)
外国株式	MSCIKokusai
	EM(MSCI のエマージング株式)
	WorldHD(高配当利回り)
商品	Gold(金)
	CrudeOil(原油)

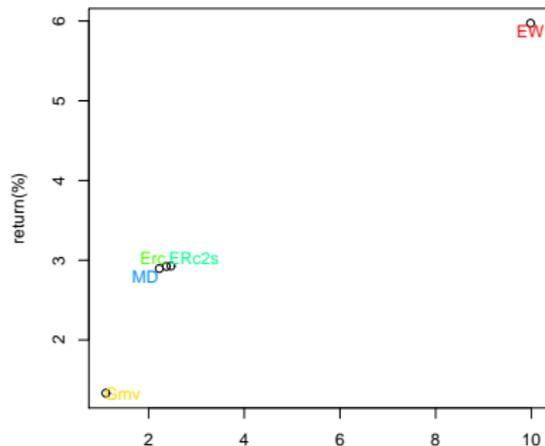


Figure 19: GMV,ERC,ERC2s,MDP の 4 手法による最適化結果

²1999 年 1 月から 2014 年 12 月までの 15 年間の月次収益率 (変化率)

基礎統計値および相関係数

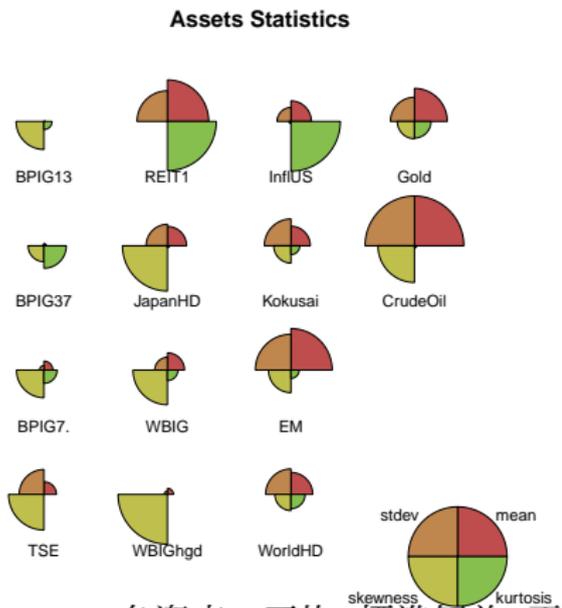


Figure 20: 各資産の平均, 標準偏差, 歪度, 尖度

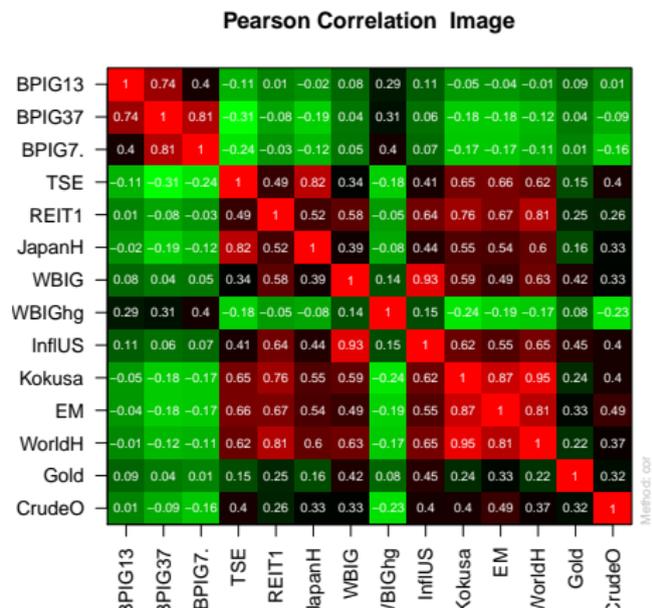


Figure 21: 各資産の相関係数 (Kendall)

GMV,ERC,ERC2s,MDP の4手法による最適化

	GMV	ERC	ERC2s	MDP
BPIG1-3	96.0	33.9	40.5	11.1
BPIG3-7	0.0	22.2	20.2	36.7
BPIG7-	0.0	10.8	10.8	9.5
TSE1	1.2	1.9	1.5	4.7
REITJ	0.0	1.2	1.4	0.4
JapanHD	1.2	2.0	1.8	0.0
WBIG	0.0	1	2.5	2.8
WBIGhgd	2.8	16.5	10.7	30.6
InflUS	0.0	2.1	2.6	0.0
Kokusai	0.0	1.4	1.3	2.5
EM	0.0	0.0	1.1	1.0
WorldHD	0.0	1.4	1.3	0.0
Gold	0.0	0.0	2.8	2.4
CrudeOil	0.0	1.1	1.4	2.1
集中度	92	21	23	25

ファクター投資

- ファクター投資は資産クラスのリターンを生み出す共通のリスクファクターによりポートフォリオを構築する手法である。
- 70年代後半に開発され、2008年のリーマンショック以降、低リスク運用に関心が集まる時代背景のもとで再び注目が集まり始めた。
- なぜ低リスク運用である、GMV,ERC,MDP だけでは不十分とされたのであろうか。
- これには、Choueifaty et al[2011] によるポートフォリオ構築不変性による判断基準がある。
- ファクター投資では、「不変性」の基準を満たすばかりか、ファクター数は資産数に比べて十分少なくでき、またファクター間の相関はゼロという好ましい性質を持つからである。
- 統計手法としては、一般には主成分分析や因子分析の手法が用いられる。

主成分分析による固有値ベクトル(1,2軸)

- 第4主成分までで80%近い累積寄与率になる。
- また第1主成分は42%を占める。

Eigenvalue Ratio Plot

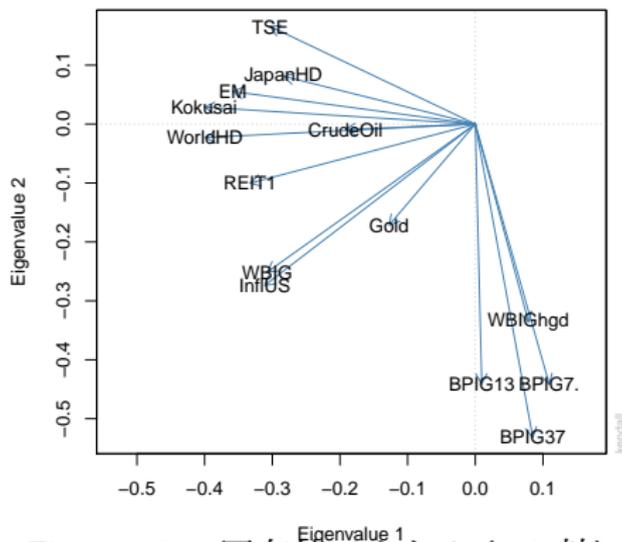


Figure 22: 固有値ベクトル(1,2軸)

ファクター配分結果

- y_i は投資割合, MR_i は限界リスク, RC_i はリスク寄与度, RC^*_i は相対リスク寄与度を表している。
- これはファクターというリスクの表現であるので, 実際には資産配分に変換する必要がある。
- しかし, Roncalli and Weisang[2012] で指摘されているように, 空売り禁止の制約下ではこのような解が常に求められるとは限らない。

	GMV : 総リスク=2.19 %				ERC : 総リスク=2.30 %			
	y_i	MR_i	RC_i	RC^*_i	y_i	MR_i	RC_i	RC^*_i
\mathcal{F}_1	7	48	4	9	14	83	13	25
\mathcal{F}_2	15	48	8	17	20	61	13	25
\mathcal{F}_3	35	48	15	32	31	43	13	25
\mathcal{F}_4	42	48	20	42	34	38	13	25

	MDP : 総リスク=2.28 %				EW : 総リスク=2.78 %			
	y_i	MR_i	RC_i	RC^*_i	y_i	MR_i	RC_i	RC^*_i
\mathcal{F}_1	13	86	14	26	25	135	34	50
\mathcal{F}_2	19	62	13	26	25	73	18	27
\mathcal{F}_3	31	43	12	23	25	36	9	13
\mathcal{F}_4	35	38	13	25	25	27	7	10

結論

- ① 今回の一連の分析結果から,GPIF の基本ポートフォリオの見直し結果の最適性については疑問が残った。
- ② またリターンに大きく依存するポートフォリオ最適化の不安定性を改めて確認するものとなった。("Garbage in Garbage out")
- ③ 更に GMV,ERC,MDP を用いての検証から,ポートフォリオ最適化と比較すると低リスク運用手法の優位性が確認された。
- ④ 次に資産数を 14 に増やし GMV,ERC,2 段階の ERC(ERC2s),MDP による最適化計算から ERC,ERC2s,MDP のリスクプロファイルはほぼ同じで,より安定性のあるポートフォリオとなることから,投資対象の拡大は更なる分散効果が期待できることがわかった。。
- ⑤ 最後に主成分分析によるファクター投資の試算を行ったが,さらに分散投資効果のあるポートフォリオが構築出来る可能性を示した。

ファクター投資の今後の課題

- ① ファクター投資の適切な主成分の数の選択
- ② 算出されたファクターの経済的意味付け
- ③ 資産配分への変換
- ④ ファクター投資モデルを中心とした GARCH などの時系列構造を考慮した多期間の最適化などの発展

Evaluating Capital Allocation with Distortion Risk Measures

Hideatsu Tsukahara

(tsukahar@seijo.ac.jp)

Dept of Economics, Seijo University

December 18, 2015

「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再起的事象」
研究集会

Contents

1. Capital Allocation Problem
2. Distortion Risk Measures (DRMs)
3. Capital Allocation with DRMs
4. Numerical Results
5. Concluding Remarks

1. Capital Allocation Problem

d investment opportunities (e.g., business units, subportfolios, assets)

X_i : loss associated with the i th investments

1. Compute the overall risk capital $\rho(X)$, where $X = \sum_{i=1}^d X_i$ and ρ is a particular risk measure.
2. Allocate the capital $\rho(X)$ to the individual investment possibilities according to some mathematical *capital allocation principle* such that, if κ_i denotes the capital allocated to the investment opportunity with potential loss X_i , we have $\sum_{i=1}^d \kappa_i = \rho(X)$.

►► Find $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_d) \in \mathbb{R}^d$ s.t. $\sum_{i=1}^d \kappa_i = \rho(X)$ according to some criterion

Setup

It is convenient to introduce 'weights' $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$

(to be interpreted as amount of money invested in each opportunity)

Put $X(\lambda) := \sum_{i=1}^d \lambda_i X_i$ and

$$r_\rho(\lambda) := \rho(X(\lambda)) \quad \text{risk measure function}$$

If ρ is positive homogeneous, then, for $h > 0$

$$r_\rho(h\lambda) = hr_\rho(\lambda)$$

i.e., r_ρ is positive homogeneous of degree 1

Euler's rule: If r_ρ is positive homogeneous and differentiable,

$$r_\rho(\lambda) = \sum_{i=1}^d \lambda_i \frac{\partial r_\rho}{\partial \lambda_i}(\lambda)$$

Euler allocation principle

If r_ρ is a positive homogeneous risk measure function, which is differentiable on the set Λ , then the (per-unit) Euler capital allocation principle associated with r_ρ is

$$\kappa_i(\lambda) = \frac{\partial r_\rho}{\partial \lambda_i}(\lambda)$$

Justification

- Tasche: RORAC compatibility

r_ρ : differentiable risk measure function

κ : capital allocation principle

κ is called *suitable for performance measurement* if for all λ we have

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{-\mathbb{E}(X(\lambda))}{r_\rho(\lambda)} \right) \begin{cases} > 0 & \text{if } \frac{-\mathbb{E}(X_i)}{\kappa_i(\lambda)} > \frac{-\mathbb{E}(X(\lambda))}{r_\rho(\lambda)}, \\ < 0 & \text{if } \frac{-\mathbb{E}(X_i)}{\kappa_i(\lambda)} < \frac{-\mathbb{E}(X(\lambda))}{r_\rho(\lambda)}. \end{cases}$$

►► The only per-unit capital allocation principle suitable for performance measurement is the Euler principle.

- Denault: Cooperative game theory

d investment opportunities = d players

If ρ is subadditive, then $\rho(X(\lambda)) \leq \sum_{i=1}^d \rho(\lambda_i X_i)$.

A fuzzy core (Aubin, 1981) is given by

$$\mathcal{C} = \left\{ \kappa \in \mathbb{R}^d : r_\rho(\mathbf{1}) = \sum_{i=1}^d \kappa_i \ \& \ r_\rho(\lambda) \geq \sum_{i=1}^d \lambda_i \kappa_i \ \forall \lambda \in [0, 1]^d \right\}$$

►► If r_ρ is differentiable at $\lambda = \mathbf{1}$, then \mathcal{C} consists only of the gradient vector of r_ρ at $\lambda = \mathbf{1}$:

$$\kappa_i = \left. \frac{\partial r_\rho(\lambda)}{\partial \lambda_i} \right|_{\lambda=\mathbf{1}}$$

Examples

- Covariance principle:

$$r_\rho(\lambda) = \sqrt{\text{var}(X(\lambda))} = \sqrt{\lambda' \Sigma \lambda}$$

where Σ is the covariance matrix of (X_1, \dots, X_d) . Then

$$\kappa_i(\lambda) = \frac{\partial r_\rho(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \frac{\text{cov}(X_i, X(\lambda))}{\sqrt{\text{var}(X(\lambda))}}$$

In particular, the capital allocated to the i th investment opportunity is

$$\kappa_i = \frac{\text{cov}(X_i, X)}{\sqrt{\text{var}(X)}}$$

- VaR contributions:

$$r_\rho(\lambda) = \text{VaR}_\alpha(X(\lambda))$$

Then (Tasche, 1999)

$$\kappa_i(\lambda) = \frac{\partial r_\rho(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \mathbb{E}(X_i \mid X(\lambda) = \text{VaR}_\alpha(X(\lambda)))$$

In particular, the capital allocated to the i th investment opportunity is given by

$$\kappa_i = \mathbb{E}(X_i \mid X = \text{VaR}_\alpha(X))$$

[Difficult to compute (c.f. Glasserman (2005))]

- ES contributions:

$$r_\rho(\lambda) = \text{ES}_\alpha(X(\lambda)) = \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 F_{X(\lambda)}^{-1}(u) du$$

Then

$$\kappa_i(\lambda) = \frac{\partial r_\rho(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \mathbb{E}(X_i \mid X(\lambda) \geq \text{VaR}_\alpha(X(\lambda)))$$

In particular, the capital allocated to the i th investment opportunity is given by

$$\kappa_i = \mathbb{E}(X_i \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X))$$

2. Distortion Risk Measures (DRM)

The class of **coherent** risk measures which satisfy **law invariance** and **comonotonic additivity**.

Definition

A **distortion risk measure (DRM)** is defined by

$$\rho_D(X) := \int_{[0,1]} F_X^{-1}(u) dD(u) = \int_{\mathbb{R}} x D \circ F_X(dx).$$

where D is a **distortion function** (i.e., a df on $[0, 1]$).

►► a.k.a. **spectral risk measure** (Acerbi), weighted V@R (Cherny)

★ $D_\alpha^{\text{VaR}}(u) = \mathbf{1}_{\{u \geq 1-\alpha\}}$ yields $\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, but this D_α^{VaR} is not convex.

Example: *Expected Shortfall (ES)*

The expected loss that is incurred when VaR is exceeded

$$\text{ES}_\alpha(X) := \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 F_X^{-1}(u) du \doteq \mathbb{E}(X \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X))$$

Taking distortion of the form

$$D_\alpha^{\text{ES}}(u) = \frac{1}{\alpha} [u - (1 - \alpha)]_+, \quad 0 < \alpha < 1$$

yields ES as a DRM

One-parameter Families of DRMs (Tsukahara, 2009b):

- *Proportional Hazards*: $D_{\theta}^{\text{PH}}(u) = 1 - (1 - u)^{\theta}$
- *Proportional Odds*: $D_{\theta}^{\text{PO}}(u) = \frac{\theta u}{1 - (1 - \theta)u}$
- *Gaussian (Wang transform)*: $D_{\theta}^{\text{GA}}(u) = \Phi(\Phi^{-1}(u) + \log \theta)$
- *Proportional γ -Odds*: $D_{\theta}^{\text{PGO}}(u) = 1 - \left[\frac{(1 - u)^{\gamma}}{\theta - \theta(1 - u)^{\gamma} + (1 - u)^{\gamma}} \right]^{1/\gamma}$

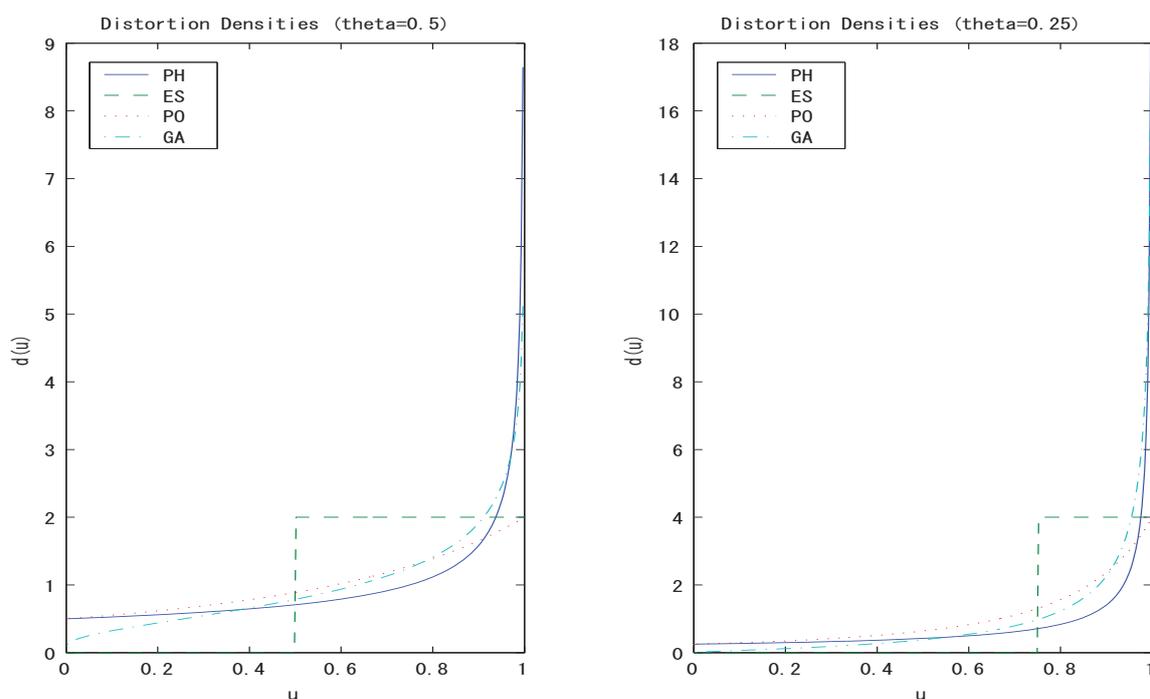


图 1: Distortion densities ($\theta = 0.5$, $\theta = 0.25$)

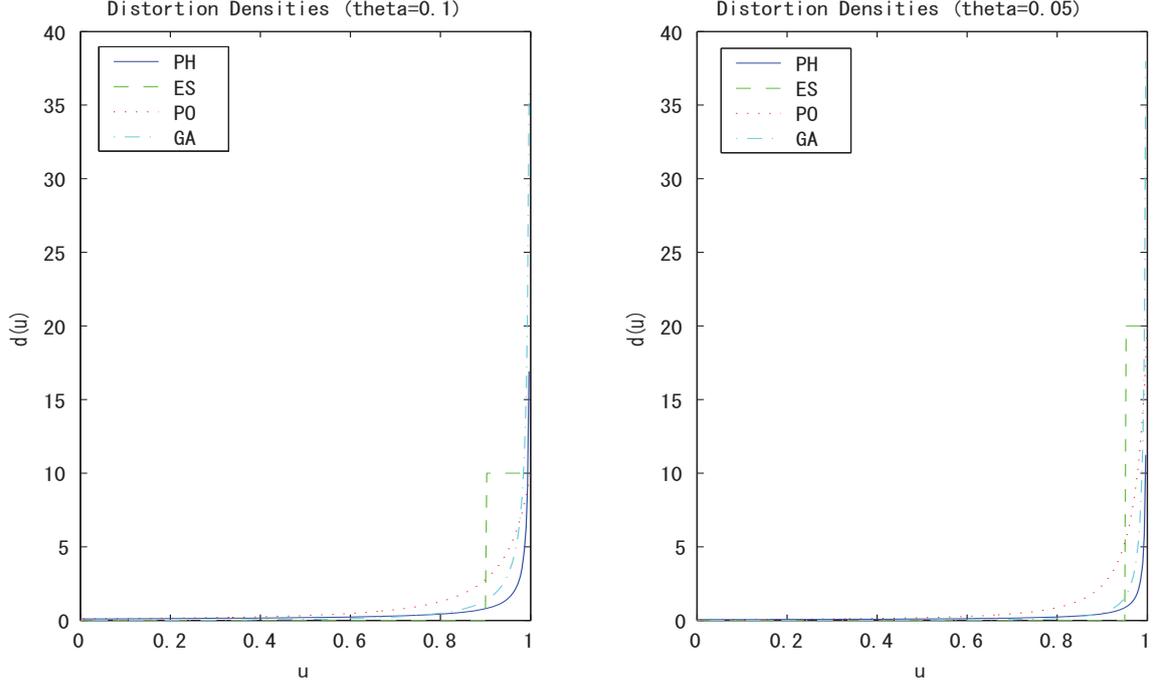


图 2: Distortion densities ($\theta = 0.1$, $\theta = 0.05$)

3. Capital Allocation with DRMs

$$r_\rho(\lambda) = \rho_D(X(\lambda)) = \int_{[0,1]} F_{X(\lambda)}^{-1}(u) dD(u)$$

Then, under some regularity conditions (Tasche (2000)),

$$\begin{aligned} \kappa_i(\lambda) &= \frac{\partial r_\rho(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \int_{[0,1]} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} F_{X(\lambda)}^{-1}(u) dD(u) \\ &= \int_{[0,1]} E[X_i | X(\lambda) = F_{X(\lambda)}^{-1}(u)] dD(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} E[X_i | X(\lambda) = x] d(F_{X(\lambda)}(x)) dF_{X(\lambda)}(x) \\ &= E[X_i d(F_{X(\lambda)}(X(\lambda)))] \end{aligned}$$

Thus, the capital allocated to the i th investment opportunity is

$$\kappa_i = E[X_i d(F_X(X))]$$

►► We can think of $d(F_X(X))$ as a Radon-Nikodym density:

$E(d(F_X(X))) = 1$ trivially

$$\frac{dQ}{dP} = d(F_X(X)) \implies \kappa_i = E^Q(X_i)$$

Even when we know the joint df of (X_1, \dots, X_d) , it is still difficult to compute κ_i since the joint df of X_i and X is needed (The only exception is a Gaussian case).

⇒ Resort to Monte Carlo

Given a random sample (X_1^k, \dots, X_d^k) , $k = 1, \dots, n$, put

$$X^k = X_1^k + \dots + X_d^k, \quad \mathbb{F}_X(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{X^k \leq x\}$$

Then we can estimate κ_i by

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_i &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_i^k d(\mathbb{F}_X(X^k)) \\ &= \iint x_i d(\mathbb{F}_X(x)) d\mathbb{F}_{X_i, X}(x_i, x) \end{aligned}$$

where

$$\mathbb{F}_{X_i, X}(x_i, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{X_i^k \leq x_i, X^k \leq x\}$$

The error $\widehat{\kappa}_i - \kappa_i$ can be asymptotically evaluated by proving asymptotic normality: Under certain regularity conditions,

$$\sqrt{n}(\widehat{\kappa}_i - \kappa_i) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2)$$

where

$$\sigma^2 = \text{var} \left(F_{X_i}^{-1}(\xi_i) d(\xi) + \iint F_{X_i}^{-1}(u_i) d'(u) \mathbf{1}_{\{\xi \leq u\}} dC_i(u_i, u) \right)$$

$$C_i(F_{X_i}(x_i), F_X(x)) = P(X_i \leq x_i, X \leq x) \text{ and } (\xi_i, \xi) \sim C_i$$

(Needs to be modified for ES)

4. Numerical Results

Take the following distortion densities

- Expected Shortfall: $d_\theta(u) = \frac{1}{\theta} \mathbf{1}_{\{u \geq 1-\theta\}}$
- Proportional Odds: $d_\theta(u) = \frac{\theta}{(1-u+\theta u)^2}$
- Proportional Hazards: $d_\theta(u) = \theta(1-u)^{\theta-1}$
- Gaussian: $d_\theta(u) = \frac{\phi(\Phi^{-1}(u) + \log \theta)}{\phi(\Phi^{-1}(u))}$

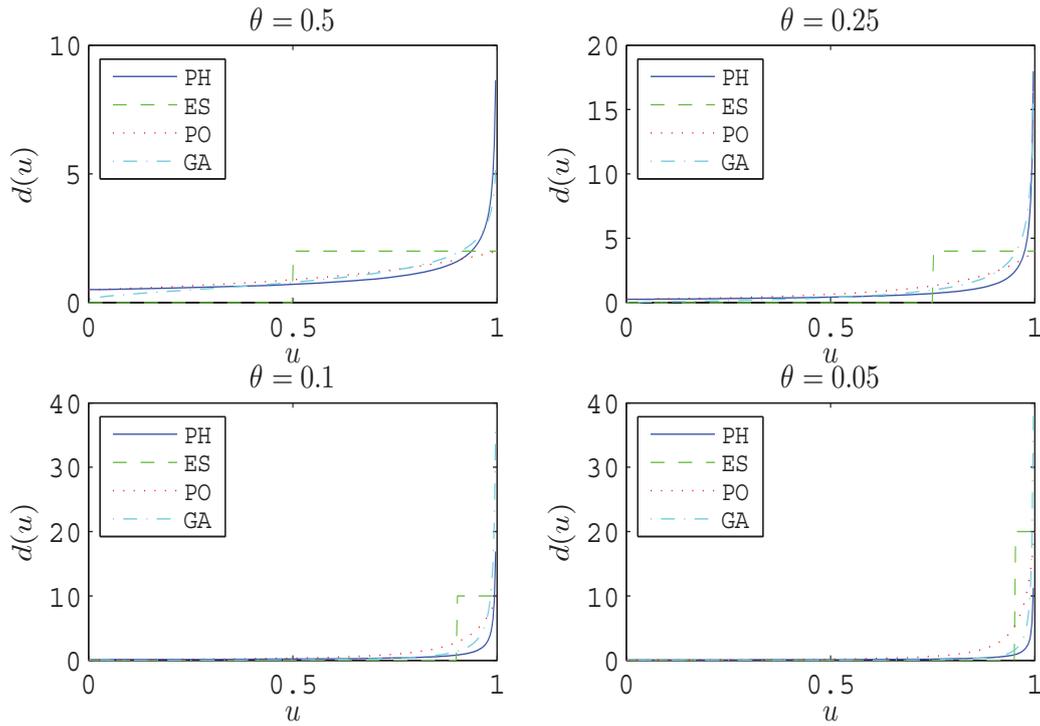


Figure 3: Distortion densities

Elliptical loss distribution: $E_d(\mu, \Sigma, \psi)$

μ : location vector, Σ : dispersion matrix, ψ : characteristic generator

Assume r_ρ is the risk measure function of a positive homogeneous, law invariant risk measure ρ . Let $(X_1, \dots, X_d) \sim E_d(\mathbf{0}, \Sigma, \psi)$. Then under the Euler allocation, the relative capital allocation is given by

$$\frac{\kappa_i}{\kappa_j} = \frac{\kappa_i(\mathbf{1})}{\kappa_j(\mathbf{1})} = \frac{\sum_{k=1}^d \Sigma_{ik}}{\sum_{k=1}^d \Sigma_{jk}}, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

►► The relative amounts of capital allocated to each investment opportunity are the same as long as we use a positive homogeneous, law invariant risk measure.

Estimated ratios $\hat{\kappa}_i/\hat{\kappa}_{i+1}$ of capital allocation ($\theta = \alpha = 0.05$)

sample from $N\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}\right)$, size = n , 1000 runs

n	true ratio	ES		PO		PH		Gaussian	
		bias	$\sqrt{\text{MSE}}$	bias	$\sqrt{\text{MSE}}$	bias	$\sqrt{\text{MSE}}$	bias	$\sqrt{\text{MSE}}$
100	4/5	0.0740	0.3962	0.0352	0.2815	0.0422	0.3281	0.0587	0.3933
	5/6	-0.0081	0.1045	-0.0028	0.0793	-0.0023	0.0908	-0.0033	0.1048
250	4/5	0.0129	0.2239	0.0101	0.1669	0.0219	0.2185	0.0332	0.2660
	5/6	0.0007	0.0634	-0.0003	0.0483	-0.0017	0.0623	-0.0030	0.0740
500	4/5	0.0092	0.1441	0.0064	0.1103	0.0138	0.1594	0.0188	0.1911
	5/6	-0.0006	0.0429	-0.0007	0.0329	-0.0015	0.0465	-0.0019	0.0552
5000	4/5	0.0017	0.0459	0.0006	0.0356	10^{-5}	0.0888	0.0005	0.0931
	5/6	-0.0003	0.0139	$9 \cdot 10^{-6}$	0.0108	0.0008	0.0265	0.0008	0.0278

Estimated ratios $\hat{\kappa}_i/\hat{\kappa}_{i+1}$ of capital allocation ($\theta = \alpha = 0.05$)

sample from $t_3\left(\begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}, 4\right)$, size = n , 1000 runs

n	true ratio	ES		PO		PH		Gaussian	
		bias	$\sqrt{\text{MSE}}$	bias	$\sqrt{\text{MSE}}$	bias	$\sqrt{\text{MSE}}$	bias	$\sqrt{\text{MSE}}$
100	4/5	0.1498	1.0398	0.0926	0.5788	0.3003	4.7310	0.1144	1.8068
	5/6	-0.0069	0.1471	-0.0048	0.1238	-0.0068	0.1487	-0.0110	0.1754
250	4/5	0.0563	0.3477	0.0431	0.2970	0.0860	0.4712	0.1227	0.6317
	5/6	-0.0057	0.0966	-0.0043	0.0849	-0.0069	0.1207	-0.0084	0.1410
500	4/5	0.0176	0.2319	0.0198	0.2265	0.0497	1.4311	0.2511	5.8652
	5/6	0.0011	0.0654	-0.0004	0.0615	-0.0056	0.1097	-0.0073	0.1250
5000	4/5	-0.0013	0.0683	-0.0016	0.0638	0.0244	0.3356	0.0220	0.3158
	5/6	-0.0010	0.0202	0.0010	0.0189	0.0027	0.0836	0.0028	0.0820

Estimated capital allocation with GPD & t marginals ($\theta = \alpha = 0.05$)

using Gaussian copula with correlation matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}$

	ES		PO		PH		Gaussian	
	cont.	ratio	cont.	ratio	cont.	ratio	cont.	ratio
GPD(1/25)	2.60		2.21		1.58		3.25	
GPD(1/10)	4.38	(0.59)	3.45	(0.64)	4.18	(0.38)	8.30	(0.39)
GPD(1/3)	9.12	(0.48)	6.99	(0.49)	24.32	(0.17)	38.87	(0.21)
t(25)	1.28		0.99		0.74		1.60	
t(10)	2.04	(0.63)	1.54	(0.64)	1.69	(0.44)	3.44	(0.47)
t(3)	3.82	(0.53)	2.88	(0.54)	9.62	(0.18)	14.97	(0.23)

Estimated capital allocation with GPD & t marginals ($\theta = \alpha = 0.05$)

using Gaussian copula with correlation matrix $\begin{pmatrix} 1 & -0.1 & 0.5 \\ -0.1 & 1 & -0.9 \\ 0.5 & -0.9 & 1 \end{pmatrix}$

	ES		PO		PH		Gaussian	
	cont.	ratio	cont.	ratio	cont.	ratio	cont.	ratio
GPD(1/25)	3.24		2.63		1.17		2.99	
GPD(1/10)	1.05	(3.09)	1.15	(2.29)	0.29	(4.03)	0.41	(7.29)
GPD(1/3)	8.12	(0.21)	6.26	(0.18)	7.58	(0.04)	21.02	(0.02)
t(25)	2.08		1.57		0.65		1.78	
t(10)	-0.73	(-2.83)	-0.54	(-2.91)	-0.60	(-1.09)	-1.75	(-1.02)
t(3)	2.63	(-0.28)	2.01	(-0.27)	2.60	(-0.23)	7.32	(-0.24)

5. Concluding Remarks (Tentative)

- Euler capital allocations based on ES and PODRM are easy to compute, and widely applicable.
- For ES and PODRM, the computational errors with Monte Carlo can be evaluated by CLT.
- For PHDRM and Wang transform, the CLT will not be applicable, and they are difficult to handle.
- Numerical experiments support some of the theoretical observations. We need systematic sensitivity analysis on dependence structure.

G-expectations and some statistical problems

TOMOYUKI ICHIBA *

1 Introduction

What is the (reasonable) worst scenario in the portfolio management? The fund manager often has to consider various market scenarios in the near future. In order to assess the balance between risk and return of portfolio choices, it is good to obtain some ideas about range of possible scenarios from the past data. The difficulty of understanding reasonable scenarios arises from uncertainty of the market characteristics in the future. In other words, the problem we need to look at is to understand how the market characteristics move in the past and in the future. Here we shall get some insights for this problem from the so-called G -expectation for volatility uncertainty. In this note we shall discuss some aspects of statistical estimation methods under the G -expectation.

In section 2.1 we review definition of G -expectations and volatility uncertainty, representation results and related topics. In section 2.2 we introduce the sublinear expectation under the discrete time along with the invariance principle. In section 2.3 we discuss some naive estimators of lower and upper bounds of volatility uncertainty as well as the corresponding estimator for the risk measure to see the difficulties in the estimation problem, and then present some open problems.

2 G-expectation

2.1 Volatility Uncertainty in Continuous-time

Given a fix time T let us consider a canonical space $\Omega := C([0, T], \mathbb{R})$ of continuous functions on $[0, T]$ and a set \mathcal{P} of probability measures on Ω such that under any probability measure $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ the canonical process $\omega := \{\omega(t), 0 \leq t < \infty\}$ is a \mathbb{P} -martingale with $\omega(0) = 0$ whose quadratic variation process $\langle \omega \rangle(t)$ in a range $[\lambda, \rho]$, i.e.,

$$\lambda t \leq \langle \omega \rangle(t) \leq \rho t; \quad 0 \leq t < \infty, \quad (2.1)$$

where the nonnegative numbers ρ and λ are upper and lower bounds of volatility uncertainty. We denote by $\mathcal{F}_t := \sigma(\omega_s, 0 \leq s \leq t)$, $0 \leq t \leq T$ the canonical filtration. Thus \mathcal{P} represents the scenarios of the sample paths which satisfies the condition (2.1).

*Date: January 17th, 2016. Department of Statistics and Applied Probability, South Hall, University of California Santa Barbara 93106 USA. (E-mail: ichiba@pstat.ucsb.edu) Research supported in part by the National Science Foundation under grant NSF-DMS-13-13373. The author is greatly thankful for fruitful discussions to the participants in the workshop held on December 18th, 2015 at University of Tokyo. He is also very thankful to Professor Naoto Kunitomo for warm hospitality during his visit at University of Tokyo in December 2015.

A G -expectation is a map from random variables on the canonical space Ω to real numbers (PENG (2007), (2008), (2010)). The symbol G refers to a given function of the form

$$G(x) := \frac{1}{2} \sup_{a \in [\lambda, \rho]} (ax), \quad (2.2)$$

where $x \in \mathbb{R}$ for the one-dimensional, volatility uncertainty case. Given a Lipschitz continuous function f , the G -expectation of a random variable ξ of the form $\xi := f(\omega(T))$ is defined by

$$\widehat{\mathbb{E}}(\xi) := u(0, 0), \quad (2.3)$$

where $u(0, 0)$ is the initial value of the solution $u(t, x)$ to the non-linear backward heat equation

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)\right) = 0,$$

with the terminal condition $u(T, x) = f(x)$, where G is the function defined in (2.2), u_t is the derivative with respect to t and u_{xx} is the second derivative with respect to x . It coincides with

$$\widehat{\mathbb{E}}(\xi) = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\xi) \quad (2.4)$$

for any \mathcal{F}_T -measurable random variable $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ with $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\xi) < +\infty$ for every $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ (DENNIS, HU & PENG (2011)). Each $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ represents a scenario. Thus the G -expectation is understood from (2.4) as the worst case expectation, if we look at ξ as the portfolio loss size based on the martingale measures with the constraint (2.1). The volatility uncertainty is measured by the interval $[\lambda, \rho]$.

The G -expectation $\widehat{\mathbb{E}}$ is a special case of non-linear expectations on the Lipschitz functional. More generally, given a linear space \mathcal{H} of real functions that contains 1 and satisfies the property that $X \in \mathcal{H}$ implies $|X| \in \mathcal{H}$, a nonlinear expectation \mathbf{E} is defined as a functional $\mathcal{H} \mapsto \mathbb{R}$ satisfying

- (a) (Monotonicity) If $X, Y \in \mathcal{H}$ and $X \geq Y$, then $\mathbf{E}[X] \geq \mathbf{E}[Y]$; and
- (b) (Constant Preservation) $\mathbf{E}[c] = c$ for every constants c .

In addition, if the functional \mathbf{E} satisfies

- (c) (Subadditivity) $\mathbf{E}[X + Y] \leq \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$ for every $X, Y \in \mathcal{H}$ and
- (d) (Positive Homogeneity) $\mathbf{E}[\lambda X + c] = \lambda \mathbf{E}[X] + c$ for every $\lambda \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$ and $X \in \mathcal{H}$,

then we call it the sublinear expectation. The notion of the sublinear expectation is introduced by HUBER (1981) (cf. HUBER & STRASSEN (1973)) as the upper expectation in the context of robust statistics. In the context of mathematical finance it is introduced and studied axiomatically by ARTZNER, DELBAEN, EBER AND HEATH (1999) as the coherent risk measure. In fact, the representation (2.4) is generalized to the idea of the convex risk measure which typically takes the form of

$$\rho(X) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_\rho} (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})),$$

where \mathcal{Q}_ρ is some class of probability measures on the set of possible scenarios and $\alpha(\cdot)$ is some penalty function on \mathcal{Q}_ρ , and X can be seen as the net monetary outcome. The convex risk measure is a monetary risk measure or capital requirement with a convex acceptance set. When the capital requirement $\rho(X)$ only depends on the law of X , the risk measure is called law-invariant.

The structure of law-invariant risk measures are described in terms of average value at risk (e.g., KUSUOKA (2001), FRITELLI & ROSAZZA GIANIN (2005)).

In actuarial mathematics convex risk measure appears as convex principles of premium calculations (e.g., DEPRez & GERBER (1985)). In mathematical economics preference of a rational agent is formulated as expected utility under the axioms of rationality. Relaxation of the axioms of rationality implies the coherent risk measure and the convex risk measure (GILBOA & SCHMEIDER (1989), MACCHERONI, MARINACCI & RUSTICHINI (2006)).

The sublinear expectation \mathbf{E} has some nice properties listed below.

- For $p \geq 1$ let us denote by \mathcal{H}_p the subset of \mathcal{H} that consists of $X \in \mathcal{H}$ with $\mathbf{E}[|X|^p] < \infty$. For every $X \in \mathcal{H}_p$ and $Y \in \mathcal{H}_q$ with $1 \leq p \leq q < \infty$ and $(1/p) + (1/q) = 1$ we have

$$(\mathbf{E}[|X + Y|^p])^{1/p} \leq (\mathbf{E}[|X|^p])^{1/p} + (\mathbf{E}[|Y|^p])^{1/p},$$

as well as

$$\mathbf{E}[|XY|] \leq (\mathbf{E}[|X|^p])^{1/p} (\mathbf{E}[|Y|^q])^{1/q}.$$

The linear space \mathcal{H}_p can be completed to a Banach space under the norm $\|X\|_p := (\mathbf{E}[|X|^p])^{1/p}$. Thus the sublinear expectation \mathbf{E} can be extended to this Banach space.

- If $X, Y \in \mathcal{H}_1$ with $\mathbf{E}[Y] = -\mathbf{E}[-Y]$, then by the subadditivity we have

$$\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[-Y] \leq \mathbf{E}[X + Y] \leq \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y],$$

and hence

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y].$$

In particular, if $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[-Y] = 0$, then $\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X]$.

- Let us consider the sequence X_1, X_2 in \mathcal{H}_2 with $\mathbf{E}[X_i^2] = \bar{\sigma}^2 > 0$ and $\mathbf{E}[X_i X_{i+j}] = \mathbf{E}[-X_i X_j] = 0$ for every $i, j = 1, 2, \dots$. Then the *Law of Large Numbers* holds in the sense that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right] = 0, \quad (2.5)$$

where $S_n = X_1 + \dots + X_n$ for $n \in \mathbb{N}$. Indeed, by the above properties of sublinear expectations

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right] &= \frac{1}{n^2} \mathbf{E}[S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}X_n + X_n^2] = \frac{1}{n^2} \mathbf{E}[S_{n-1}^2 + X_n^2] \leq \frac{1}{n^2} \mathbf{E}[S_{n-1}^2] + \mathbf{E}[X_n^2] \\ &\leq \dots \leq \frac{n}{n^2} \mathbf{E}[X_1^2] = \frac{\bar{\sigma}^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

- Suppose now that we have $X \in \mathcal{H}$ with a sublinear expectation \mathbf{E} and $X' \in \mathcal{H}'$ with another sublinear expectation \mathbf{E}' . We say X under \mathbf{E} and X' under \mathbf{E}' are identically distributed, if

$$\mathbf{E}[\varphi(X)] = \mathbf{E}'[\varphi(Y)]$$

for every continuous test function $\varphi(\cdot)$ with polynomial growth and with $\varphi(X) \in \mathcal{H}_1$ and $\varphi(X') \in \mathcal{H}'_1$, where \mathcal{H}'_1 is the subset of \mathcal{H}' with finite sublinear expectation. Also, for $n \in \mathbb{N}$ we say a random variable $X \in \mathcal{H}$ is independent of $Y := (Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{H}^n := \mathcal{H} \times \dots \times \mathcal{H}$, if

$$\mathbf{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[\varphi(X, y)] |_{\{y=Y\}}]$$

for every continuous test function $\varphi : H^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ with polynomial growth and with $\varphi(X, y) \in \mathcal{H}_1$, $\varphi(X, y) \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathbb{R}^n$. A sequence $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ of random variables in \mathcal{H} is said to converge in distribution under \mathbf{E} if $\{\mathbf{E}[\varphi(X_n)], n \in \mathbb{N}\}$ converges for every uniformly Lipschitz, bounded function $\varphi(\cdot)$. If $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{H}_3 are identically distributed with $\mathbf{E}[X_1] = \mathbf{E}[-X_1] = 0$, $\mathbf{E}[X_1^2] = \rho > 0$, $-\mathbf{E}[-X_1^2] = \lambda > 0$, and if each X_{n+1} is independent of (X_1, \dots, X_n) for every $n \in \mathbb{N}$, then the *Central Limit Theorem* holds, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\varphi \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(\xi)], \quad (2.6)$$

where $\widehat{\mathbb{E}}$ is the G -expectation in (2.4) with the parameters ρ, λ .

- A random variable ξ in \mathcal{H}_2 is called G -normally distributed with volatility uncertainty $[\lambda, \rho]$ under $\widehat{\mathbb{E}}$, if for every uniformly Lipschitz, bounded test function $\varphi(\cdot)$

$$v(t, x) := \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x + \sqrt{t}\xi)]; \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$$

is the unique, bounded continuous viscosity solution to

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)\right) = 0, \quad v(0, x) = \varphi(x), \quad (2.7)$$

where $G(\cdot)$ is the nonlinear function defined in (2.2). It follows from this definition

$$v(1, 0) = \widehat{\mathbb{E}}[\xi],$$

and in general, with the solution $v(\cdot)$ in (2.7) we define

$$P_t^G(\varphi)(x) := v(t, x) = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x + \sqrt{t}\xi)]; \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

- When $\rho = \lambda = \sigma^2 > 0$, then the G -normal distribution with volatility uncertainty $[\lambda, \rho]$ becomes the usual normal distribution with mean 0 and variance σ^2 and with density

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right); \quad x \in \mathbb{R}.$$

In this case we say G^0 -expectation, because the volatility uncertainty is reduced to the single variance. The functional (P^G) in (2.8) satisfies the nonlinear version

$$P_t^G(P_s^G(\varphi))(x) = P_{t+s}^G(\varphi)(x); \quad s, t \in [0, \infty), \quad x \in \mathbb{R}$$

of chain rule (or NISHIO semigroup property) as well as

$$P_1^G(\varphi) \geq P_1^{G^0}(\varphi), \quad P_1^{G^{[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]}}(\varphi) - P_1^{G^{[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]}}(\psi) \leq P_1^{G^{[\lambda, \rho]}}(\varphi - \psi) \quad (2.9)$$

for every uniformly Lipschitz continuous, bounded test functions φ, ψ and $\lambda \leq \underline{\sigma}^2 \leq \bar{\sigma}^2 \leq \rho$, where $P^G =: P^{G^{[\lambda, \rho]}}$ is defined in (2.8), G^0 is the special case with $\rho = \lambda$, $G^{[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]}$ is the G -normal distribution with volatility uncertainty $[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]$. We may extend this concept of G -normal random variables to the multivariate version of G -normal distribution.

All these properties and other properties of sublinear expectation and G -normal distribution have been developed by PENG (2007) and others. The idea of G -normal distribution is extended

to G -Brownian motion on the canonical space $\Omega = C([0, T], \mathbb{R})$ of continuous functions on $[0, T]$ for every $T > 0$. We consider the family

$$Lip^0(\mathcal{H}_T) := \{\varphi(\omega(t_1), \dots, \omega(t_m)) : \omega \in \Omega, t_1, \dots, t_m \in [0, T], \varphi \in lip(\mathbb{R}^m), m \geq 1\},$$

where $lip(\mathbb{R}^m)$ is the space of uniformly Lipschitz continuous bounded functions on \mathbb{R}^m . We also define the G -expectation $\widehat{\mathbb{E}}$ on $Lip^0(\mathcal{H}_T)$. The canonical process $B(\cdot) = \omega(\cdot) \in \Omega$ is a G -Brownian motion if $B(t)$ and $B(t+s) - B(s)$ are identically distributed; and $B(t_m) - B(t_{m-1})$ is independent of $(B(t_1), \dots, B(t_{m-1}))$ in the following sense:

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(B(t_1), \dots, B(t_{m-1}), B(t_m))] = \widehat{\mathbb{E}}[\bar{\varphi}(B(t_1), \dots, B(t_{m-1}))],$$

for every uniformly Lipschitz continuous, bounded function φ with

$$\bar{\varphi}(y_1, \dots, y_{m-1}) = \widehat{E}[\varphi(y_1, \dots, y_{m-1}, y_{m-1} + B(t_m) - B(t_{m-1}))]; \quad (y_1, \dots, y_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}.$$

Furthermore, with G -Brownian motion we may define the conditional expectation, the stochastic integral with respect to G -Brownian motion, and the corresponding Itô's formula (PENG (2008)).

2.2 From Discrete-time to Continuous-time

Given $n \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda \leq \rho < \infty$ we consider \mathbb{R}^{n+1} -valued random vector as a discrete time stochastic process in the canonical space $\Omega_n := \mathbb{R}^{n+1}$ with elements $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$ in discrete time $k = 0, 1, \dots, n$ with the canonical filtration $\mathcal{G}_k = \sigma(\omega_i, 0 \leq i \leq k)$, $k = 0, \dots, n$. We consider a set $\mathcal{P}^{(n)}$ of probability measures such that each element $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$ the canonical process ω forms a \mathbb{P} -martingale with $\omega_0 = 0$ and

$$\frac{\lambda}{n} \leq |\omega_k - \omega_{k-1}|^2 \leq \frac{\rho}{n}; \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

The discrete analogue of the G -expectation representation (2.4) is defined by the sublinear expectation

$$\widehat{\mathbb{E}}^{(n)}(\eta) := \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\eta) \quad (2.11)$$

for any random variable $\eta : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ such that η is \mathcal{G}_n -measurable and $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\eta] < \infty$ for every $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$.

We may extend from the discrete-time paths Ω_n to the continuous paths $\Omega = C([0, 1], \mathbb{R})$ by linear interpolation. Here for the sake of simplicity let us take $T = 1$. For a given $\omega \in \Omega_n$ we define the linear interpolation

$$\widehat{\omega}(t, \omega) := (\lfloor nt \rfloor + 1 - nt)\omega_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\omega_{\lfloor nt \rfloor + 1}; \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.12)$$

where $\lfloor x \rfloor$ is the maximum integer less than or equal to x . Then $\widehat{\omega} := \{\widehat{\omega}(t, \omega), 0 \leq t \leq 1\}$ takes values in $\Omega = C([0, 1], \mathbb{R})$ and \mathcal{G}_n -measurable random variable. Note that $\widehat{\omega}(k/n, \omega) = \omega_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\omega \in \Omega_n$. Thus we may define the sublinear expectation

$$\widehat{\mathbb{E}}^{(n)}(\xi) := \widehat{\mathbb{E}}^{(n)}(\xi(\widehat{\omega})) \quad (2.13)$$

for any \mathcal{F}_T -measurable random variable $\xi : \Omega = C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ via (2.11).

What is the relationship between the discrete version $\widehat{\mathbb{E}}^{(n)}(\cdot)$ and the continuous version $\widehat{\mathbb{E}}(\cdot)$ of the G -expectations?

Let us assume that $\xi : \Omega = C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function with polynomial growth. It is shown by DOLINSKY, NUTZ & SONER (2012) that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{E}}^{(n)}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\xi) = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\xi) = \widehat{\mathbb{E}}(\xi). \quad (2.14)$$

This can be seen as a DONSKER-type result under the G -expectation.

2.3 Estimation Procedures for Bounds

Suppose that the observation ω_k , $k = 0, 1, \dots, n$ is obtained in discrete-time points $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ with $t_k := k/n$, $k = 0, \dots, n$. We know from (2.14) that for large n the discrete analogue (2.11)-(2.13) of the sublinear expectation approximates the G -expectation with volatility uncertainty $[\lambda, \rho]$. From the observation $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$, we may define $\widehat{\omega}(\cdot) := \widehat{\omega}(\cdot, \omega)$ as in (2.12). Let us consider the estimation problem of the interval $[\lambda, \rho]$ of the G -expectation of volatility uncertainty. Since $\widehat{\mathbb{E}}[(\widehat{\omega}(1))^2] = \rho$ and $-\widehat{\mathbb{E}}[-(\widehat{\omega}(1))^2] = \lambda$, the estimation of these bounds $[\lambda, \rho]$ is essentially the estimation of the G -expectation.

It follows from (2.10) that the naive estimators of the lower and the upper bounds are

$$\widetilde{\lambda}_n := \min_{1 \leq k \leq n} (n |\omega_k - \omega_{k-1}|^2), \quad \widetilde{\rho}_n := \max_{1 \leq k \leq n} (n |\omega_k - \omega_{k-1}|^2), \quad (2.15)$$

respectively.

Using these estimators $\widetilde{\lambda}_n$, $\widetilde{\rho}_n$, given a function f , let us define the implied G -expectation

$$\widetilde{\xi}_n := \widetilde{u}_n(0, 0), \quad (2.16)$$

for any \mathcal{F}_1 -measurable random variable ξ of the form $\xi = f(\omega(\cdot))$ for $\omega \in \Omega = C([0, 1], \mathbb{R})$, where $\widetilde{u}_n(t, x)$ is the non-linear backward heat equation

$$-\frac{\partial \widetilde{u}_n}{\partial t}(t, x) - \widetilde{G}^{(n)}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}_n}{\partial x^2}(t, x)\right) = 0; \quad (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$$

with the terminal condition $\widetilde{u}_n(1, x) = f(x)$ and

$$\widetilde{G}^{(n)}(x) := \frac{1}{2} \sup_{a \in [\widetilde{\lambda}_n, \widetilde{\rho}_n]} (ax); \quad x \in \mathbb{R}.$$

Proposition. The estimators $\widetilde{\lambda}_n$, $\widetilde{\rho}_n$ in (2.15) satisfies that for every $n \in \mathbb{N}$ we have

$$\lambda \leq -\widehat{\mathbb{E}}^{(n)}[-\widetilde{\lambda}_n] \leq \widehat{\mathbb{E}}^{(n)}[\widetilde{\rho}_n] \leq \rho, \quad (2.17)$$

where $\widehat{\mathbb{E}}^{(n)}$ is the sublinear expectation defined in (2.11). Assume that $\xi = f(\omega(\cdot))$, $\omega \in \Omega = C([0, 1], \mathbb{R})$, where f is a Lipschitz continuous, bounded function. Then the estimator $\widetilde{\xi}_n$ in (2.16) satisfies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{E}}^{(n)}[\widetilde{\xi}_n] \leq \widehat{\mathbb{E}}[\xi], \quad (2.18)$$

for every \mathcal{F}_T -measurable random variable ξ of the form $\xi = f(\omega)$, where $\widehat{\mathbb{E}}$ is the G -expectation in (2.4).

Proof. First it follows from (2.10) that under the probability measure $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$ on Ω_n we have for $k = 1, \dots, n$ $\lambda \leq n|\omega_k - \omega_{k-1}|^2 \leq \rho$. Hence by the definition (2.15) we obtain

$$\lambda \leq \tilde{\lambda}_n \leq \tilde{\rho}_n \leq \rho, \quad (2.19)$$

and also by taking the expectation under $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$ we claim

$$\lambda \leq -\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[-\tilde{\lambda}_n] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\min_{1 \leq k \leq n} (n|\omega_k - \omega_{k-1}|^2)] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\max_{1 \leq k \leq n} (n|\omega_k - \omega_{k-1}|^2)] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{\rho}_n] \leq \rho.$$

Then taking the supremum over $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$ we obtain (2.17).

To show (2.18), first we obtain $G(\cdot) \geq \tilde{G}^{(n)}(\cdot)$ from (2.19), and then apply the result (2.9) with $\varphi(\cdot) = f(\cdot)$ and $\psi(\cdot) \equiv 0$ backward in time (cf. PENG (2008)) to obtain the inequality $\tilde{\xi}_n \leq \hat{\mathbb{E}}[\xi]$ \mathbb{P} -a.s. for every $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$. Taking the supremum over $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$ and then limits, we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{E}}^{(n)}[\tilde{\xi}_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{\xi}_n] \leq \hat{\mathbb{E}}[\xi],$$

and conclude the proof of the proposition. \square

This proposition implies that the naive estimate (2.16) of risk measure of the wealth $\xi = f(\omega(\cdot))$, in general, underestimates the risk $\hat{\mathbb{E}}[\xi]$ in the sense of (2.17)-(2.18). This type of problem often comes even in the classical statistical problem of estimating the support of random variables. Thus the natural question is how to improve the estimation of the lower and upper bounds for the volatility uncertainty. There might be a good subset of the family $\mathcal{P}^{(n)}$ of probability measures on Ω_n , so that the estimation procedure works well. Or is there stronger formulation to resolve this problem?

Here are some other open problems.

- In this note we consider only volatility uncertainty for one-dimensional random variable (or one asset). In general, we may consider multidimensional random variables with uncertainty for the volatility as well as the return, i.e., the function $G(\cdot)$ in (2.2) is replaced by

$$G(p, A) := \sup_{(q, Q) \in \Gamma} \left(\frac{1}{2} \text{Trace}(AQQ') + \langle p, q \rangle \right); \quad (p, A) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}(d), \quad (2.20)$$

where Γ is a bounded, closed subset of $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times d}$, and $\mathbb{S}(d)$ is the space of $(d \times d)$ square matrix. The corresponding equation is

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x, y) - G(D_y v(t, x, y), D_x^2 v(t, x, y)) = 0; \quad (t, x, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,$$

with Cauchy condition $u(0, x, y) = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ and the derivatives $D_y v = (\partial v / \partial y_i)_{1 \leq i \leq d}$, $D_x v = (\partial^2 v / \partial x_i \partial x_j)_{1 \leq i, j \leq d}$ (see PENG (2010)). Suppose that some discrete observation is given but Γ is unknown. Is there some good estimation procedure for unknown Γ in (2.20)?

- The above statistical problems are for discrete time observation. Suppose that the observation is continuously obtained. Is there a good way of combining filtering technique and optimization technique under the G -Brownian motion?

Bibliography

- ARTZNER, PH., DELBAEN, F., EBER, J.-M. & HEATH, D. (1999) “Coherent measures of risk”, *Math. Finance* **9** 664-675.
- DENIS, L., HU, M. & PENG, S. (2011) “Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: application to G-Brownian motion paths”, *Potential Analysis* **34**, 139-161
- DEPREZ, O. & GERBER, H.U. (1985) “On convex principles of premium calculation” *Insurance Math. Econom.* **4** 179-189, 1985.
- DOLINSKY, Y., NUTZ, M. & SONER, H.M. (2012) “Weak approximation of G-expectation”, *Stochastic Processes and their Applications* **122** 664-675.
- FRITTELLI, M. & ROSAZZA GIANIN, E. (2005) “Law invariant convex risk measures” *Adv. Math. Econ.* **7** 33-46.
- GILBOA, I. & SCHMEIDLER, D. (1989) “Maxmin expected utility with nonunique prior”, *J. Math. Econom.* **18** 141-153.
- HUBER, P.J. (1981) *Robust Statistics*, Jon Wiley & Sons.
- HUBER, P.J. & STRASSEN, V. (1973) “Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for capacities” *Ann. Statist.* **1** 251-263.
- KUSUOKA, S. (2001) “On law invariant coherent risk measures” *Adv. Math. Econ.* **3** 83-95.
- MACCHERONI, F. MARINACCI, M. & RUSTICHINI, A. (2006) “Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences” *Econometrica*, **74** 1447-1498.
- PENG, S. (2007) “G-expectation, G-Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type” in *Stochastic Analysis and Applications*, in Abel Symp. **2**, Springer, Berlin, 541-567
- PENG, S. (2008) “Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation” *Stochastic Processes and their Applications*, **118** 2223-2253.
- PENG, S. (2010) “Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty” Preprint available at arXiv: 1002.4546v1.

Effects of Jump and Noise via the Small Noise Asymptotics in High-Frequency Econometrics

栗栖大輔¹, 国友直人²

¹ 東京大学・経済・M2

² 東京大学

2015年12月18日

経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再帰的事象

Outline

- Introduction
- Effects of Jump and Noise on Realized Volatility
- Effects of Jump and Noise on Higher Order Functionals
- Effects of Noise on Jump Test
- Simulation
- Conclusion

1. Introduction 1/2

- 高頻度データを用いたリスク指標 (volatility) の推定や jump の検定等の統計的手法がこれまで開発されてきたが, 実務上重要である micro-market noise が存在する場合また noise と jump が同時に存在する場合における既存の方法の信頼性についてはよく知られていない.
- 本報告では noise が存在する下での realized volatility を含む関数のクラスに対する漸近的性質とその応用として, jump の有無の検定統計量に関して noise がある場合の misspecification の影響について報告する.

1. Introduction 2/2

- 具体的には”small-noise” の設定のもと、ジャンプとノイズが存在する場合において各種統計量の漸近的性質が、noise が存在しない場合と比較してどのように影響を受けるか、ということについて報告する。
- また数値実験の結果をもとに上記の結果の妥当性について述べる。

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 1/7

- まずは Realized volatility を用いた quadratic variation (QV) の推定に関して述べる.
- 金融市場のデータの観測期間を $[0, T]$ とし, T を固定する (今の場合 $T = 1$ とする).

$$Y(t_i^n) = X(t_i^n) + \epsilon_n v(t_i^n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

を時刻 $t_i^n \in [0, 1]$ における (log-)price の観測値とし, $X(t)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ 上の連続確率過程

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma_s dB_s \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (2)$$

とする. ここで B_s は標準 Brown 運動, micro-market noise $v(t_i^n)$ は $X(t)$ と独立な i.i.d. の確率変数かつ $E[v_1] = 0$, $E[v_1^2] = 1$, $E[v_1^4] = 3 + \kappa_4 < \infty$. ϵ_n は n に依存するパラメータの列.

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 2/7

- 以下では micro-market noise が "small-noise" 即ち $\epsilon_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ であると仮定し, データの観測は regular scheme ($t_i^n - t_{i-1}^n = 1/n$) であるとする.
- このとき, realized volatility を用いて QV を推定することを考える.

$$V_n(2) = \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n Y)^2 \quad (3)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^2 + 2\epsilon_n \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)(\Delta v_i) + \epsilon_n^2 \sum_{i=1}^n (\Delta v_i)^2 \quad (4)$$

$$= (I) + (II) + (III) \quad (5)$$

ここで $\Delta_i^n Y = Y(t_i^n) - Y(t_{i-1}^n)$.

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 3/7

- 特に $n\epsilon_n^2 = c + O(1/n)$ ($c > 0$) とし, volatility を以下のように仮定する.

$$\sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t \mu_s^\sigma ds + \int_0^t \omega_s^\sigma dB_s^\sigma \quad (6)$$

ここで B_s^σ は B_s と相関し得る Brown 運動であり, 簡単のため $\mu_s^\sigma, \omega_s^\sigma$ は bounded とする. このとき, 確率過程の離散化に伴う誤差の評価として次の結果を得る.

Lemma 1

For $i = 1, \dots, n$, and $t_{i-1}^n < t \leq t_i^n$,

$$\sigma_t^2 - \sigma^2(t_{i-1}^n) = \int_{t_{i-1}^n}^t [2\sigma_s \mu_s^\sigma + (\omega_s^\sigma)^2] ds + \int_{t_{i-1}^n}^t 2\sigma_s \omega_s^\sigma dB_s^\sigma \quad (7)$$

$$\int_0^1 \sigma_s^2 ds = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2(t_{i-1}^n) + O_p(1/n) \quad (8)$$

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 4/7

Lemma 2

For $i = 1, \dots, n$ we have

$$\begin{aligned}\Delta_i^n X &= \sigma(t_{i-1}^n)(B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)) + O_p(1/n) & (9) \\ &= \sigma(t_{i-1}^n) \frac{1}{\sqrt{n}} Z_i + O_p(1/n)\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^2 - \int_0^1 \sigma_s^2 ds = 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} [X_s - X_{t_{i-1}^n}] dX_s = O_p(1/\sqrt{n}) \quad (10)$$

where $Z_i \sim N(0, 1)$

Lemma 1, 2 を用いて $V_n(2)$ の分解の各項を評価することを考える。

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 5/7

Lemma 1,2 を用いて $V_n(2)$ を書き下す.

$$V_n(2) = (I) + (II) + (III)$$

$$(I) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1}^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1}^2 (Z_i^2 - 1) \right] + O_p(1/n) \quad (11)$$

$$(II) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1} Z_i (v_i - v_{i-1}) \right] + O_p(1/n) \quad (12)$$

$$(III) = 2c + \frac{c}{\sqrt{n}} \times \sqrt{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - v_{i-1})^2 - 2 \right] \quad (13)$$

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 6/7

このとき,

$$U_{0n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1}^2 + 2c \quad (14)$$

$$U_{1n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1}^2 (Z_i^2 - 1) \right] \quad (15)$$

$$U_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1} Z_i (v_i - v_{i-1}) \right] \quad (16)$$

$$U_{3n} = \frac{c}{\sqrt{n}} \times \sqrt{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - v_{i-1})^2 - 2 \right] \quad (17)$$

とおくと, $U_{0n} \xrightarrow{P} \int_0^1 \sigma_s^2 ds + 2c$ であり, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n} の各項を評価することで次の定理を得る.

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 7/7

Theorem 1

Small-noise の仮定の下, $U_0 = \int_0^1 \sigma_s^2 ds + 2c$ とすると,

$$\sqrt{n}(V_n(2) - U_0) \xrightarrow{\text{stably}} U = U_1 + U_2 + U_3 \quad (18)$$

ここで U_i ($i = 1, 2, 3$) は \mathcal{F} -conditionally mutually independent Gaussian r.v. with zero mean and variance

$$E[U_1^2 | \mathcal{F}] = [2 + \kappa_4] \int_0^1 \sigma_s^4 ds,$$

$$E[U_2^2 | \mathcal{F}] = 8c \int_0^1 \sigma_s^2 ds,$$

$$E[U_3^2 | \mathcal{F}] = [12 + 4\kappa_4]c^2$$

2.2 Effects of Jump and Noise on RV 1/2

次に jump を含む場合を考えるために $X(t)$ は以下の Ito-semimartingale に従うとする.

$$\begin{aligned} X(t) = X(0) &+ \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \\ &+ \int_s \int_{|x| < 1} \delta(s, x) (\mu - \nu)(ds, dx) + \int_s \int_{|x| > 1} \delta(s, x) \mu(ds, dx) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで $\delta(s, x)$ は predictable function, $\mu(\cdot)$ は jump measure, $\nu(\cdot)$ は μ の compensator (上記の表現は Jacod and Protter (2012, Section 2) に基づく). このとき Theorem 1 における U_i ($i=0,1$) はそれぞれ次のようになる.

2.2 Effects of Jump and Noise on RV 2/2

$$U_0 = \int_0^1 \sigma_s^2 ds + \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X)^2 + 2c \quad (20)$$

$$E[U_1^2 | \mathcal{F}] = [2 + \kappa_4] \int_0^1 \sigma_s^4 ds + 4 \sum_{0 \leq s \leq 1} \sigma_s^2 (\Delta X)^2 \quad (21)$$

ここで U_1 は \mathcal{F} -conditionally mutually independent r.v. with zero mean. さらに v_i に対して正規性を仮定すると, U_2 は \mathcal{F} -conditionally Gaussian r.v. with zero mean であり,

$$E[U_2^2 | \mathcal{F}] = 8c \left[\int_0^1 \sigma_s^2 ds + \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X)^2 \right] \quad (22)$$

以上の結果は jump に関する項を除くと Theorem 1 と一致する。

3. Effects of Noise on $V_n(4)$ 1/6

- Noise が small noise であるときには, $V_n(p)$ 特に $V_n(4)$ の漸近的な性質についても調べることができる.

$$\begin{aligned} V_n(4) &= \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n Y)^4 & (23) \\ &= \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^4 + 4\epsilon_n \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^3 (\Delta v_i) \\ &\quad + 6\epsilon_n^2 \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^2 (\Delta v_i)^2 + 4\epsilon_n^3 \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X) (\Delta v_i)^3 \\ &\quad + \epsilon_n^4 \sum_{i=1}^n (\Delta v_i)^4 \end{aligned}$$

- Micro-market noise は small-noise $n\epsilon_n^2 = c + O(1/n)$ であるとする.

3. Effects of Noise on $V_n(4)$ 2/6

$V_n(4)$ の漸近的性質を調べるにあたり, $V_n(2)$ のときと同様に確率過程の離散化に伴う誤差を評価する必要がある. 以下の補題は semimartingale に対する伊藤の公式を用いることで得られる.

Lemma 3

X が (19) に従うとき, 任意の正の整数 $p \geq 2$ に対して以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^p - \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^p \tag{24} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} p(X_{s-} - X_{t_{i-1}^n})^{p-1} dX_s + \frac{p(p-1)}{2} (X_{s-} - X_{t_{i-1}^n})^{p-2} d[X_s, X_s]^c \right] \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{t_{i-1}^n \leq s < t_i^n} \sum_{j=2}^{p-1} p C_j (X_{s-} - X_{t_{i-1}^n})^{p-j} (\Delta X_s)^j = O_p(1/\sqrt{n}) \end{aligned}$$

ここで $[X_s, X_s]^c$ は X の 2 次変分の連続部分.

3. Effects of Noise on $V_n(4)$ 3/6

Lemma 3 を用いて

$$V_n(4) - \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^4 = U_{1n} + U_{2n} + U_{3n} + U_{4n} + U_{5n}$$

where

$$U_{1n} = \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^4 - \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^4$$

$$U_{2n} = 4\epsilon_n \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^3 (\Delta v_i), \quad U_{3n} = 6\epsilon_n^2 \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^2 (\Delta v_i)^2$$

$$U_{4n} = 4\epsilon_n^3 \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X) (\Delta v_i)^3, \quad U_{5n} = \epsilon_n^4 \sum_{i=1}^n (\Delta v_i)^4$$

の各項を評価すると, $U_{1n} = U_{2n} = O_p(1/\sqrt{n})$, $U_{3n} = U_{4n} = O_p(1/n)$, $U_{5n} = O_p(1/n\sqrt{n})$ となり, 次の定理を得る.

3. Effects of Noise on $V_n(4)$ 4/6

Theorem 2

$U_0 = \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^4$ とすると,

$$\sqrt{n}(V_n(4) - U_0) \xrightarrow{\text{stably}} U = U_1 + U_2 \quad (25)$$

U_1, U_2 は \mathcal{F} -conditionally mutually independent r.v. with zero mean with

$$E[U_1^2 | \mathcal{F}] = 16 \sum_{0 \leq s \leq 1} \sigma_s^2 (\Delta X_s)^6,$$

$$E[U_2^2 | \mathcal{F}] = 32c \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^6.$$

特に v_i に正規性を仮定すれば U_2 は \mathcal{F} -conditionally Gaussian r.v. with zero mean.

3. Effects of Noise on $V_n(4)$ 5/6

また X が diffusion type であるときには $U_{jn} = O_p(1/\sqrt{n})$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) となり, 以下に示すように $V_n(4)$ の漸近分布は複雑になる.

Remark

X が continuous Ito-semimartigale であるとき, $V_n(4) = \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n Y|^4$,
 $U_0^*(4) = m_4 \int_0^1 \sigma_s^4 ds + 12c \int_0^1 \sigma_s^2 ds + cE[(\Delta v)^4]$ とする.
このとき,

$$\sqrt{n}(nV_n(4) - U_0^*(4)) \quad (26)$$

$$\xrightarrow{\text{stably}} U^*(4) = U_1^*(4) + U_3^*(4) + U_3^*(4) + U_4^*(4) + U_5^*(4)$$

m_k は標準正規分布の k 次モーメント.

3. Effects of Noise on $V_n(4)$ 6/6

ここで $U_i^*(4)$ ($i=1,2,3,4,5$) は \mathcal{F} -conditionally mutually independent Gaussian r.v. with zero mean and

$$E[U_1^*(4)^2|\mathcal{F}] = (m_8 - m_4^2) \int_0^1 \sigma_s^8 ds \quad (27)$$

$$E[U_2^*(4)^2|\mathcal{F}] = 480c \int_0^1 \sigma_s^6 ds \quad (28)$$

$$E[U_3^*(4)^2|\mathcal{F}] = 72c^2[(m_4 - m_2^2)\text{Var}(\Delta v)^2 + 4E[v_1^4]m_2^2] \int_0^1 \sigma_s^4 ds \quad (29)$$

$$E[U_4^*(4)^2|\mathcal{F}] = 16c^3\text{Var}[(\Delta v)^3] \int_0^1 \sigma_s^2 ds \quad (30)$$

$$E[U_5^*(4)^2|\mathcal{F}] = c^4\text{Var}[(\Delta v)^4] \quad (31)$$

4. Effects of Noise on Jump Test 1/5

- Jump test in Ait-Saharia and Jacod (2009)

Ait-Saharia and Jacod (2009) では, 検定統計量

$$S_n(p, k) = \frac{V_n(p, k)}{V_n(p, 1)} \left(V_n(p, k) = \sum_{i=1}^{[n/k]} |\Delta_i^n X(k)|^p \right) \quad (32)$$

を用いて離散観測されたデータから jump の有無を検定する方法が提案されている.

$$\Omega^j = \{ \omega : s \mapsto X_s(\omega) \text{ が } [0,1] \text{ 上で不連続} \}$$

$$\Omega^c = \{ \omega : s \mapsto X_s(\omega) \text{ が } [0,1] \text{ 上で連続} \}$$

として,

4. Effects of Noise on Jump Test 2/5

Proposition (Ait-Saharia and Jacod (2009))

(i) In the restriction to the set Ω^j ,

$$\sqrt{n}(S_n(4, 2) - 1) \xrightarrow{\text{stably}} N \left(0, \frac{8 \sum_{0 \leq s \leq 1} \sigma_s^2 (\Delta X_s)^6}{\left(\sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^4 \right)^2} \right) \quad (33)$$

(ii) In the restriction to the set Ω^c ,

$$\sqrt{n}(S_n(4, 2) - 2) \xrightarrow{\text{stably}} N \left(0, \frac{160 \int_0^1 \sigma_s^8 ds}{3 \left(\int_0^1 \sigma_s^4 ds \right)^2} \right) \quad (34)$$

(i), (ii) を用いて, 帰無仮説 H_0 : jump 有り, H_0 : jump 無し に対してそれぞれ検定が実行できる.

4. Effects of Noise on Jump Test 3/5

- Ait-Saharia and Jacod (2009) で提案された jump の検定統計量の noise による影響を調べる. このため, 以下の統計量を考える.

$$W_n(p, k) = \sqrt{n} \left[\sum_{i=1}^{[n/k]} |\Delta_i^n Y(k)|^p - \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n Y(1)|^p \right] \quad (35)$$

ここで $\Delta_i^n Y(k) = (X_{ik\Delta_n} - X_{(i-1)k\Delta_n}) + \epsilon_n(v_{ik\Delta_n} - v_{(i-1)k\Delta_n})$, $v_{ik\Delta_n}$ は i.i.d. noise, $\Delta_n = 1/n$. このとき, Lemma 3 と 次の Theorem 3 の結果から次の定理を得る.

4. Effects of Noise on Jump Test 4/5

Theorem 3

X を Ito-semimartingale とし, $p > 3$, $k \geq 2$ とする. このとき, small noise かつ $E[v_1^8] < \infty$ の仮定の下,

$$W_n(p, k) \xrightarrow{\text{stably}} U = U_1 + U_2 \quad (36)$$

ここで U_i ($i = 1, 2$) は \mathcal{F} -conditionally mutually independent Gaussian r.v. with zero mean and

$$E[U_1^2 | \mathcal{F}] = p^2(k-1) \sum_{0 \leq s \leq 1} \sigma_s^2 (\Delta X_s)^{2(p-1)},$$

$$E[U_2^2 | \mathcal{F}] = 2cp^2(k-1) \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^{2(p-1)}.$$

4. Effects of Noise on Jump Test 5/5

- 以上の結果は $c = 0$ とすると Ait-Saharia and Jacod (2009) の結果と一致する.
- X が diffusion type のときも漸近分布が導けるが, Theorem 2 の Remark で述べたように結果は複雑になる.
- Theorem 3 より, $S_n(p, k) = V_n(p, k)/V_n(p, 1)$ とすると次の系を得る.

Corollary 4

X を Ito-semimartingale とすると, Theorem 3 の仮定の下, $p = 4, k = 2$ として以下成り立つ.

$$\sqrt{n}[S_n(p, k) - 1] \xrightarrow{\text{stably}} S = \frac{U_1 + U_2}{U_0^2} \quad (37)$$

ここで U_i ($i = 0, 1, 2$) は Theorem 2 で定義されたもの.

5. Simulation

- 以上の結果を数値実験により確かめる.
- まず $S_n(4, 2)$ がどのように noise の影響を受けるかを紹介する.
- Theorem 1, 2, Corollary 4 に対していくつかの場合における simulation 結果を紹介.

5. Simulation

X は以下の data generating process に従って生成.

$$\text{(Case 1) } dX_t = \sigma_t dB_t$$

$$\text{(Case 2) } dX_t = \sigma_t dB_t + dJ_t^{CP}$$

$$\text{(Case 3) } dX_t = \sigma_t dB_t + dJ_t^S$$

$$d\sigma_t^2 = \kappa(\alpha - \sigma_t^2)dt + \sigma_t dB_t^\sigma$$

B_t : Brownian motion,

J_t^{CP} : compound Poisson (λ (intensity) = 10, jump size = $N(0, 5)$),

J_t^S : β -stable process with $\beta = 1$,

$\kappa = 5$, $\alpha = 0.2$, $\rho = E[dB_t dB_t^\sigma] = -0.5$.

5. Simulation

noise の影響を見るために以下の場合について jump test をそのまま適用した図を示す.

X_0 : Diffusion + Poisson jump,	X_1 : Diffusion,
Y_0 : Diffusion + Poisson jump + ϵ_0 ,	Y_1 : Diffusion + ϵ_0 ,
V_0 : Diffusion + Poisson jump + ϵ_1 ,	V_1 : Diffusion + ϵ_1 ,
W_0 : Diffusion + Poisson jump + ϵ_2 ,	W_1 : Diffusion + ϵ_2

where

$\epsilon_0 \sim N(0, 0.05)$ (large noise),
 $\epsilon_1 \sim \Delta_n^{1/2} N(0, 1)$ (type-1 small noise),
 $\epsilon_2 \sim \Delta_n^{1/4} N(0, 1)$ (type-2 small noise)

5.1 Effects of Noise on $S_n(4, 2)$ (Case 1)

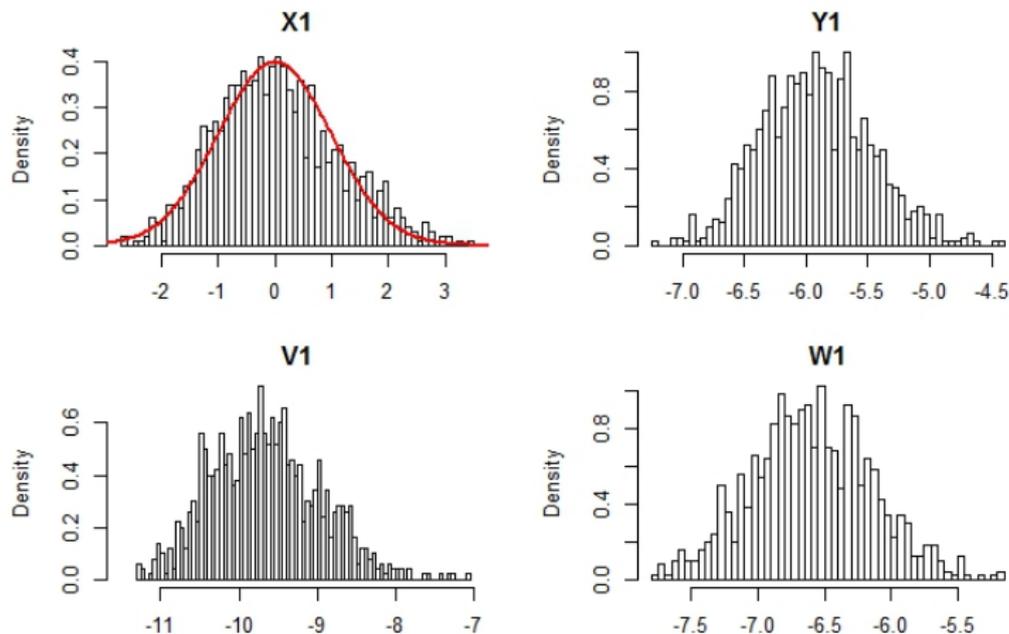


Figure: Effect of noise for CLT (diffusion)

5.1 Effects of Noise on $S_n(4, 2)$ (Case 2)

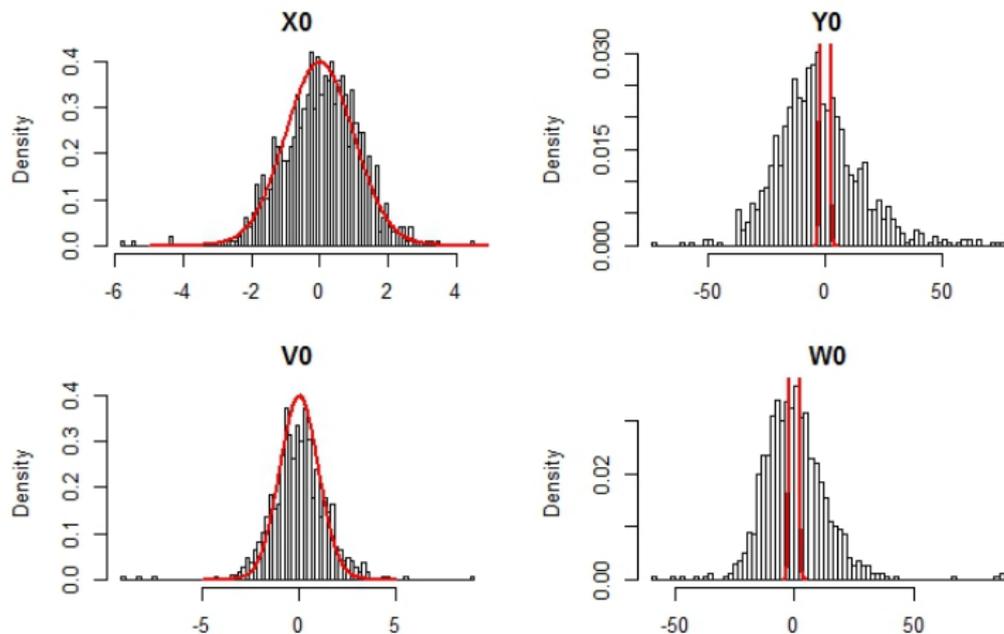


Figure: Effect of noise for CLT (jump)

5.2 Theorem 1 (Case 1)

$\Delta_n = 1/1000$, $c = 100$, シミュレーション回数 1000 回

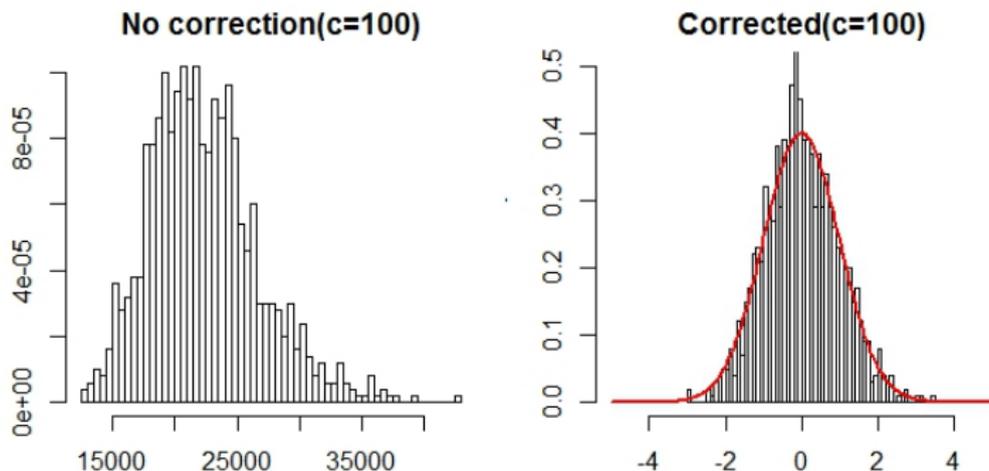


Figure: Effect of noise for CLT (diffusion)

5.2 Theorem 1 (Case 2)

$\Delta_n = 1/1000$, $c = 100$, シミュレーション回数 1000 回

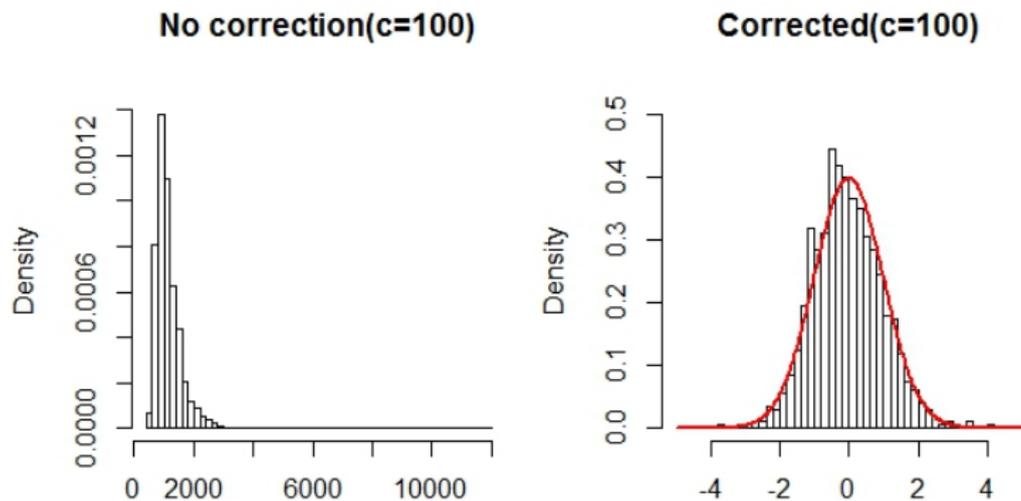
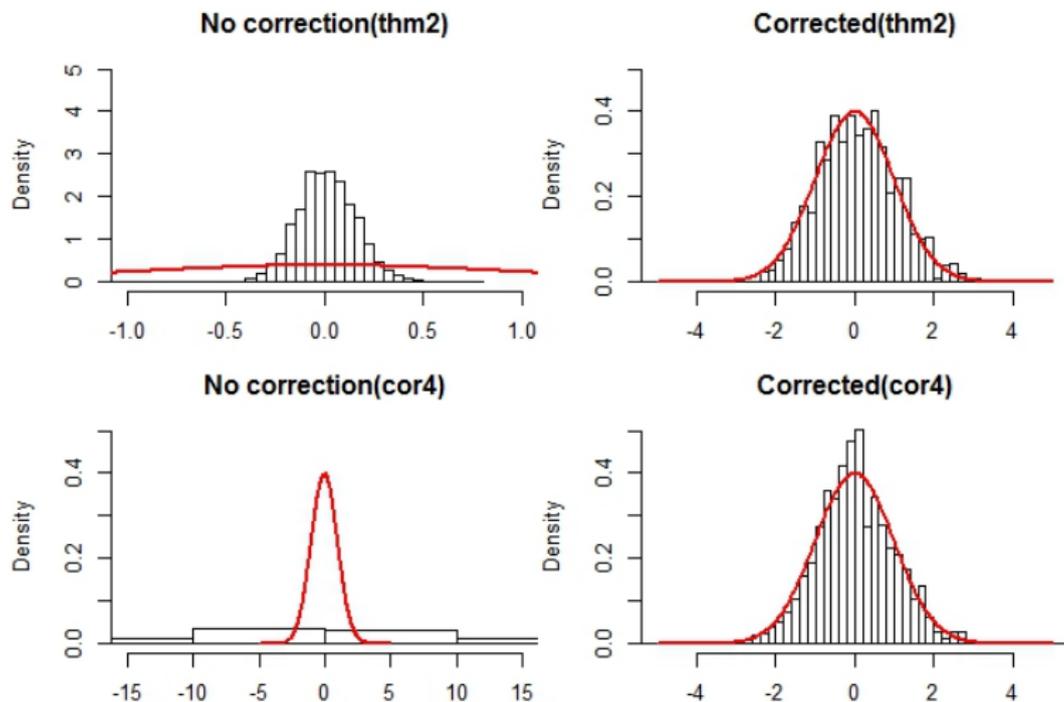


Figure: Effect of noise for CLT (jump)

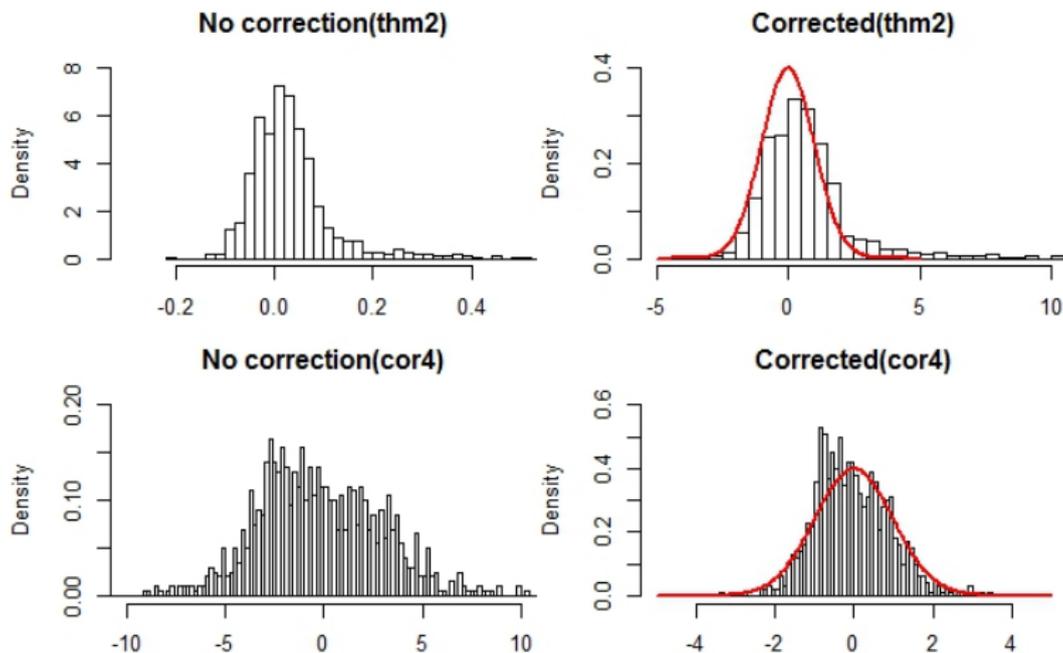
5.2 Theorem 2, Corollary 4 (Case 2)

$\Delta_n = 1/5000$, $c = 10$, シミュレーション回数 1000 回



5.2 Theorem 2, Corollary 4 (Case 3)

$\Delta_n = 1/5000$, $c = 1$, シミュレーション回数 1000 回



5.3 Remarks

- ϵ_0 (large noise), ϵ_2 (type-2 small noise) のケースでは noise が支配的になり, 漸近的な近似は成り立たない.
- Diffusion case では比較的小標本であっても漸近分布の良い近似を与える (Theorem 1).
- Jump を含むケースでは diffusion case と比較してより多くのデータが必要になる (Theorem 2, Corollary 4).
- Jump の頻度に関して, finite activity よりも infinite activity の方がより多くのデータが必要 (Theorem 2, Corollary 4).

6. Conclusion

本研究では、高頻度データ分析における jump と noise の影響を調べるために "small-noise" の設定の下で, realized volatility を含む関数のクラスである $V_n(p, k)$ の漸近的性質を明らかにした.

また数値実験により, 以下のことが確認できた.

- $V_n(p, k)$ を用いた既存の QV の推定や jump の検定法は noise の有無に非常に敏感である.
- 今回導出した漸近的性質は比較的小標本であっても漸近分布の良い近似を与える.

今後の課題としては, Bipower variation, Joint jump test に対する影響 etc.

References

- Ait-Saharia, Y. and Jacod, J. (2009), Testing for Jumps in a Discretely Observed Process, *Annals of Statistics*, 37-1, 184-222.
- Jacod, J. and Protter, P. (2012), *Discretization of Processes*, Springer.
- Kunitomo, N. and Kurisu, D. (2015), On Effects of Jump and Noise in High-Frequency Financial Econometrics, Discussion Paper CIRJE-F-996, Graduate School of Econometrics, University of Tokyo.

Intensity and G-Causality in Financial Econometrics : an empirical analysis

江原 斐夫

東京大学経済学研究科経済理論専攻統計学コース

2015年12月18日

※この報告は東京大学経済学研究科の国友直人教授・栗栖大輔氏との共同研究に基づくものである。

はじめに (1)

2008年のリーマンショックに代表されるような大規模な金融危機に対するリスク管理手法の研究が多くなされており、稀にしか起きない金融危機をどのようにモデル化および分析するかということに注目が集まる。

金融危機時における市場の顕著な特徴は、

1. 急激かつ大幅な資産価格の下落（以降ではジャンプと呼ぶ）
2. そのようなジャンプがもたらす同じ市場もしくは市場間における下落の連鎖および伝播

の2つである。言い換えれば、稀にしか起きないような大幅な資産価格の下落を rare event として捉え、それをジャンプと呼んでいるのである。

今回の発表では、この2つの論点を取り込むことのできるモデルとして、確率過程のクラスの一つである点過程 (point process) モデルを提案しそれを用いた実証分析を行う。

はじめに (2)

点過程モデルにおいて最も単純なモデルはポアソン過程であり、その概念を拡張したものとして Self-Exciting Model や Mutually-Exciting Model がある。

それらのモデルは地震の予測などに用いられ、先ほどの金融危機時における特徴をうまく取り込むことができる可能性があると考えられる。

ここでは、点過程モデルを用いた予測や市場間の因果関係の分析を紹介する。

今回の発表は大きく4つに分かれる。

1. 点過程モデルおよびデータセットの説明
2. モデルのフィット
3. 条件付き確率を基準にした Causality Analysis
4. 日米欧市場における将来の「ジャンプ (rare event)」の予測

1次元の点過程の紹介 Hawkes Process

まず、1次元の場合の点過程の例として1次元の Hawkes Process 説明をする。

$$P(N(t + \Delta) - N(t) = 1 | \mathcal{F}_t) = \lambda(t)\Delta + o(\Delta)$$

$$P(N(t + \Delta) - N(t) > 1 | \mathcal{F}_t) = o(\Delta)$$

ここで λ, α, β は定数とし、 $\lambda(t)$ を以下のように定める。

$$\lambda(t) = \lambda + \int_0^t \alpha e^{-\beta(t-s)} dN(s)$$

さらに、 $\lambda(t) \equiv \lambda(t | \mathcal{F}_t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} E[\frac{N(t+\Delta) - N(t)}{\Delta} | \mathcal{F}_t]$ より、過去のジャンプの回数が次のジャンプが起きる確率に影響を与えていることがわかる。

多次元の点過程の定義

市場 m において、時刻 t までのジャンプの累積回数を図る確率過程である点過程 $N_m(t)$ ($m = 1, 2, 3$) を各 m について以下のように定義する。

$$P(N_m(t + \Delta) - N_m(t) = 1 | \mathcal{F}_t) = \lambda_m(t)\Delta + o(\Delta)$$

$$P(N_m(t + \Delta) - N_m(t) > 1 | \mathcal{F}_t) = o(\Delta)$$

ここで

$$\lambda_m(t) = \lambda_m + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \alpha_{m,i} C_{m,i}(X_i) e^{-\beta(t-s)} dN_i(s)$$

ここで、 λ_m 、 $\alpha_{m,i}$ 、 β は定数であり、 $C_{m,i}(\cdot)$ はリターンの関数でありインパクト関数と呼ばれる。

例えば $C_{m,i} = 1$ とすると多次元の Hawkes Process となる。

多次元点過程の尤度関数の定義

1次元の場合の analogy として、多次元の点過程の対数尤度関数を以下で与える。

$$L_T(\theta) = \sum_{m=1}^3 \left\{ - \int_0^T \lambda_m(t) dt + \int_0^T \log \lambda_m(t) dN_m(t) \right\}$$

θ はパラメーターのベクトルで、 T は観測されたデータにおける最後の時刻を表す。

計数過程 $N_m(t)$ による確率積分は、任意の有限な T に対し、区間 $[0, T]$ において有界変動であることからルベグ・スティルチェス積分として計算できる。実際には「ジャンプ」が起きた時刻で足し合わせることになる。

多次元点過程における最尤法

多次元点過程におけるパラメーター推定は最尤法が基本である。1次元の場合に関しては Ogata(1978) に MLE の一致性や漸近的性質の証明があり、通常の漸近理論が適用できる。

しかし、多次元の場合には一般的にそれらを示したものはない。

今回の分析で用いるモデルにおいては、MLE の一致性は成立し、さらにある条件を課すことで尤度比検定などの漸近理論が成立する。

具体的には多次元における Ogata(1978) の正則条件を仮定し、十分小さな Δ に対して以下を仮定する ($m_1 \neq m_2$)。

$$E[(N_{m_1}(t + \Delta) - N_{m_1}(t))(N_{m_2}(t + \Delta) - N_{m_2}(t)) | \mathcal{F}_t] = E[(N_{m_1}(t + \Delta) - N_{m_1}(t)) | \mathcal{F}_t] \cdot E[(N_{m_2}(t + \Delta) - N_{m_2}(t)) | \mathcal{F}_t]$$

多次元点過程における漸近論

以下に多次元点過程の推定で必要となる定理を3つ掲げる。

定理1 最尤推定量の一致性

最尤推定量 $\hat{\theta}_T$ は $T \rightarrow \infty$ としたとき θ_0 に確率収束する。

定理2 中心極限定理

$L_T(\theta_0)$ を真のパラメーター θ_0 で評価した対数尤度関数とすると $\frac{1}{\sqrt{T}} \times \frac{\partial L_T(\theta_0)}{\partial \theta}$ は $N(0, E[\Delta(0,1)\Delta(0,1)'])$ に分布収束する。

なお、

$\Delta(0,1) \equiv -\sum_{m=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \lambda_m(t)}{\partial \theta} dt + \sum_{m=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \lambda_m(t)}{\partial \theta} \frac{1}{\lambda_m(t)} dN_{m,t}$
である。

定理 3 最尤推定量の漸近分布と尤度比

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0) \rightarrow N(0, B^{-1}AB^{-1})$$

なお $A = E[\Delta(0, 1)\Delta(0, 1)']$, $B = E[\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}]$ である。

また、先ほどの条件

$$E[(N_{m_1}(t + \Delta) - N_{m_1}(t))(N_{m_2}(t + \Delta) - N_{m_2}(t)) | \mathcal{F}_t] = \\ E[(N_{m_1}(t + \Delta) - N_{m_1}(t)) | \mathcal{F}_t] \cdot E[(N_{m_2}(t + \Delta) - N_{m_2}(t)) | \mathcal{F}_t]$$

は $A = B$ となる十分条件の一つであり、このもとで通常 of 尤度比検定が適用できる。

Model Fitting

前述の3つの株式指標におけるジャンプの構造を多次元点過程モデルによってモデル化し、AIC基準によってモデル選択を行う。モデルデザインは $\lambda_m(t)$ の形を考えることによってできる。

具体的には3次元モデルを考え、幾つかのインパクト関数の候補から選択を行う。

次元数はモデルに組み込む市場の数に対応する。以下の Intensity は上から順に1次元、2次元、3次元の場合を考えている。

$$\lambda_m(t) = \lambda_m + \int_0^t \alpha_m C_m(\tilde{X}_m) e^{-\beta(t-s)} dN_m(s)$$

$$\lambda_m(t) = \lambda_m + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \alpha_{m,i} C_{m,i}(X_i) e^{-\beta(t-s)} dN_i(s)$$

$$\lambda_m(t) = \lambda_m + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \alpha_{m,i} C_{m,i}(X_i) e^{-\beta(t-s)} dN_i(s)$$

インパクト関数の候補として、

$C_{m,i}(X) = 1, X, X^{c_{m,i}}$ ($0 < c_{m,i} < 1$) の3つのケースを考えることとする。なお、 X はジャンプサイズである。

AIC 基準によって最適なモデルを選択した後に、そのモデルを用いて Causality Analysis および条件付き確率による予測の精度を考えることとする。

データセットの説明

日本、米国、英国の3つの金融市場において、それぞれを代表するような株式指標を考える。

具体的には、日経225、S & P500、FTSE100の3指標である。各指標について daily return を考え、今回は、negative return を分析対象とする。

ある閾値を各指標の negative daily return に対して設定する。市場 m において、閾値を超えたことを市場 m における「ジャンプ」と定義し、その日付と negative daily return を分析に用いるデータとする。

以下では、日本を市場1、米国を市場2、英国を市場3と呼ぶことにする。

データセットの説明

分析データとして、前述の3指標について1990年1月2日から2015年8月26日までの6691日分のdaily dataを用いる(Yahoo Financeより取得)。

t日目でのdaily returnの定義を以下のようにする。

$$\frac{(\text{t日目の終値}) - (\text{t日目の始値})}{(\text{t日目の始値})}$$

なお、他の市場は開いているが、ある市場は開いていない日がある場合、その日の当該市場でのdaily returnは0として考える。

また、時差の影響は考慮せず、同じ日付であれば各市場とも同時に取引を行っているものとする。

閾値の設定

閾値の設定に際して、前述の通り negative return を用いて考える。市場が「荒れている」状況を適切に捉えるような閾値を設定したい。

return の変動の大きさによって「荒れている」状態を捉えることとし、negative return の絶対値を考える。

今回の分析においては、各市場とも閾値は 0.02 に設定し、それぞれの市場において negative daily return がこの閾値より小さい場合に「ジャンプ」が発生したと考えることとする。

それぞれの市場でのジャンプは、日本では 326 回、米国では 218 回、英国では 212 回あり、3 市場の同時のジャンプは 13 回であった。

最尤推定の結果

1次元で $C_{m,i}(X) = 1$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α	β	λ
日本	-1223.977	2453.954	0.03436384	0.05138892	0.01620106
米国	-841.0083	1688.0166	0.026352273	0.032767337	0.006454535
英国	-822.963	1651.926	0.035424863	0.046252389	0.007467518

1次元で $C_{m,i}(X) = X$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α	β	λ
日本	-1221.312	2448.624	1.12737806	0.05197126	0.01736689
米国	-839.9651	1685.9302	0.851603473	0.032506289	0.007314026
英国	-822.9651	1651.9302	1.21743874	0.048733979	0.008416301

1次元で $C_{m,i}(X) = X^{C_{m,i}}$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α	β	λ	
日本	-1221.033	2450.066	0.5457783	0.05192993	0.01695144	0.78733141
米国	-839.4549	1686.9098	0.27214672	0.032683782	0.006920712	0.665727874
英国	-822.2781	1652.5562	0.237772734	0.047789561	0.007911337	0.532541432

2次元で $C_{m,i}(X) = 1$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}	β	λ_1	λ_2
日米	-2106.612	4227.224	0.032491667	0.008489694	0.013958546	0.018329762	0.051481148	0.012679105	0.007798501
日英	-2090.862	4195.724	0.034955319	0.008049622	0.016041366	0.017771423	0.056426344	0.014085228	0.007878567
米英	-1648.446	3310.892	0.023645859	0.017171343	0.017393812	0.024254896	0.051492015	0.007116251	0.005814737

最尤推定の結果

2次元で $C_{m,i}(X) = X^{c_{m,i}}$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	β	α_{12}	α_{21}	α_{22}	λ_1	λ_2	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$
日米	-2058.485	4138.97	0.2804018	0.04495949	0.2153843	0.00000002812282	0.3037283	0.01311897	0.008039725	0.6455516	0.9927791	0.9886552	0.6189034
日英	-2042.336	4106.672	0.1261768	0.04982152	0.005788145	0.00000001525655	0.04439157	0.01415417	0.007715713	0.3897289	0.0000001881301	0.3475653	0.04771773
米英	-1650.345	3322.69	0.06841466	0.05009657	0.01789549	0.02023358	0.02181179	0.007162941	0.00579299	0.2234785	0.000002482735	0.0000009428906	0.000000295011

2次元で $C_{m,i}(X) = X$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}	β	λ_1	λ_2
日米	-2059.784	4133.568	0.9191201	0.2011328	0.000002090301	1.095524	0.4356791	0.01374505	0.008380763
日英	-2041.338	4096.676	1.113517	0.2181885	0.000000235527	1.332249	0.05407480	0.01531142	0.008750348
米英	-1649.065	3312.13	0.717090219	0.622531484	0.665100128	0.702675068	0.051970838	0.008115698	0.006741501

最尤推定の結果

3次元で $C_{m,i}(X) = 1$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{21}	α_{22}	α_{23}
日米英	-2873.707	5773.414	0.03494467	0.00997911	0.000695051	0.000000003391512	0.02517662	0.01931174
	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β	λ_1	λ_2	λ_3	
	0.000000006613519	0.02307102	0.02309372	0.05638844	0.01261261	0.007471421	0.00565408	

3次元で $C_{m,i}(X) = X$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{21}	α_{22}	α_{23}
日米英	-2872.637	5771.274	1.12534	0.3010446	0.001314446	0.0000007845216	0.7543096	0.682119
	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β	λ_1	λ_2	λ_3	
	0.0000001558291	0.7669669	0.7212312	0.05600671	0.01465875	0.008345238	0.006557638	

3次元で $C_{m,i}(X) = X^{C_{m,i}}$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{21}	α_{22}	α_{23}
日米英	-2869.357	5782.714	0.1215351	0.2915931	0.04147686	4.27682E-08	0.1148787	0.2305131
	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β	λ_1	λ_2	λ_3	$c_{1,1}$
	2.50647E-06	0.246322	0.02160597	0.05632616	0.01336187	0.007837616	0.005915225	0.3568761
	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$c_{2,3}$	$c_{3,1}$	$c_{3,2}$	$c_{3,3}$
	0.9853837	0.9999954	0.9769868	0.4432387	0.692316	0.9999983	0.6511724	0.007946657

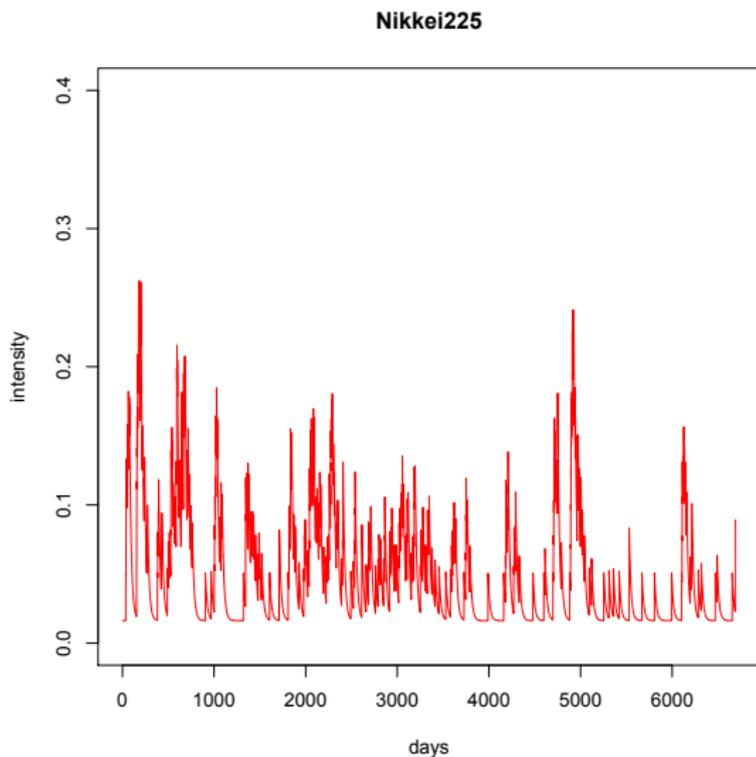


Figure : 1次元で $C_{m,i}(X) = 1$ の場合

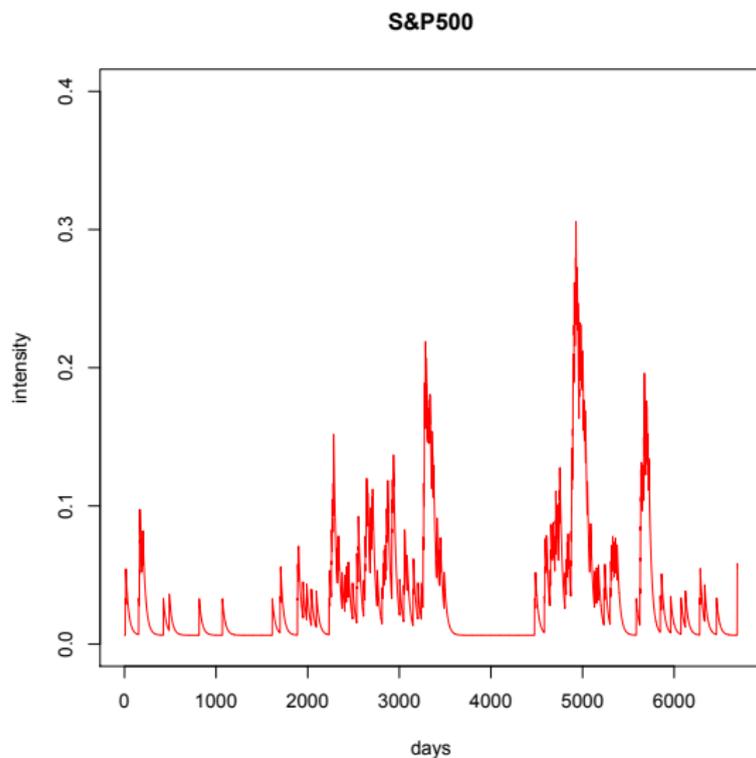


Figure : 1次元で $C_{m,i}(X) = 1$ の場合

モデル選択

先ほどの推定結果から AIC 基準で比較した場合、 $C_{m,i}(X) = X$ が最も良いことになる。

複雑な impact function を適用する場合と、単純なモデルを適用する場合とで、モデルとしての良さは変わらないことが示唆される。なお、1次元や2次元の場合についてもこの事実が示唆される。

また、 $\alpha_{2,1}$ 及び $\alpha_{3,1}$ は0にかなり近く、日本市場のジャンプが欧米市場へのジャンプに与える影響がないことが示唆されている。

先ほど行った推定において、日本市場でのジャンプが欧米市場でのジャンプのメカニズムに影響を与えないことが示唆された。

そこで、時刻 $[0, T]$ までのデータが与えられたときの欧米市場において、将来初めてジャンプが起きる条件付き予測確率を基準にして、causality analysis を考える。

連続時間における Causality を考えた、Florens J.P. and D. Fougere(1996) にならって (ラフな) 定式化を考える。

τ_m ($m = 2, 3$) を系列 m において時刻 T 以降に初めてジャンプが起きる時刻であるとする。

また、 $\mathcal{F}_{t,(i,j)}$ によって、時刻 t までの市場 i および市場 j の情報を表すこととする。

日本市場のジャンプの情報が、欧米市場におけるジャンプの条件付き予測確率に影響を及ぼさないことを次のように定式化する。

$$P(\tau_m \geq T | \mathcal{F}_t) = \exp\left(-\int_t^T \lambda_m(s | \mathcal{F}_t) ds\right)$$

$$P(\tau_m \geq T | \mathcal{F}_t) = E[1_{[\tau_m \geq T]} | \mathcal{F}_t]$$

となることから、

$$P(\tau_m \geq T | \mathcal{F}_{t,(1,2,3)}) = P(\tau_m \geq T | \mathcal{F}_{t,(2,3)})$$

は

$$E[1_{[\tau_m \geq T]} | \mathcal{F}_{t,(1,2,3)}] = E[1_{[\tau_m \geq T]} | \mathcal{F}_{t,(2,3)}]$$

を考えればよく、この等式を満たす必要十分条件は $\alpha_{m,1} = 0$ であると考えられる。次にこの条件を尤度比を用いて検定しよう。

帰無仮説: $\alpha_{2,1} = 0$ $\alpha_{3,1} = 0$ を尤度比検定で検定する。

次のスライドの計算結果により、検定統計量は $2 \times (2872.632 - 2872.637) \simeq 0$ であり、自由度 2 のカイ二乗分布の上側 95 パーセント点は 10.5966 だから帰無仮説は棄却されない。

したがって、日本市場のジャンプの影響が欧米市場のジャンプに影響を与えないことが考えられる。

制約のもとでの最尤推定の結果

3次元で $C_{m,i}(X) = X$ かつ帰無仮説: $\alpha_{1,2} = 0$ $\alpha_{1,3} = 0$ のもとでの最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{21}	α_{22}	α_{23}
日米英	-2877.519	5777.038	1.179661	null	null	6.11759E-08	0.7755849	0.6434333
	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β	λ_1	λ_2	λ_3	
	5.85979E-08	0.7448034	0.7136607	0.05474386	0.01768599	0.008138487	0.006595461	

3次元で $C_{m,i}(X) = X$ かつ帰無仮説: $\alpha_{2,1} = 0$ $\alpha_{3,1} = 0$ のもとでの最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{21}	α_{22}	α_{23}
日米英	-2872.632	5767.264	1.138196	0.3116197	0.00001283367	null	0.7630126	0.6886259
	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β	λ_1	λ_2	λ_3	
	null	0.7730794	0.7282002	0.05653087	0.0144764	0.008366399	0.006657181	

条件付き予測確率

最尤推定量と直前までのデータセットを用いて、各系列において将来ジャンプが起きる確率を求めることができる。

つまり時刻 0 から T までのデータとそれに基づく最尤推定量が得られたとき、 $(T, T']$ の間に初めてジャンプが起きる条件付き確率を各系列ごとに求めることができる。

点過程モデルを用いた条件付き確率の応用として、損失額を任意に固定したときにその額を上回るようなイベントがいつ起きるか、というような予測を考えることができる。

計数過程 N_m の \mathcal{F}_t のもとでの条件付き確率を考えよう。時間間隔 $[T, T']$ での計数過程 N_m の first arrival time τ の分布は

$Pr(\tau \geq T' | \mathcal{F}_T) = \exp(-\int_T^{T'} \lambda_m(t | \mathcal{F}_T) dt)$ である。

条件付き予測確率

(続き)

したがって、 $(T, T']$ の間に初めてジャンプが起きる条件付き確率は

$$Pr(\tau \leq T' | \mathcal{F}_T) = 1 - \exp\left(-\int_T^{T'} \lambda_m(t | \mathcal{F}_T) dt\right)$$

となる。

それでは以下の3つの時期において、その100日後までに初めてジャンプが起きる確率を計算し、モデルの予測力を確認してみよう。

1. 市場が安定している時期 (2005年8月31日)
2. 市場が荒れている時期 (2015年8月26日)
3. リーマンショック直前 (2008年9月12日)

条件付き予測確率

(続き)

計算に用いる Intensity について、impact function は $C(X) = X$ を使い、3次元、2次元、1次元の3つのモデルを考える。

米国市場、英国市場に関しては、以下のようにプロットする。

1. 日米英の3市場 (赤)
2. 米英の2市場 (青)
3. 米もしくは英の1市場 (緑)

日本市場に関しては、以下のようにプロットする。

1. 日米英の3市場 (赤)
2. 日米の2市場 (青)
3. 日英の2市場 (青)
4. 日の1市場 (緑)

日本市場 安定時 (閾値2%)

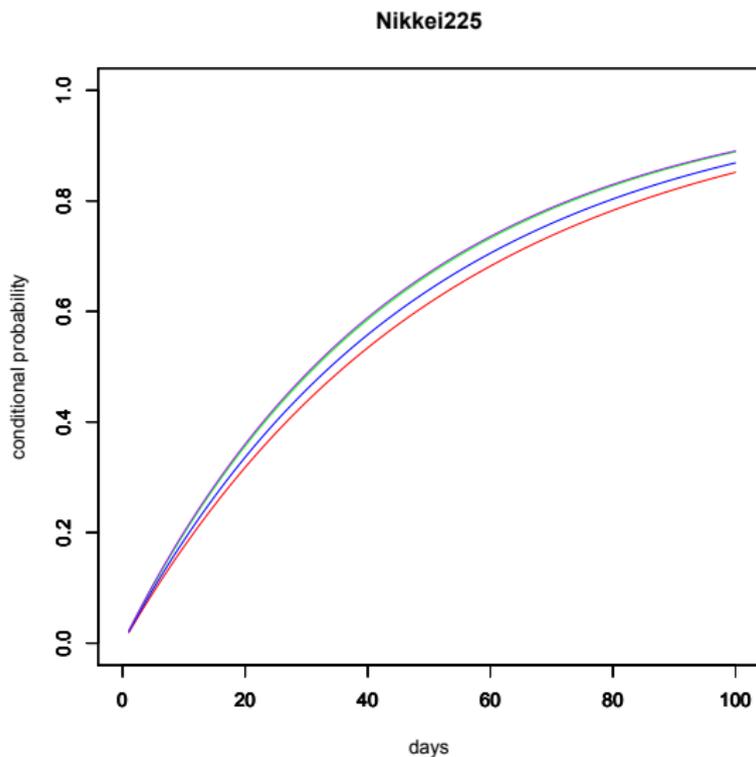


Figure : 2005 年 12 月 14 日にジャンプが起きる (75 日後)

日本市場 動揺時 (閾値2%)

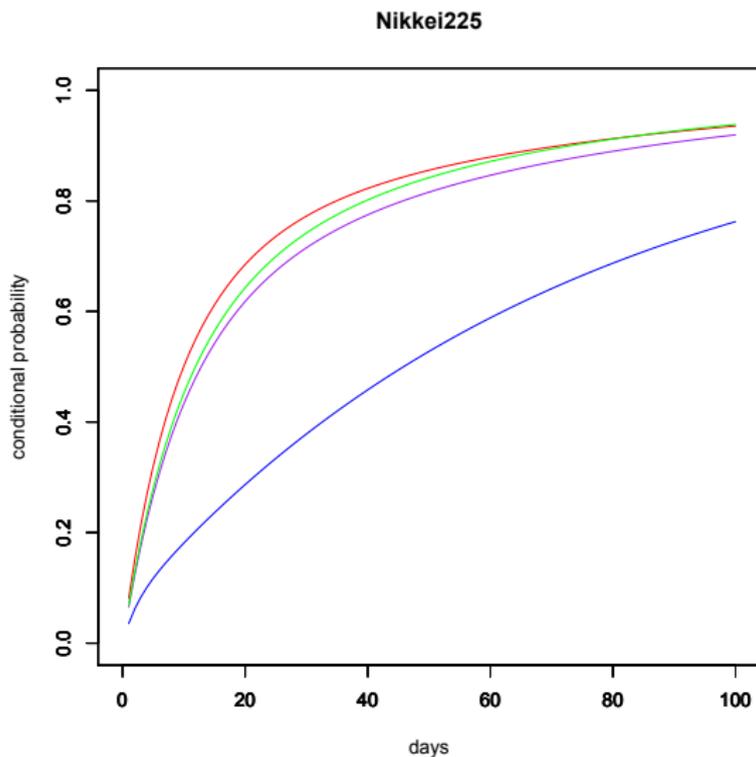


Figure : 2015年9月1日にジャンプが起きる(4日後)

日本市場 リーマンショック直前 (閾値2%)

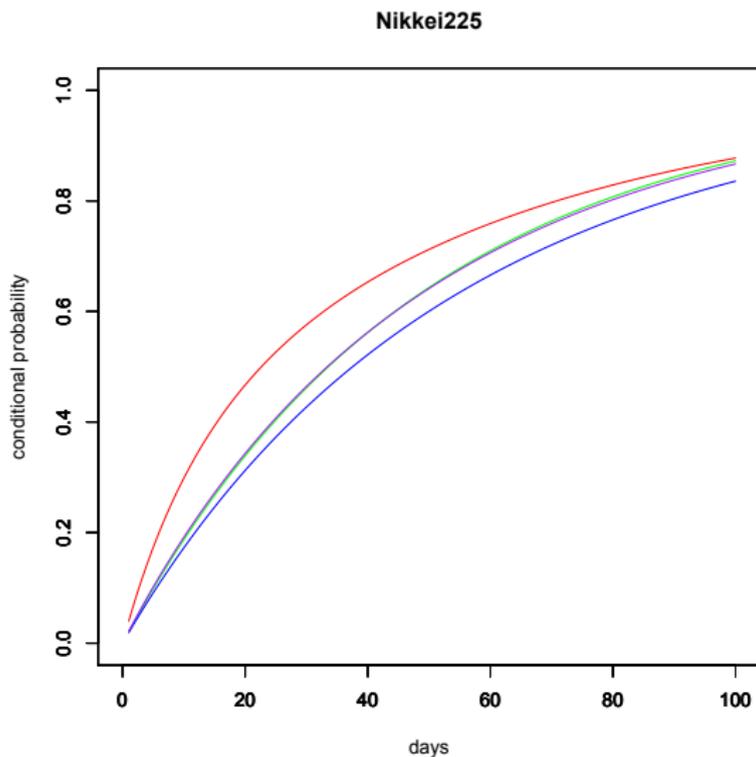


Figure : 2015年9月16日にジャンプが起きる(2日後)

米国市場 安定時 (閾値 2%)

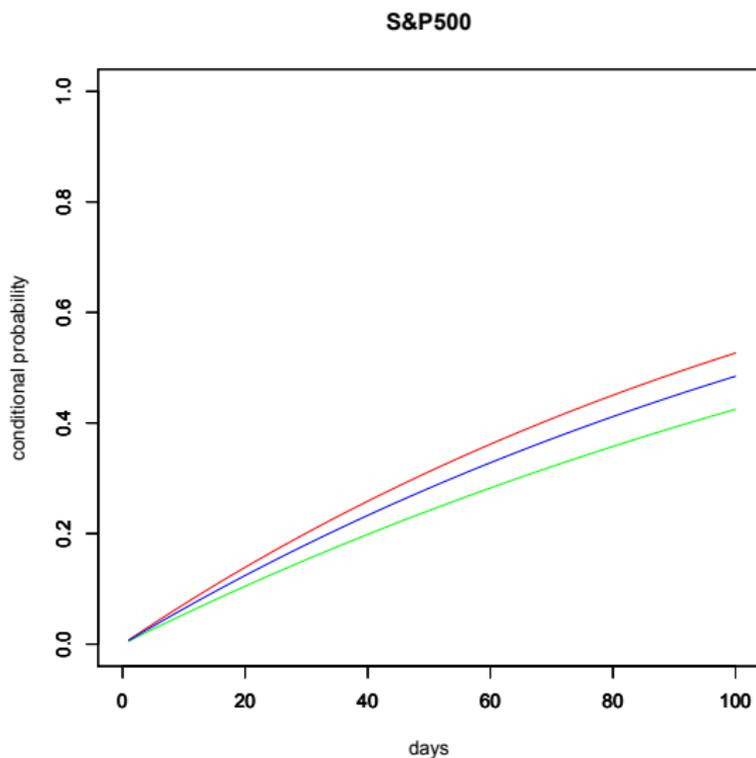


Figure : この期間にジャンプは発生しなかった

米国市場 動揺時 (閾値 2%)

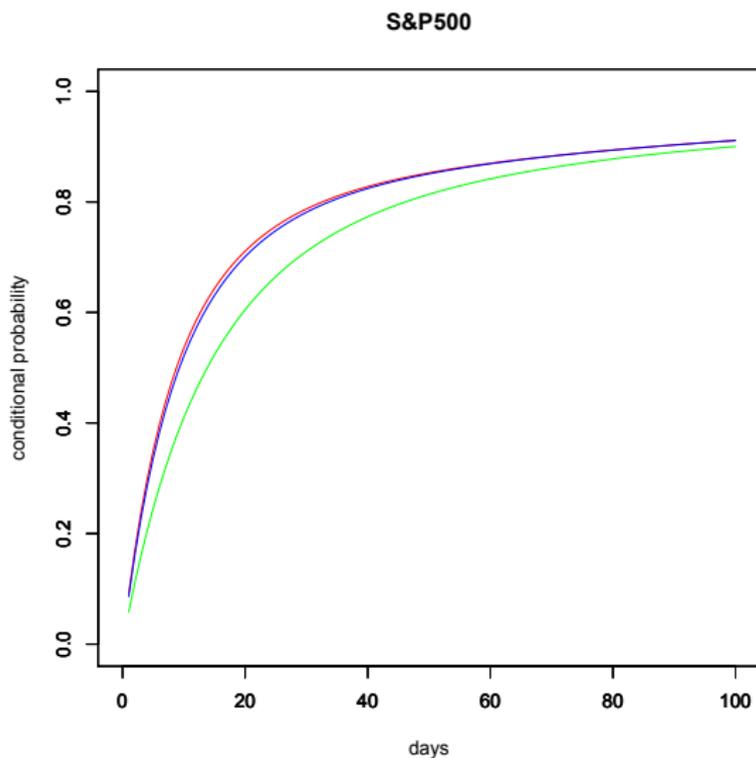


Figure : 2015 年 9 月 1 日にジャンプが起きる (4 日後)

米国市場 リーマンショック直前 (閾値2%)

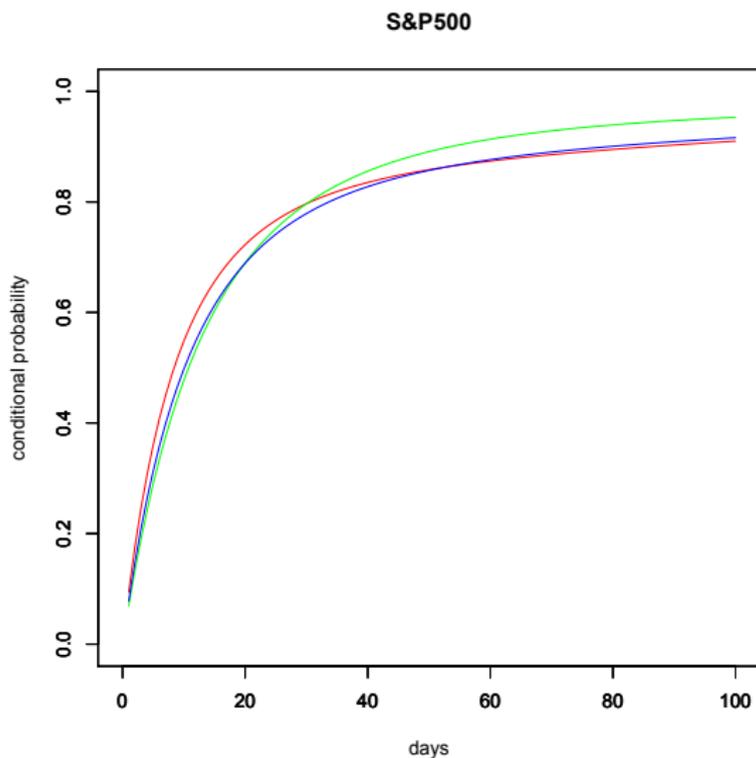


Figure : 2015年9月15日にジャンプが起きる (1日後)

英国市場 安定時 (閾値2%)

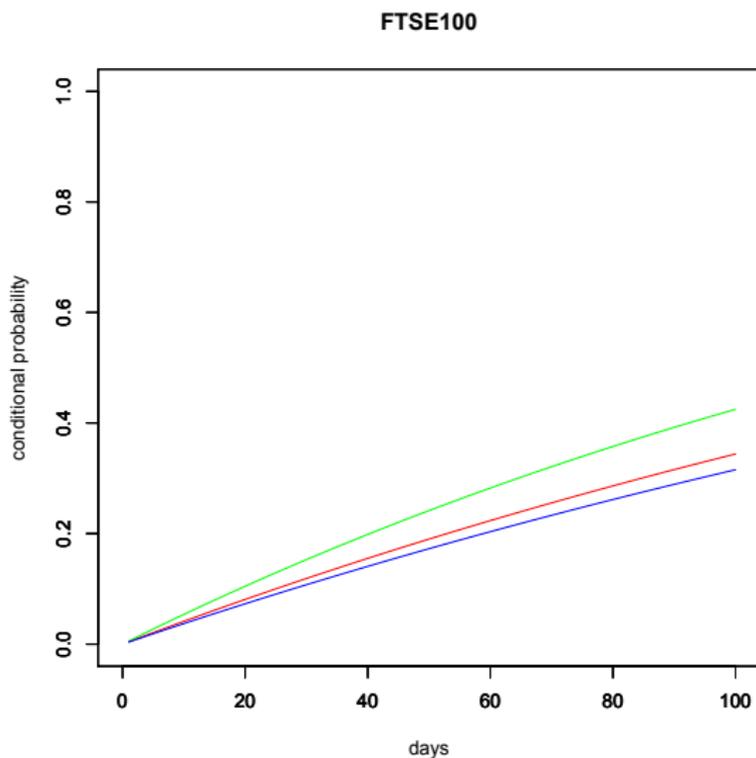


Figure : この期間にジャンプは発生しなかった

英国市場 動揺時 (閾値2%)

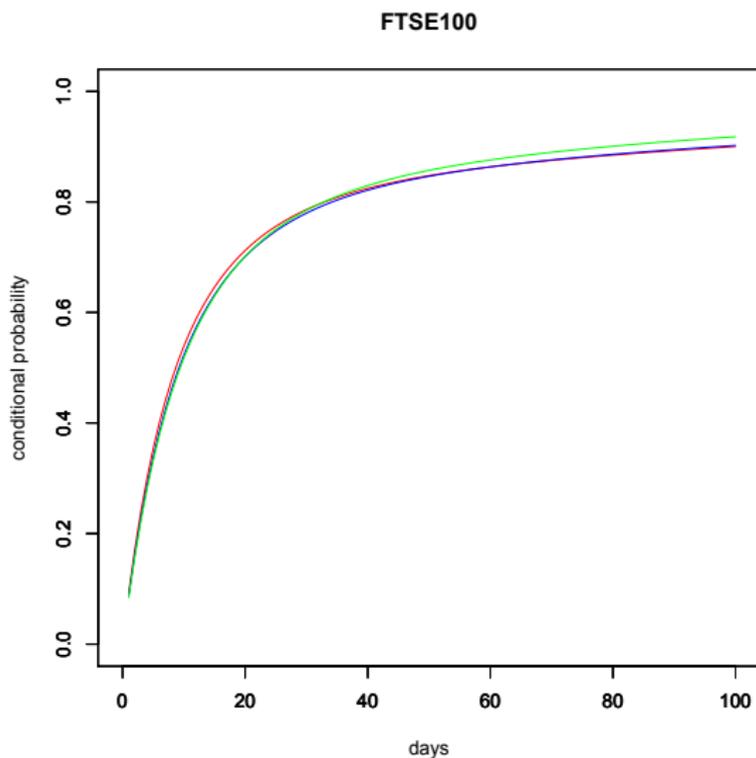


Figure : 2015年9月1日にジャンプが起きる(4日後)

英国市場 リーマンショック直前 (閾値2%)

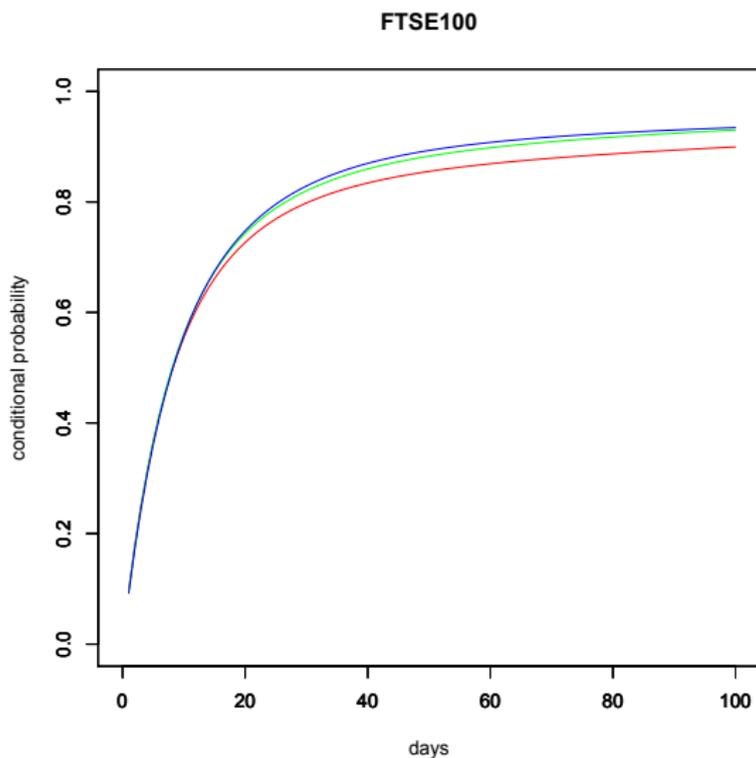


Figure : 2015年9月15日にジャンプが起きる(1日後)

閾値の決定について

閾値を2%とすると、市場が荒れている時期と安定している時期とで条件付き確率の挙動が大きく違うことがわかった。

しかし、大規模な金融危機と市場動揺時とがあまり区別されていないようにも見える。その上、日本市場は他の2市場に比べてvolatileなので閾値の設定が低いようにも見えるかもしれない。

そこで閾値を3%に設定し、先ほどと同じ時期に同じモデルを適用してみる。

なお、閾値3%を超えるデータは少ないため1987年のブラックマンデーのデータを取り込んで係数の推定を行う。

日本市場 安定時 (閾値3%)

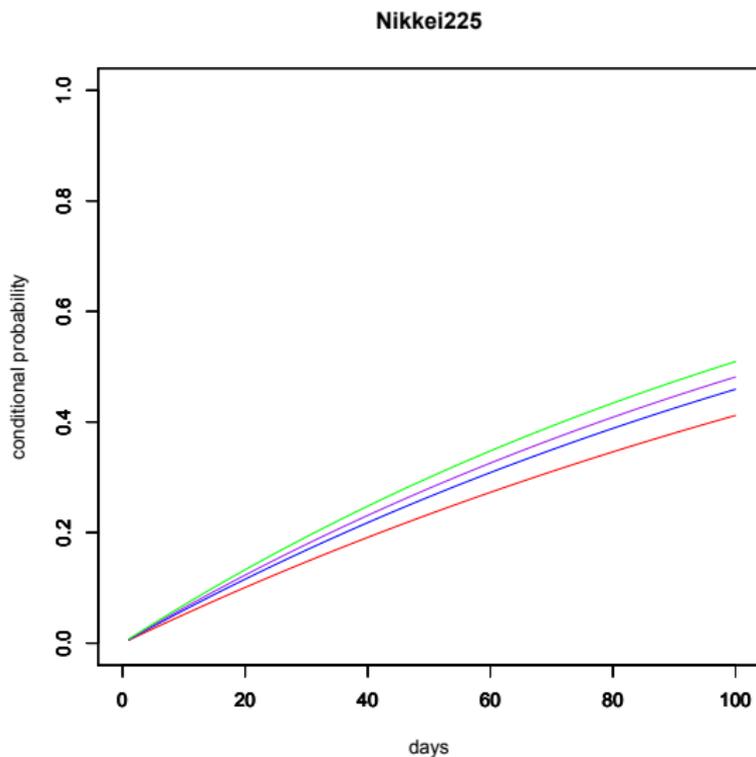


Figure : この期間にジャンプは発生しなかった

日本市場 動揺時 (閾値3%)

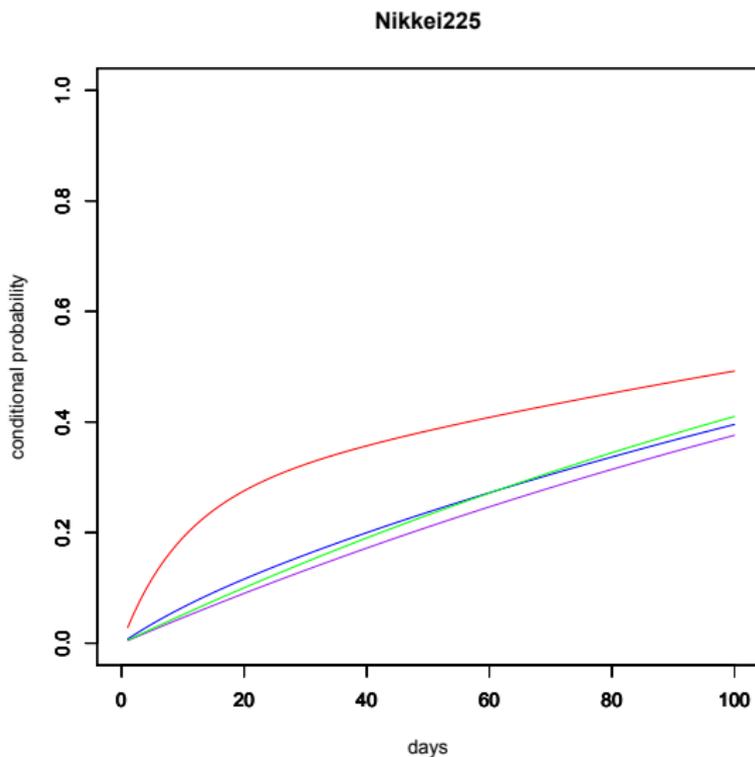


Figure : 2015年9月1日にジャンプが起きる(4日後)

日本市場 リーマンショック直前 (閾値3%)

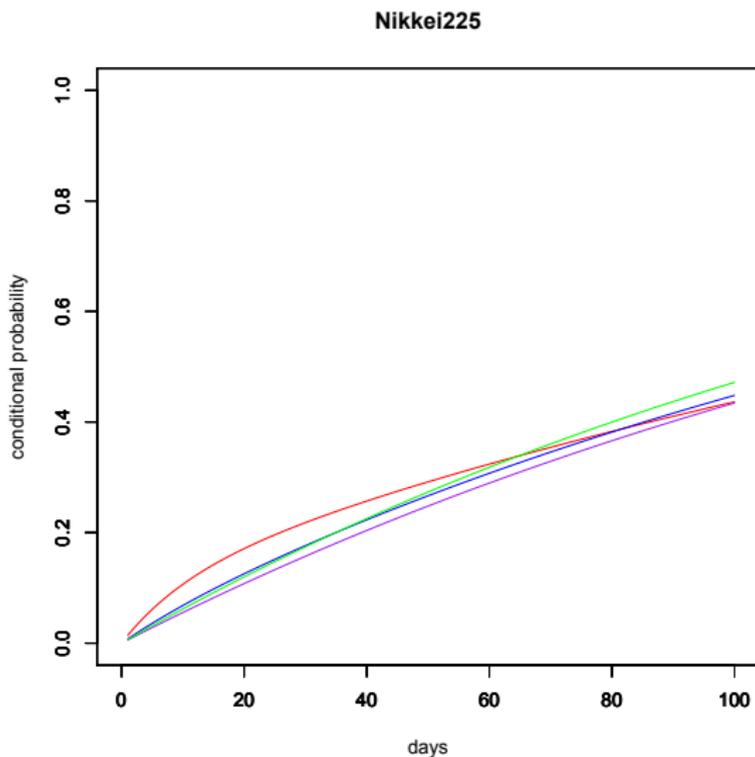


Figure : 2015年9月16日にジャンプが起きる(2日後)

米国市場 安定時 (閾値3%)

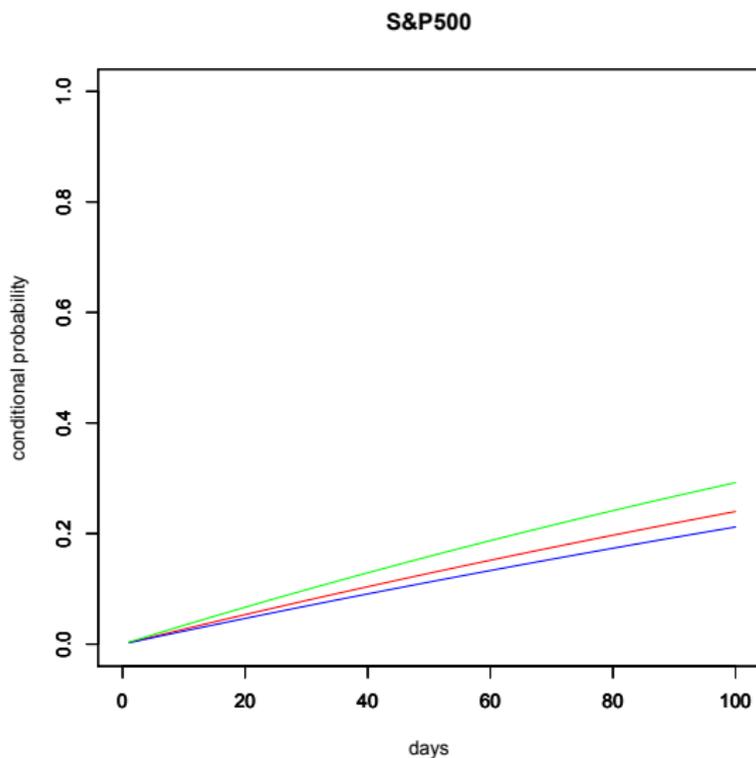


Figure : この期間にジャンプは発生しなかった

米国市場 動揺時 (閾値 3%)

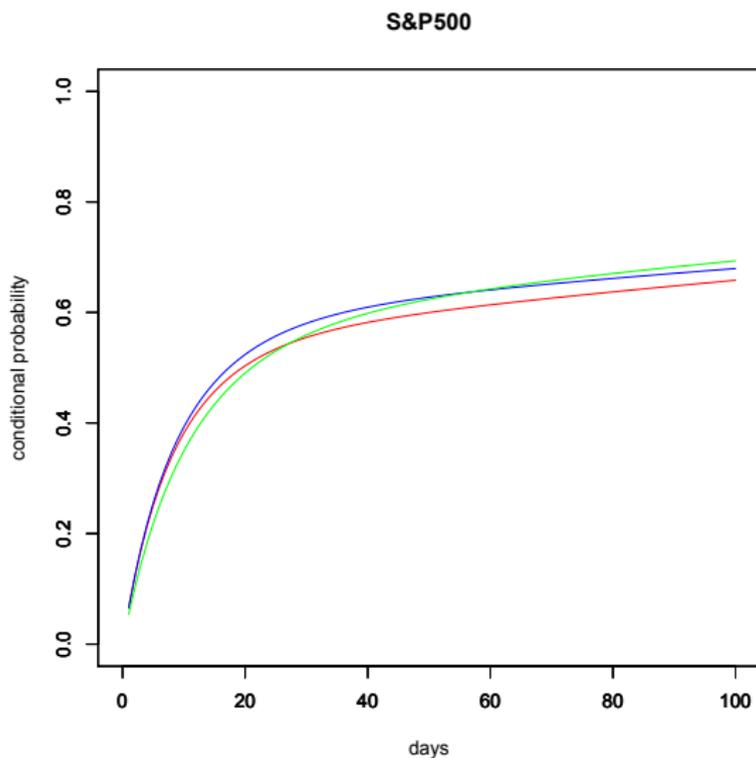


Figure : この期間にジャンプは発生しなかった

米国市場 リーマンショック直前 (閾値3%)

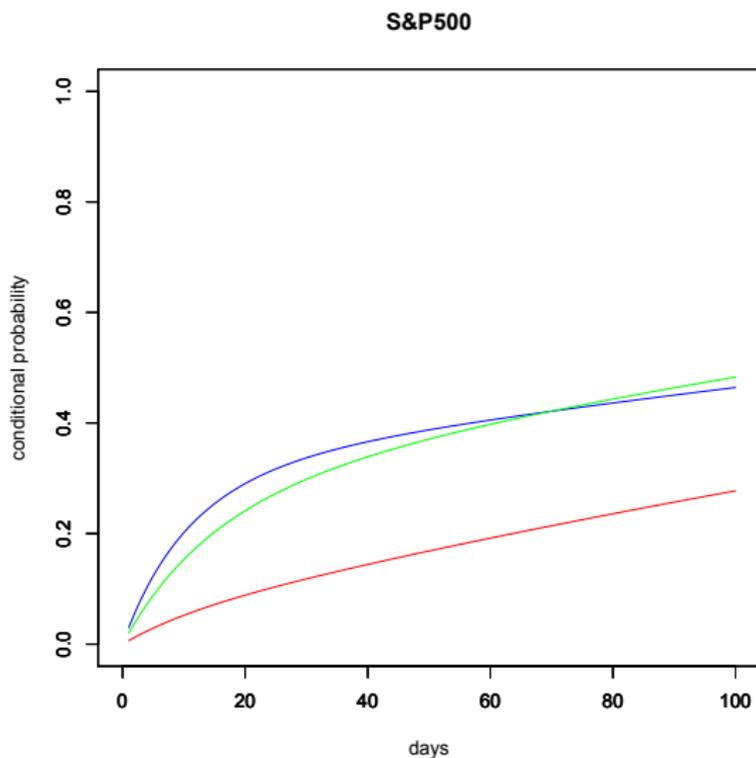


Figure : 2015年9月15日にジャンプが起きる (1日後)

英国市場 安定時 (閾値3%)

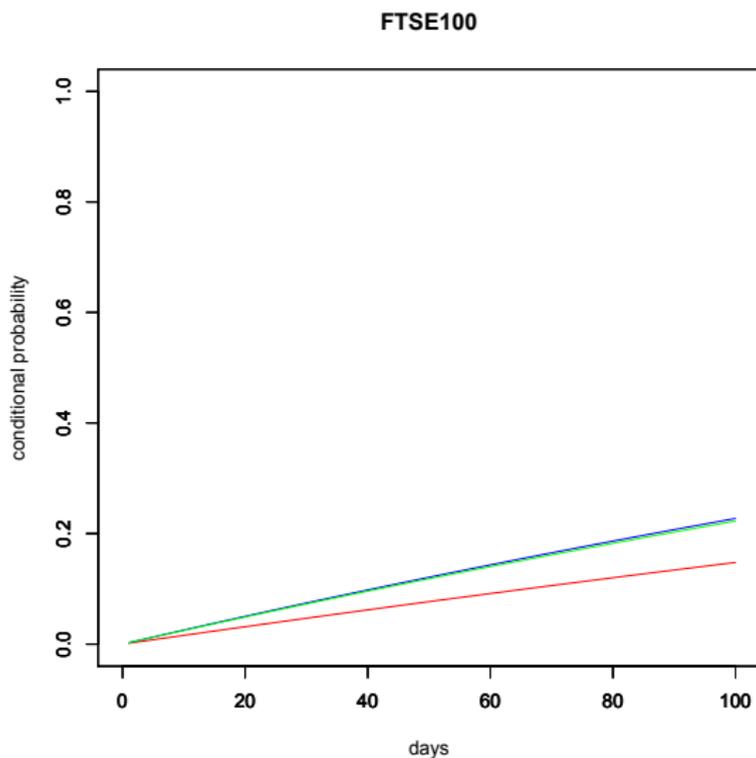


Figure : この期間にジャンプは発生しなかった

英国市場 動揺時 (閾値 3%)

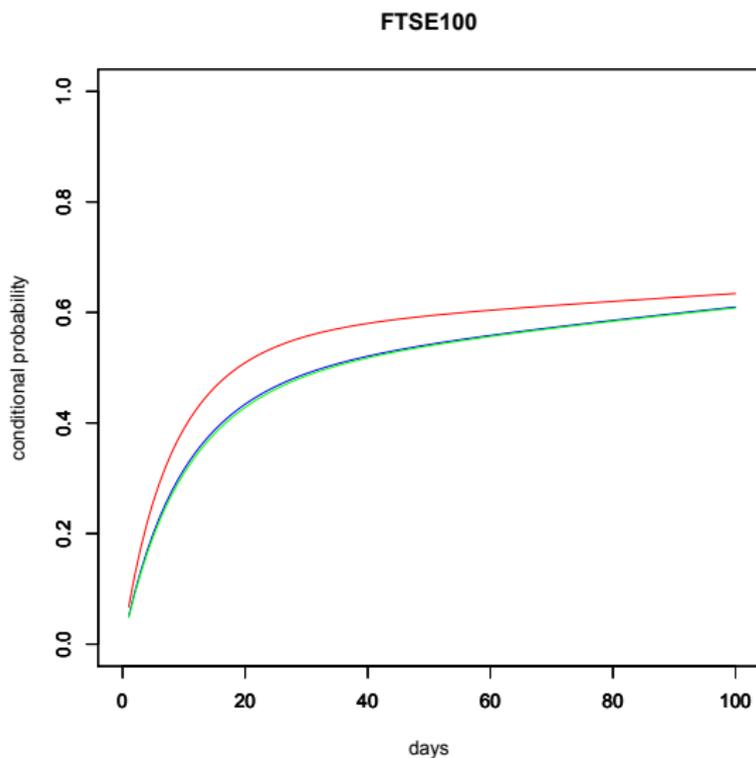


Figure : 2015 年 9 月 1 日にジャンプが起きる (4 日後)

英国市場 リーマンショック直前 (閾値3%)

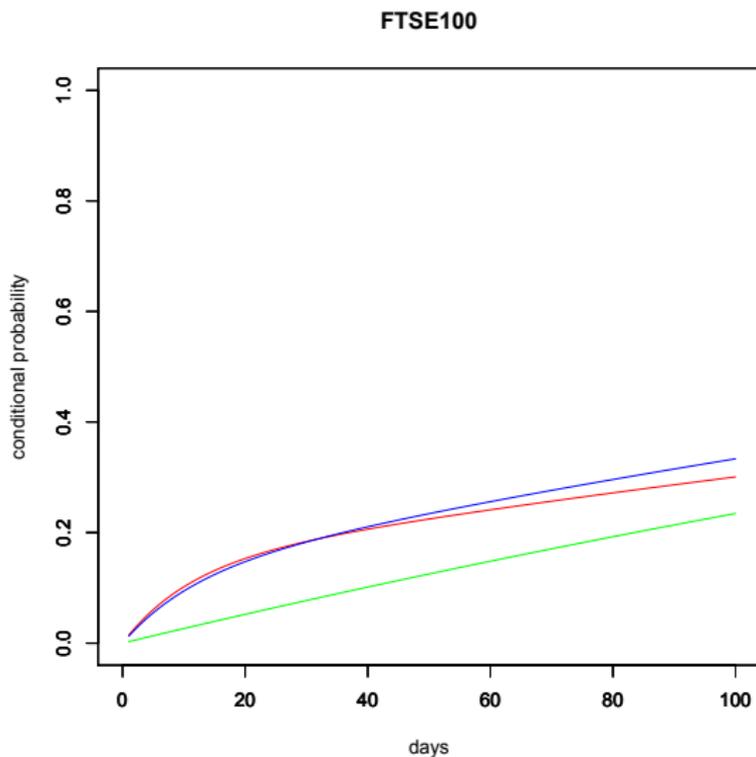


Figure : 2015年9月15日にジャンプが起きる(1日後)

条件付き確率

以上で見たように閾値を3%とすると、そのような閾値を超えるデータが少ないためか2%の場合と比べて予測力は劣る。

閾値が2%の場合には、市場の状況に応じて条件付き確率の挙動が目に見えて変化するため、市場リスク管理の応用に有用であることが示唆される。

特に安定時は λ_m ($m = 1, 2, 3$) の1次関数のような形状となるため (intensity の式と e^x のテーラー展開による)、グラフがそのような形に近いかどうか判断すれば良い。

多次元点過程モデルを用いて

1. Causality Analysis
2. 将来のジャンプの予測

を行った。

(1) に関しては、単純な尤度比検定による手法だけでなく、因果を定量的に把握できる手法を考えることが望まれる。

(2) に関しては、ジャンプの時刻と大きさという情報のみでもある程度の予測ができることがわかった。

intensity のデザインを巧妙に行うことでより良いモデルを考えることが可能であり、定常性などの正則性に気を付けさえすれば柔軟なモデリングが可能だと思われる。

Oliver Grothe, Volodymyr Korniiichik, Hans Manner, 2014
"Modeling multivariate extreme events using self-exciting point processes" Journal of Econometrics 182 269-289

Florens J.P. , D. Fougere ,1996," A Note on Noncausality"
Econometrica vol.50,No.3,583-591

Yacine Ait-Sahalia, Julio Cacho-Diaz, Roger J.A. Laeven, 2015
"Modeling Financial Contagion Using Mutually Exciting Jump Processes" Journal of Financial Econometrics 117 585-606

Yoshihiko Ogata, 1978, "The Asymptotic Behavior of Maximum Likelihood Estimators for Stationary Point Processes", Ann. Inst. Statist. Math. 30, Part A, 243-261

経験類似度に基づくボラティリティ予測

森本孝之 (関西学院大学), 川崎能典 (統計数理研究所)

科学研究費基盤研究 (A)

「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再帰的事象」

東京大学経済学部 小島ホール

2015年12月18日

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.1/29

経験類似度に基づく予測

- y_t を共変量 $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^d)$ で予測する問題
- $(x_i^1, \dots, x_i^d, y_i), i = 1, \dots, n$: シナリオ or データベース
- 共変量の類似度を与える関数 $s(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{++})$ を特定化
- 新たにデータ $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^d)$ が来た時, 類似度に基づいて予測 y_t^s を以下のように構成する

$$y_t^s = \frac{\sum_{i \leq n} s(x_i, x_t) y_i}{\sum_{i \leq n} s(x_i, x_t)}$$

Gilboa, Lieberman, Schmeidler (2011) J Econometrics

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.2/29

- モデルアベレージング, $\exp(-AIC/2)$ による重み付け (Akaike weights)
- 共変量や予測量の近さ (類似度) による重み付けを考えたところ?
- 概念的には Gilboa and Schmeidler (1995) QJE まで遡る
- ボラティリティ予測モデルの比較に流用 Golosnoy-Hamid-Okhrin (2014) J Banking & Finance
- 本報告はとりあえず Golosnoy et al. を日本のデータでなぞってみる

Golosnoy et al. の設定

- \mathcal{H} でモデル集合ないし説明変数・被説明変数の組の集合を表し, $h \in \mathcal{H}$ で特定のモデル等を指す
- $v_t^{(h)}$ と書いて, t 期までの情報に基づきモデル h から得られるボラティリティ予測値を表す
- $t-1$ 時点までの情報に基づいて t 期の予測量を構成するとしよう. v_{t-1} はイントラデイデータを使った RV 推定等で観測が得られたかのように見なす.
- このとき, $t-2$ 時点までの情報で $t-1$ 時点の予測を構成した $v_{t-2}^{(h)}$ が, 実際の v_{t-1} にどれだけ近かったかを測る, 類似度 s の定式化を分析者が与える必要がある.

- $t - 2$ 時点までの情報で $t - 1$ 時点の予測を構成した $v_{t-2}^{(h)}$ が、実際の v_{t-1} にどれだけ近かったかを

$$\theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(h)}] = \exp\left(-w_h(v_{t-1} - v_{t-2}^{(h)})^2\right)$$

と定式化する.

- w_h はデータから推定. v_t に対するモデル (以降便宜上 ES1 と呼ぶ) として考えれば

$$v_t = \frac{\sum_{h \in \mathcal{H}} \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(h)}] v_{t-1}^{(h)}}{\sum_{h \in \mathcal{H}} \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(h)}]} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.5/29

比較したいモデル群

- Heterogeneous Autoregression (HAR) モデル
 - Corsi (2009) J Financial Econometrics
- 経験類似度モデル (ES1)
 - HAR モデルで採用される説明変数の重みを経験類似度で決めるモデル
- 1/3 ルール
 - ES モデルの重み係数部分を恣意的に与えるモデル
- その他線形 AR1 や ARCH/GARCH とその変種も取り上げてみたが、本報告では省略.

- 日次ボラティリティ過程 v_t に対する HAR モデルの典型的定式化

$$v_t = \alpha_0 + \omega_1 v_{t-1}^{(d)} + \omega_2 v_{t-1}^{(w)} + \omega_3 v_{t-1}^{(m)} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

- ここで $v_t^{(w)} = 5^{-1} \sum_{i=1}^5 v_{t-i+1}^{(d)}$,
 $v_t^{(m)} = 22^{-1} \sum_{i=1}^{22} v_{t-i+1}^{(d)}$, 営業日ベースで見た週次と月次ボラティリティ
- v_t は観測不能だが、実際には RV で代用するので、OLS 回帰で推定可能
- ES1 モデルには定数項がないことに注意

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.7/29

1/3ルール (ES0)

- ES1 モデルの各係数を 1/3 で決め打ちする

$$v_t = \frac{1}{3} v_{t-1}^{(d)} + \frac{1}{3} v_{t-1}^{(w)} + \frac{1}{3} v_{t-1}^{(m)} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

- $\theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(d)}] = \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(w)}] = \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(m)}] = 1/3$ となっていることから、これを ES0 と呼ぶ。
- ES1 モデルにおける規格化された重みを長期にわたって観察すると、概ねどの重みも 1/3 に近いという経験則を取り入れた手法
- 何らの推定なしに予測ステップに進める

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.8/29

- 日次ボラティリティ系列 $\{v_t\}$ は観測できないので、高頻度データから推定し、あたかも観測値であるかのごとく扱う。
- ここでは1分間隔でサンプリングされた日次収益率の2乗から

$$RV_t = \sum_{i=1}^{n_t} r_{t,i}^2$$

と計算する。ここで $r_{t,i}$ は第 t 日の i 番目の日次収益率、 n_t はサンプルサイズ。東証のデータを使うので、夜間や昼休みの影響も考慮して加重平均。

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.9/29

データ

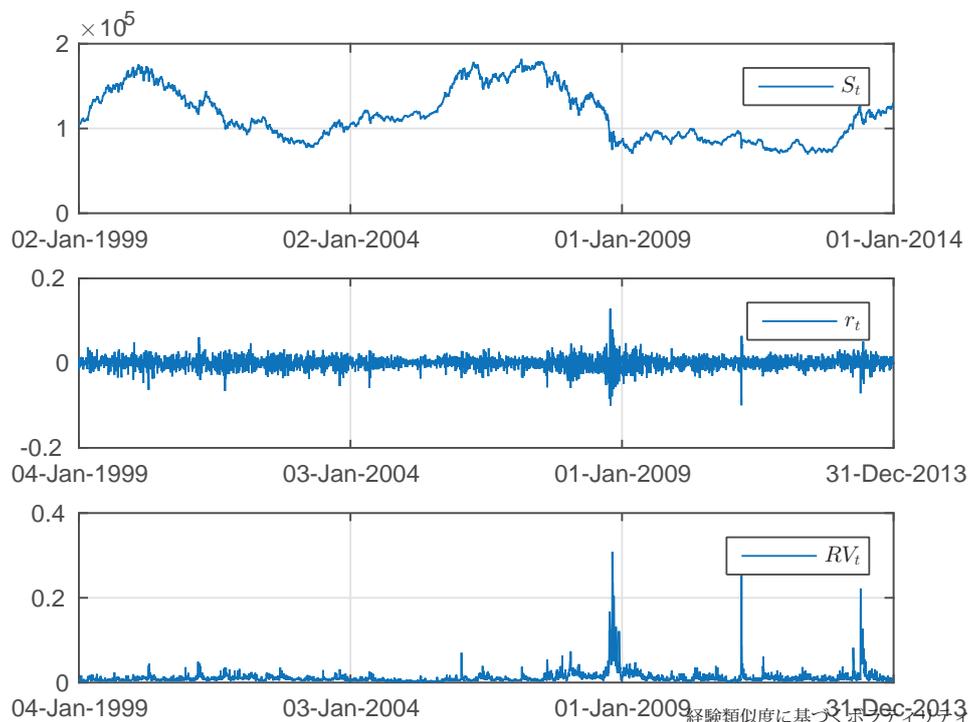
- 日経ティックデータ、株式指数と個別銘柄ティックデータを1分値に
- 1999年1月4日から2013年12月30日まで
- 株価指数6銘柄：TOPIX、日経株価指数300、日経平均、東証電気機器株価指数、東証輸送用機器株価指数、東証銀行業株価指数
- 個別24銘柄：2009年4月1日時点でのTOPIX Core30に含まれる銘柄から、1999年から2013年まで継続的に市場で取引された計24銘柄を採用

分析対象 30 銘柄

株価指数	個別銘柄	
TOPIX	日本たばこ産業	本田技研工業
日経株価指数 300	信越化学工業	キヤノン
日経平均	武田薬品工業	任天堂
東証電気機器株価指数	アステラス製薬	三井物産
東証輸送用機器株価指数	富士フイルム HD	三菱商事
東証銀行業株価指数	新日本製鐵	野村 HD
	小松製作所	三菱地所
	日立製作所	東日本旅客鉄道
	松下電器産業	日本電信電話
	ソニー	KDDI
	日産自動車	NTT ドコモ
	トヨタ自動車	東京電力

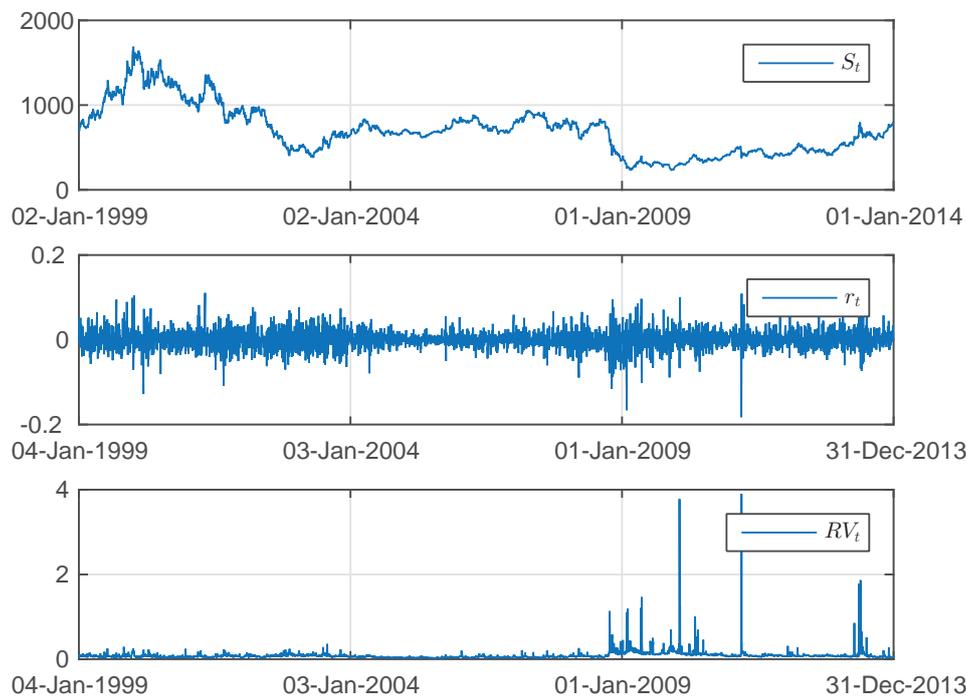
経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.11/29

株価・収益率・ RV (TOPIX)



経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.12/29

株価・収益率・ RV (日立製作所)



経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.13/29

推定区間と予測区間

- 分析ではインサンプル予測とアウトオブサンプル予測を行った
- インサンプルはそれぞれ1年間のインサンプル15通り、2年以上5年未満で50通り、5年以上15年以下で55通りの推定期間
- 推定期間1年が14通り、推定期間2年以上5年未満が46通り、推定期間5年以上14年以下が45通り、計105通り (外挿予測期間は直後の1年)
- RV 系列に対してはCookの距離で外れ値を同定し除外している

推定結果の例：日経平均

ES1				
推定値	-	5230.2599	687.1264	5126.0609
標準誤差	-	1170.6525	188.7263	1436.2081
t 統計量	-	4.4678	3.6409	3.5692
p 値	-	0.0000	0.0003	0.0004
HAR				
推定値	0.002	0.274	0.5077	0.1012
標準誤差	0.000	0.020	0.0317	0.0276
t 統計量	6.061	13.738	16.0186	3.6624
p 値	0.000	0.000	0.0000	0.0003
AR1				
推定値	0.004	0.668	-	-
標準誤差	0.000	0.012	-	-
t 統計量	19.637	53.905	-	-
p 値	0.000	0.000	-	-

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.15/29

推定結果の例：KDDI

ES1				
推定値	-	0.0934	0.0792	0.2252
標準誤差	-	0.0193	0.0194	0.0393
t 統計量	-	4.8324	4.0751	5.7315
p 値	-	0.0000	0.0000	0.0000
HAR				
推定値	0.043	0.456	0.3266	0.1446
標準誤差	0.011	0.019	0.0295	0.0243
t 統計量	3.815	23.556	11.0903	5.9559
p 値	0.000	0.000	0.0000	0.0000
AR1				
推定値	0.125	0.788	-	-
標準誤差	0.011	0.010	-	-
t 統計量	11.549	76.664	-	-
p 値	0.000	0.000	-	-

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.16/29

- どのような評価関数を設定するかに結論は依存する
- 設定次第で様々な評価関数を表現できる族として、Patton (2001) にならってパラメータ b を持つ以下の誤差関数を導入する

$$\mathcal{L}(rv, \hat{v}, b) = \begin{cases} \hat{v} - rv + rv \cdot \log(rv/\hat{v}), & \text{for } b = -1 \\ \frac{rv}{\hat{v}} - \log \frac{rv}{\hat{v}} - 1, & \text{for } b = -2 \\ \frac{1}{(b+1)(b+2)}(rv^{b+2} - \hat{v}^{b+2}) - \frac{1}{b+1}\hat{v}^{b+1}(rv - \hat{v}), & \text{otherw} \end{cases}$$

- ここで rv はボラティリティ, \hat{v} は対応する予測値

誤差関数について (1)

- この誤差関数は $b = -2$ のとき 擬似尤度誤差 (Quasi-LIKelihood, QLIKE) に対応する一方, $b = 0$ のときは平均 2 乗誤差 (Mean-Squared-Error, MSE) 測度に対応している.
- Patton and Sheppard (2009) によれば, 尤度に基づく誤差関数である QLIKE は, ノイズに対して頑健であるため, MSE と比較してボラティリティの予測力を比較する上でより好ましい誤差関数である.
- b が正で値も大きいとき, この誤差関数は真値の過大推定に対しより大きな値を返す一方, 負値の b に対しては, 真値の過小評価に対し大きな値を返す (Patton, 2011).

- 本研究では、 $b \in \{1, 0, -1, -2\}$ という 4 種類の値を用いる。
- 実際の計算された誤差関数の値は、インサンプル、アウトオブサンプル合わせて 225 通りの推定予測期間に銘柄数 30 と上述の 4 種類の b を組合せた数 $225 \times 30 \times 4 = 27000$
- 結果を個別に見ることはあまりに煩雑なので、誤差関数の値から作成した統計量をインサンプル予測 (表 9) とアウトオブサンプル予測 (表 10) とにまとめてある。

表 9 誤差関数 ($b = 1, 0, -1, -2$) の基本統計量 (in-sample)

$b = 1$	<i>ES0</i>	<i>ES1</i>	<i>HAR</i>	<i>AR1</i>
平均	0.0186	0.0185	0.0185	0.0205
最大値	0.8704	0.9900	0.9717	0.9674
標準偏差	0.0830	0.0827	0.0836	0.0925
歪度	5.7047	5.9336	5.9975	5.8805
尖度	38.3773	43.4167	44.1103	40.9770
標本数	3519	3519	3519	3519
<hr/>				
$b = 0$	<i>ES0</i>	<i>ES1</i>	<i>HAR</i>	<i>AR1</i>
平均	0.0106	0.0101	0.0101	0.0115
最大値	0.9818	0.9703	0.9486	0.6294
標準偏差	0.0455	0.0436	0.0431	0.0465
歪度	8.5951	8.7612	8.6038	6.8007
尖度	112.6878	118.8399	114.8965	61.9610
標本数	3520	3520	3520	3520
<hr/>				
$b = -1$	<i>ES0</i>	<i>ES1</i>	<i>HAR</i>	<i>AR1</i>
平均	0.0126	0.0122	0.0123	0.0150
最大値	0.7353	0.7070	0.6921	0.7416
標準偏差	0.0307	0.0294	0.0294	0.0356
歪度	8.2619	8.2384	7.9477	6.9066
尖度	124.3799	124.9828	115.5328	81.9811
標本数	3521	3521	3521	3521
<hr/>				
$b = -2$	<i>ES0</i>	<i>ES1</i>	<i>HAR</i>	<i>AR1</i>
平均	0.1182	0.1171	0.1170	0.1409
最大値	0.8761	0.8750	0.9881	0.9643
標準偏差	0.0804	0.0804	0.0818	0.0969
歪度	1.5317	1.5297	2.0063	1.6576
尖度	9.2594	9.2258	14.7414	10.4143
標本数	3522	3522	3522	3522

表10 誤差関数 ($b = 1, 0, -1, -2$) の基本統計量 (out-of-sample)

$b = 1$	<i>ES0</i>	<i>ES1</i>	<i>HAR</i>	<i>AR1</i>
平均	0.0029	0.0030	0.0030	0.0039
最大値	0.4941	0.4660	0.5642	0.7705
標準偏差	0.0176	0.0183	0.0188	0.0242
歪度	13.3959	12.3298	14.5015	16.0055
尖度	264.8005	211.3206	319.6418	390.0936
標本数	3061	3061	3061	3061
$b = 0$	<i>ES0</i>	<i>ES1</i>	<i>HAR</i>	<i>AR1</i>
平均	0.0057	0.0055	0.0063	0.0071
最大値	0.5086	0.7682	0.8100	0.7864
標準偏差	0.0368	0.0381	0.0439	0.0456
歪度	11.6775	14.4489	12.4176	12.7044
尖度	149.2158	239.8356	168.9225	181.5710
標本数	3061	3061	3061	3061
$b = -1$	<i>ES0</i>	<i>ES1</i>	<i>HAR</i>	<i>AR1</i>
平均	0.0098	0.0104	0.0106	0.0146
最大値	0.3381	0.5879	0.5105	0.9356
標準偏差	0.0244	0.0310	0.0279	0.0380
歪度	9.2539	12.3787	9.6937	10.6424
尖度	111.5964	195.2102	122.6855	174.7504
標本数	3062	3062	3062	3062
$b = -2$	<i>ES0</i>	<i>ES1</i>	<i>HAR</i>	<i>AR1</i>
平均	0.1218	0.1237	0.1273	0.1707
最大値	0.5506	0.7121	0.5685	0.8637
標準偏差	0.1012	0.1036	0.1053	0.1430
歪度	1.2880	1.3960	1.2796	1.4295
尖度	4.6043	5.3772	4.5292	5.2193
標本数	3063	3063	3063	3063

結果の考察 (平均値)

- まず平均値に注目すると、インサンプルの表9では *ES1* と *HAR* がほぼ同値で低い値となっており、*AR1* はすべての b において最も高い値となっている。
- アウトオブサンプルの表10では、*ES0* の健闘が目立つ。
- この表から、アウトオブサンプルにおける誤差の平均値は、全体的な傾向として $ES0 < ES1 < HAR < AR1$ となっていることが分かる。

結果の考察 (最大値, 標準偏差)

- 次に最大値に着目すると, 表 9 および表 10 共に, b の値によって結果がまちまちであるが, AR1 も他のモデルに比べて違いがそれ程大きくはない.
- 最後に標準偏差に関して見ると, インサンプルの表 9 では, すべての b において AR1 が最も高い値となっているが, 他の ES0, ES1, HAR は各 b において大きな違いは見られない.
- そして, アウトオブサンプルの表 10 では, ES0(重み 1/3 の固定モデル) がすべての b において最も低い標準偏差の値となっている.

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.21/29

モデルの序列化

- ブートストラップベースの対比較検定によるモデルの序列化を行う
- Hansen et al. (2011) が提案したモデル信頼集合 (Model Confidence Set)
- 候補となるモデルの組 $\mathcal{M}_0 = \{1, \dots, m_0\}$
- モデル i, j ($i, j = 1, \dots, m_0$) と全ての $t = 1, \dots, T$ で

$$d_{ij,t} = L(rv_{it}, \hat{rv}_{it}) - L(rv_{jt}, \hat{rv}_{jt})$$

を計算する.

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.22/29

- 各 $d_{ij,t}$ において，帰無仮説

$$H_0 : E[d_{ij,t}] = 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{M}, i > j$$

を，モデル $\mathcal{M} \in \mathcal{M}_0$ に対して検定．初期値は $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$

- もし帰無仮説 H_0 が所与の有意水準 (たとえば 10%) で棄却されるならば，予測力が最も低いモデルがこのモデルの組から除外される．
- この方法を， H_0 が棄却できなくなるまで継続する．

- ここでは Hansen et al. (2011) に従い， H_0 を評価するために以下のような範囲統計量を用いる

$$T_{R,k} = \max_{i,j \in \mathcal{M}} |t_{ij}| = \max_{i,j \in \mathcal{M}} \frac{|\bar{d}_{ij}|}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(d_{ij})}}$$

- ここで $\bar{d}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T d_{ij}$ および $\widehat{\text{var}}(\bar{d}_{ij})$ は，ブロック・ブートストラップ法より得られる．

- (インサンプル) 株式指数ではすべての推定期間で HAR が最良モデル最頻，次点が ES1.
- (インサンプル) 個別銘柄では，推定期間が 5 年以上のデータセットで HAR と ES1 が逆転し ES1 が最良モデル最頻.
- (アウトオブサンプル) 株式指数，個別銘柄共，推定期間が 5 年以上のデータセットを除き ES0 が最良モデル最頻.
- (アウトオブサンプル) 推定期間が 5 年以上のデータセットでは，株式指数では HAR，個別銘柄では ES1 がそれぞれ最良モデル最頻.

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.26/29

まとめ

- 経験類似度モデル ES1 とその他の時系列モデルとの予測力比較を，4 つの誤差関数による MCS を用いることにより，複数の銘柄と推定予測期間におけるモデルの予測力を順位付けし，最良モデルの累積頻度を分析することで行った.
- 株式指数ではインサンプル，アウトオブサンプル共，HAR が最良モデルとしての頻度が最も高く，個別銘柄については，インサンプルでは ES1，アウトオブサンプルでは ES0 がそれぞれ最良モデルとしての頻度が最も高かった.
- アウトオブサンプルにおける ES0 の予測力が他のモデルと比較して高くなる傾向は，先行研究 Golosnoy et al. (2014) の結果と整合的である.

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.27/29

- Corsi, F. (2009). A simple long memory model of realized volatility. *Journal of Financial Econometrics*, **7**, 174–196.
- Gilboa, I. and Schmeidler, D. (1995). Case-Based Decision Theory. *Quarterly Journal of Economics*, **110**, 605–639.
- Gilboa, I., Lieberman, O. and Schmeidler, D. (2011). A similarity-based approach to prediction. *Journal of Econometrics*, **162**, 124–131.
- Golosnoy, V., Hamid, A. and Okhrin, Y. (2014). The empirical similarity approach for volatility prediction. *Journal of Banking & Finance*, **40**, 321–329.

経験類似度に基づくボラティリティ予測 – p.28/29

- Hansen, P.R., Lunde, A. and Nason, J.M. (2011). The model confidence set. *Econometrica*, **79**, 453–497.
- Patton, A.J. and Sheppard, K. (2009). Evaluating volatility and correlation forecasts. In: T. G. Andersen, R. A. Davis, J. P. Kreiss and T. Mikosch (eds.), *Handbook of Financial Time Series*, Springer, 801–838.
- Patton, A. J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. *Journal of Econometrics*, **160**, 246–256.

経験類似度に基づくボラティリティ予測 – p.29/29

株価指数と先物間の因果関係変化の検証

木下 亮¹ 大屋幸輔²

¹ 大阪大学大学院経済学研究科,

² 大阪大学大学院経済学研究科

2015年12月18日

「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再起的事象」研究報告会@東京大学

概要

- 1 因果性の計測に関する先行研究
- 2 因果性の変化に関する検定
- 3 実証分析
- 4 結語

1. 先行研究：因果性の計測

時間領域：

Granger (1963): 因果性の強さ $\{ X_{kt} \} \Rightarrow \{ X_{jt} \}$,

$$1 - \text{var}_j[Q] / \text{var}_j[Q(k)]$$

- Q : 確率過程 $\{ X_{it} \}$, $i = 1, \dots, q$ の集合
- $Q(k)$: Q から過程 $\{ X_{kt} \}$ を除外したもの
- $\text{var}_j[Q]$: 過程 $\{ X_{jt} \}$ の Q による一期先予測誤差の分散

周波数領域：Granger の因果性測度のスペクトル分解

- Geweke (1982): 特定の仮定下での VAR モデル
- Hosoya (1991) より一般的な定常過程
- Yao and Hosoya (2000): 非定常過程への拡張

周波数領域での分析

▶ ISM: web decomp

- Diebold et al. (1998) : インパルス応答関数は、排除すべき周波数領域の情報も含んでいる
 - 景気循環モデルの評価：インパルス応答関数を周波数領域へ変換し、1 周期 2 年から 8 年までの周波数領域の情報だけを使って、モデルを評価する
- Otrok et al. (2002) : 消費の習慣形成
 - **spectral utility function** which decompose agents' preferences for consumption smoothness into preferences for smoothness by frequency.
 - For time-separable preferences, **spectral utility is flat** because in such cases agents care only about overall volatility in consumption and not about temporal distribution of volatility.
 - For habit preferences, **the spectral utility function is not flat**: agents are **less averse to low-frequency (persistent) fluctuations** than to high-frequency (less persistent) fluctuations.

因果性の変化についての検定法

- Tsukuda and Miyakoshi (1998) :

構造変化 & VAR モデルでの Granger 因果性検定

- モデルのパラメータが変化すれば因果性検定の結果も変わる.
- “money → income” was strong before 1980 but weakened or virtually disappeared after 1980.
- more properly, “no causality” was rejected before 1980

本報告では

- 周波数領域での因果性の変化の大きさを測る (Hosoya (1991) による因果性測度の利用)
- 因果性の変化の大きさに関する統計的測推

二変量 { X(t), Y(t) } に関する因果性測度

Geweke (1982)

$$F_{Y \rightarrow X} = \log \left\{ \frac{\text{var}(\text{one step prediction error of } X(t) \text{ given } \{X(s)\}_{-\infty}^{t-1})}{\text{var}(\text{one step prediction error of } X(t) \text{ given } \{X(s), Y(s)\}_{-\infty}^{t-1})} \right\}$$

Hosoya (1991)

$$M_{Y \rightarrow X} = \log \left\{ \frac{\text{var}(\text{one step prediction error of } X(t) \text{ given } \{X(s)\}_{-\infty}^{t-1})}{\text{var}(\text{one step prediction error of } X(t) \text{ given } \{X(s), Y_{0,-1}(s)\}_{-\infty}^{t-1})} \right\}$$

- $Y_{0,-1}(t)$: $Y(t)$ を $\{X(s)\}_{-\infty}^t, \{Y(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ へ射影したときの残差
 $Y(t)$ 固有のショック, $X(t)$ と無相関
- $M_{Y \rightarrow X}$: Granger's strength of causality for $Y_{0,-1}(t) \rightarrow X(t)$ に対応

Hosoya (1991) による $M_{Y \rightarrow X}$ の周波数分解

$$M_{Y \rightarrow X} = \int_{-\pi}^{\pi} M_{Y \rightarrow X}(\lambda) d\lambda$$

$$M_{Y \rightarrow X}(\lambda) = \log \left(\frac{f_{11}(\lambda)}{f_{11}(\lambda) - 2\pi \tilde{f}_{12}(\lambda) \tilde{f}_{22}(\lambda)^{-1} \tilde{f}_{12}(\lambda)^*} \right), \quad -\pi < \lambda \leq \pi.$$

- $f(\lambda)$: $\{X(t), Y(t)\}$ のスペクトル密度行列,
- $\tilde{f}(\lambda)$: $\{X(t), Y_{0,-1}(t)\}$ のスペクトル密度行列,
- $*$: 共役転置

$$\tilde{f}(\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11}(\lambda) & \tilde{f}_{12}(\lambda) \\ \tilde{f}_{21}(\lambda) & \tilde{f}_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}_{11}(\lambda) = f_{11}(\lambda), \quad \tilde{f}_{12}(\lambda)^* = \tilde{f}_{21}(\lambda)$$

スペクトル密度関数とその分解

以下を仮定

- $Z(t) = \{X(t), Y(t)\}'$ は共分散定常で, スペクトル密度行列 $f(\lambda)$ をもつ
- $\int_{-\pi}^{\pi} \log \det f(\lambda) d\lambda > -\infty$

このとき $f(\lambda)$ は次の分解をもつ

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \Lambda(e^{-i\lambda}) \Lambda(e^{-i\lambda})^*,$$

$Z(t)$ の一期先予測誤差 ($\{X(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ & $\{Y(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ への射影残差) の分散共分散行列を Σ とすると

$$\Sigma = \Lambda(0) \Lambda(0)^*.$$

この Σ に関して以下が成立

$$\det \Sigma = (2\pi)^2 \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \det f(\lambda) d\lambda \right\}.$$

定常時系列モデルのスペクトル密度行列

スペクトル密度行列 $f(\lambda)$, $\tilde{f}(\lambda)$ をもとめるためには $\Lambda(e^{-i\lambda})$ が必要

- ARMA モデル $A(L)Z(t) = B(L)\epsilon(t)$, $\epsilon(t) \sim N(0, \Sigma)$
- $Z(t)$ のスペクトル密度行列

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \Lambda(e^{-i\lambda}) \Lambda(e^{-i\lambda})^*, \quad \Lambda(e^{-i\lambda}) = A(e^{-i\lambda})^{-1} B(e^{-i\lambda}) \Sigma^{1/2}$$

- $\{X(t), Y_{0,-1}(t)\}'$ のスペクトル密度行列 $\tilde{f}(\lambda)$

$$\tilde{f}(\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11}(\lambda) & \tilde{f}_{12}(\lambda) \\ \tilde{f}_{21}(\lambda) & \tilde{f}_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \tilde{f}_{11}(\lambda) &= f_{11}(\lambda), \quad \tilde{f}_{12}(\lambda) = \tilde{f}_{21}(\lambda)^*, \\ \tilde{f}_{21}(\lambda) &= \begin{bmatrix} -\Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} B(e^{-i\lambda})^{-1} A(e^{-i\lambda}) \begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) \end{bmatrix}, \\ \tilde{f}_{22}(\lambda) &= (\Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}) / (2\pi) \end{aligned}$$

2. 資産収益利率に関する因果性変化の検定

仮定

- $Z(t)$ は資産の (対数) 価格, $\Delta Z(t)$ はその収益率 (リターン)
- 構造変化時点 $T_1 = cT$, $c \in (0, 1)$.
- $k = 1$ for $t < T_1$, $k = 2$ for $T_1 \leq t$, $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, $\theta_k = \{\Psi_k, \Omega_k\}$.

$$\Delta Z(t) = \sum_{j=1}^{p_k} \Psi_k(j) \Delta Z(t-j) + \epsilon(t), \quad \epsilon(t) \sim N(0, \Omega_k),$$

対数尤度の最大化

$$\max_{\theta} l(\theta|Z) = \max_{\theta_1} l_1(\theta_1|Z) + \max_{\theta_2} l_2(\theta_2|Z),$$

$$l_k(\theta_k|Z) = -\frac{T_k}{2} \det \Omega_k - \frac{1}{2} \sum_t (\Delta Z(t) - \mu_k(t))' \Omega_k^{-1} (\Delta Z(t) - \mu_k(t)),$$

$$\mu_k(t) = \sum_{j=1}^{p_k} \Psi_k(j) \Delta Z(t-j), \quad T_2 = T - T_1, \quad k = 1, 2.$$

Test of zero causality: Yao and Hosoya (2000)

- $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta)$ の漸近分布

$$\sqrt{T} \left(M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta) \right) \xrightarrow{d} N(0, H(\theta))$$

$$\text{where } H(\theta) = \left(\frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta)}{\partial \theta'} \right)' V(\theta) \left(\frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta)}{\partial \theta} \right).$$

- Test statistic for $\mathcal{H}_0 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta) = 0$ for a frequency λ

$$W_f(\lambda) = T M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta})^2 / H(\hat{\theta}) \rightarrow \chi^2(1) \text{ under } \mathcal{H}_0 \text{ 厳密には?}$$

- Test for $\mathcal{H}_0 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta) = 0$ for frequency band $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$

$$W_B = T \times \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}) d\lambda \right)^2 / H_B(\hat{\theta}) \rightarrow \chi^2(1) \text{ under } \mathcal{H}_0 ?$$

$$H_B(\hat{\theta}) = \text{Acov} \left(\sqrt{T} (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}) d\lambda \right).$$

Test of causality change: Kinoshita and Oya (2014)

Yao and Hosoya (2000) と同様に

$$\sqrt{T} \left(M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2) \right) \xrightarrow{d} N \left(M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2), \mathcal{V}(\lambda; \theta) \right).$$

$$\text{where } \mathcal{V}(\lambda; \theta) = \frac{1}{c} \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1)}{\partial \theta_1'} V(\theta_1) \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1)}{\partial \theta_1} + \frac{1}{(1-c)} \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2)}{\partial \theta_2'} V(\theta_2) \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2)}{\partial \theta_2}.$$

Test statistic for $\mathcal{H}_0 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1) = M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2)$ for frequency λ

$$W_f(\lambda) = T \left(M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2) \right)^2 / \mathcal{V}(\lambda; \hat{\theta}) \rightarrow \chi^2(1) \text{ under } \mathcal{H}_0,$$

Test of causality change for frequency band (block wise)

$\mathcal{H}_0 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1) = M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2)$ for frequency band $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$

$$W_B = T \times \left(M_{Y \rightarrow X}(\hat{\theta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\hat{\theta}_2) \right)^2 / \mathcal{V}(\hat{\theta}) \rightarrow \chi^2(1) \text{ under } \mathcal{H}_0,$$

where

$$M_{Y \rightarrow X}(\theta_k) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_k) d\lambda,$$

$$\mathcal{V}(\hat{\theta}) = \text{Acov} \left(\sqrt{T} \left(M_{Y \rightarrow X}(\hat{\theta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\hat{\theta}_2) \right) \right).$$

以降の分析では、周波数帯 $(0, \pi]$ を 6 分割する

$$f_1 = (0, \pi/6], f_2 = (2\pi/6, 3\pi/6], \dots, f_6 = (5\pi/6, \pi].$$

3. 実証分析：株価指数とその先物の因果関係

- Intraday data (15sec. int.): Nikkei 225 (index), Future mini (mini)

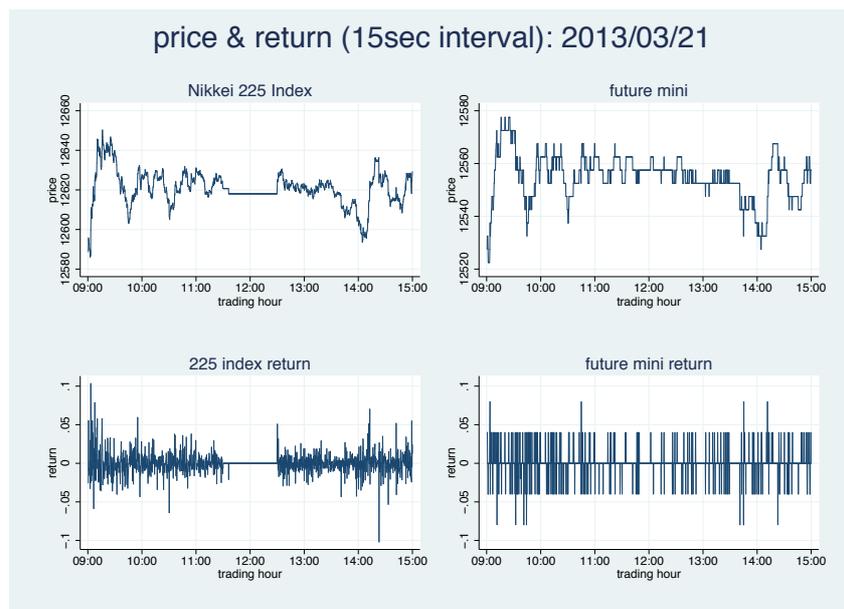


Fig.1: price (upper panel), return (lower panel)

Block wise: 2013/03/21 – morning session

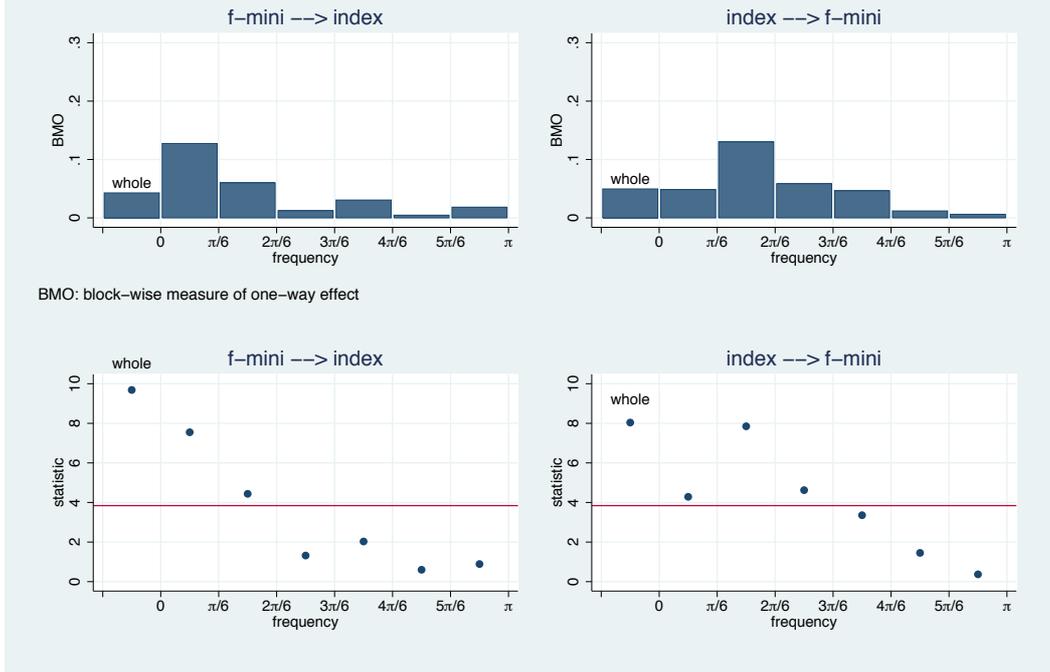


Fig.2: causality (upper panel), test stat. (lower panel)

Block wise: 2013/03/21 – afternoon session

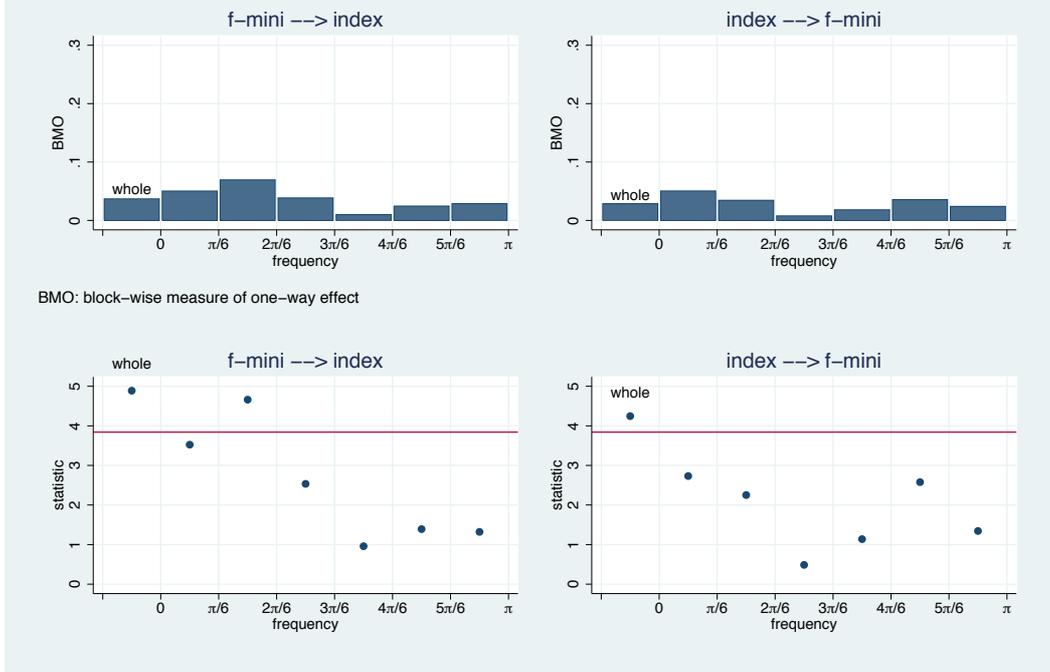
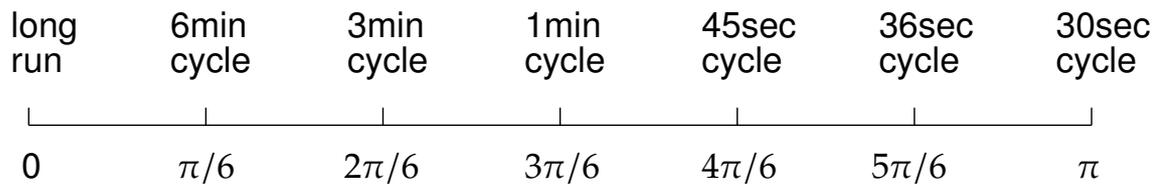


Fig.3: causality (upper panel), test stat. (lower panel)

周期と（角）周波数：15 秒間隔データの場合

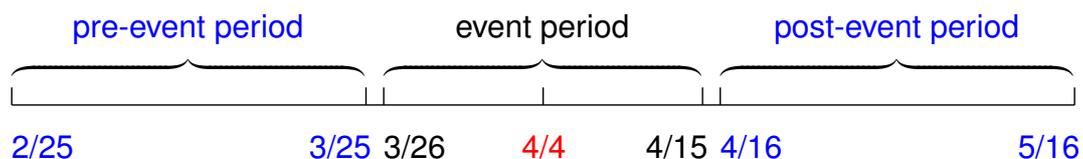


- (前場) **future mini → index**: 周波数帯 $(0, \pi/6]$ に大きな因果性測度
検定結果 ⇒ (6 分以上の周期) において, 有意な因果性がある
- (前場) **index → future mini**: 周波数帯 $(\pi/6, 2\pi/6]$ に大きな因果性測度
検定結果 ⇒ (3 分から 6 分の周期) において, 有意な因果性がある
- (後場) ほとんどの周波数帯で, 低い因果性水準

株価指数とその先物の因果性に関する実証分析

量的質的緩和 (QQE) は, 株式市場と先物市場にどのような影響を与えたか

- 15 秒間隔のデータ：日経平均と日経平均先物ミニ
- 標本期間：2013/02/25 - 2013/05/16
- 2013/04/04: イベント日 (BOJ による“QQE”の導入のアナウンス)
- 各日の因果性を推定 (モデルを推定し, 因果性を計算)
- イベントの前後のそれぞれの期間における因果性測度の標本平均をもとめる
- 各期間の因果性測度の平均に差があるかどうかを検定



Strength of Causality (f-mini → index) : 2013/03/25 – 2013/05/16 morning

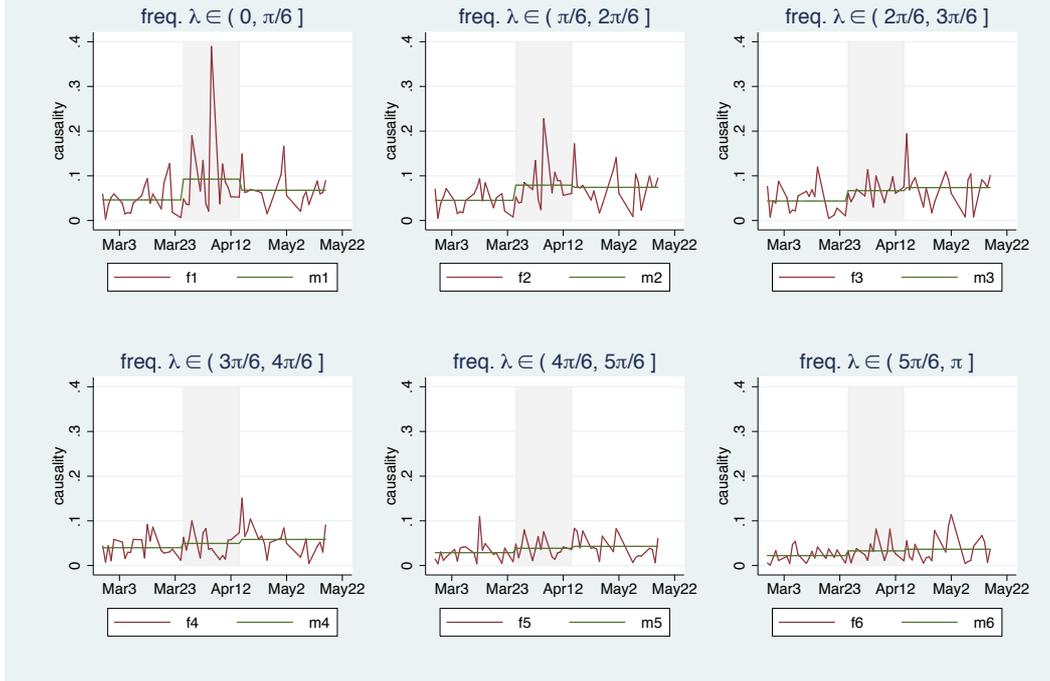


Fig.4a: causalities for each frequency band

Strength of Causality (f-mini → index) : 2013/03/25 – 2013/05/16 afternoon

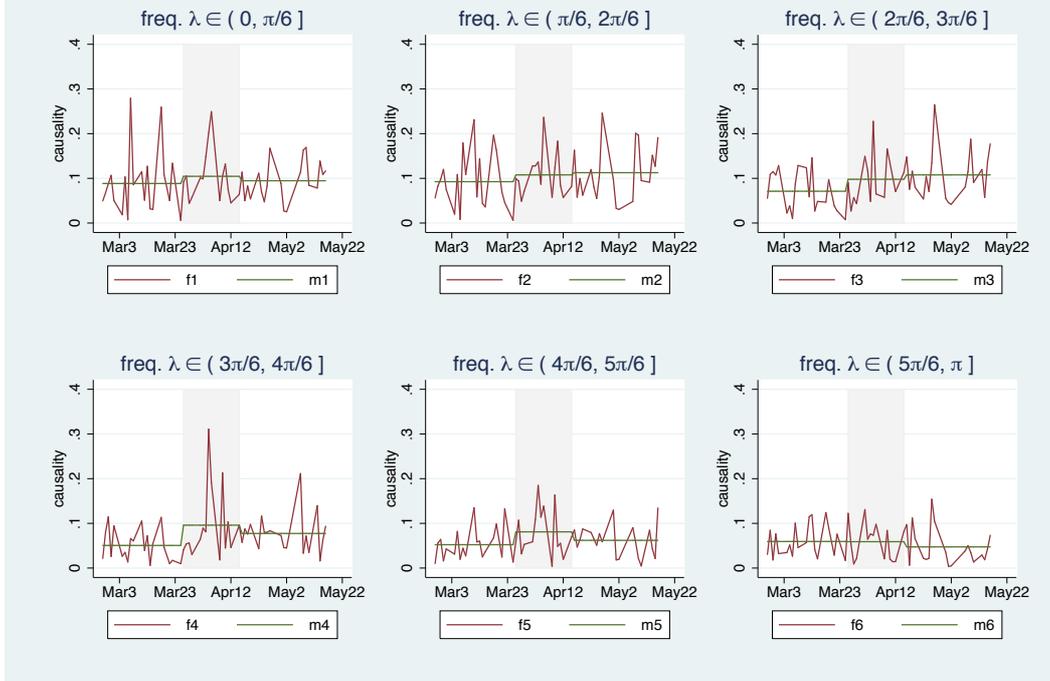


Fig.4b: causalities for each frequency band

4. 結語

要約

- 先行研究 Hosoya (1991), Yao and Hosoya (2000) をもとに、因果性の変化を計測する方法と、関連する検定を提案した。
- 政策変更による、異なる種類の資産収益率の因果関係の変化を検出することができた。
- 量的質的金融緩和により、先物から指数（現物）への因果性が有意に強くなっていることが確かめられた。
- その増加は、全周波数帯で見られるが、特に中位の周波数帯で顕著であった。

今後の課題

- 未知の変化点
- （今回は説明していない数値実験で確認されている）小標本での検定統計量にサイズにおけるバイアス

References

- Diebold, F.X., Ohanian, L.E. and Berkowitz, J. (1998) "Dynamic Equilibrium Economies: A Framework for Comparing Models and Data," *Review of Economic Studies*, **65**, 433-451.
- Geweke, J. (1982), "Measurement of linear dependence and feedback between multiple time series," *Journal of the American Statistical Society*, **77**, 303-314.
- Granger, C.W.J. (1963), "Economic processes involving feedback," *Information and Control*, **6**, 28-48.
- Granger, C.W.J. and Lin, J.L.(1995), "Causality in the long run," *Econometric Theory*, **11**, 530-536.
- Hosoya, Y.(1991), "The decomposition and measurement of the interdependency between second-order stationary processes," *Probability Theory*, **88**, 429-444.
- Kinoshita, R. and Oya, K.(2014), "Measurement of causality change between Multiple time series," *Journal of the Japan Statistical Society Japanese Issue*, **44**, Series J, 19-40.
- Otrok, C., Ravikumar, B. and Whiteman, C.H. (2002) "Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle," *Journal of Monetary Economics*, **49**, 1261-1288.
- Tsukuda, Y. and Miyakoshi, T.(1998), "Granger causality between money and income for the Japanese economy in the presence of structural break," *Japanese Economic Review*, **49**, 191-209.
- Yao, F. and Hosoya, Y.(2000), "Inference on one-way effect and evidence in Japanese macroeconomic data," *Journal of Econometrics*, **98**, 225-255.

Strength of Causality (index \rightarrow f-mini) : 2013/03/25 – 2013/05/16 morning

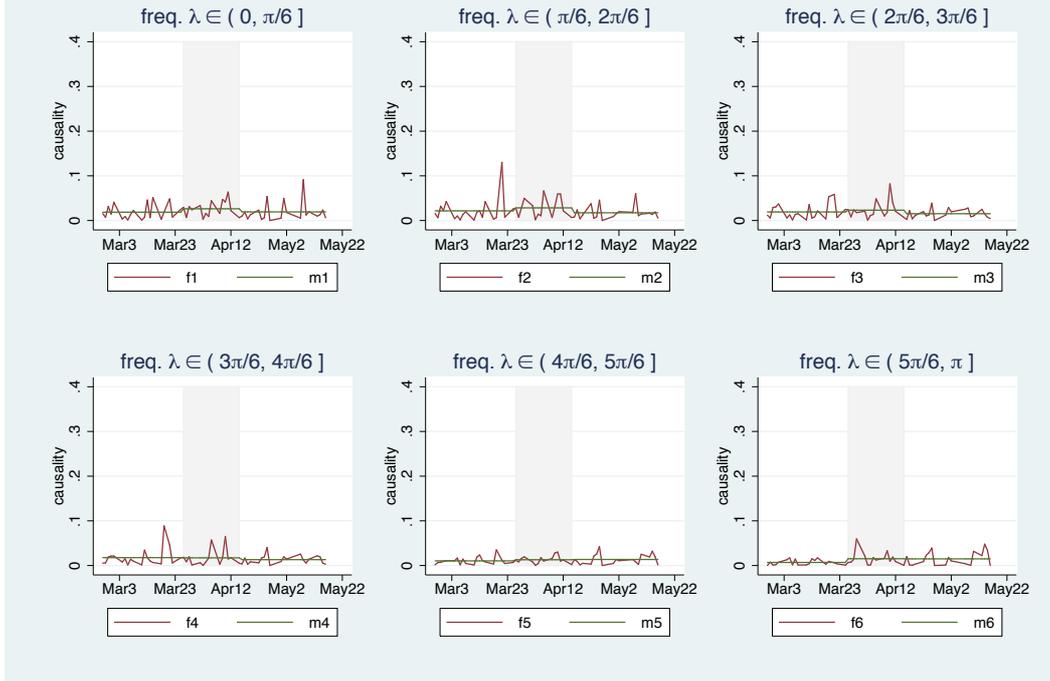


Fig.4c: causalities for each frequency band

Strength of Causality (index \rightarrow f-mini) : 2013/03/25 – 2013/05/16 afternoon

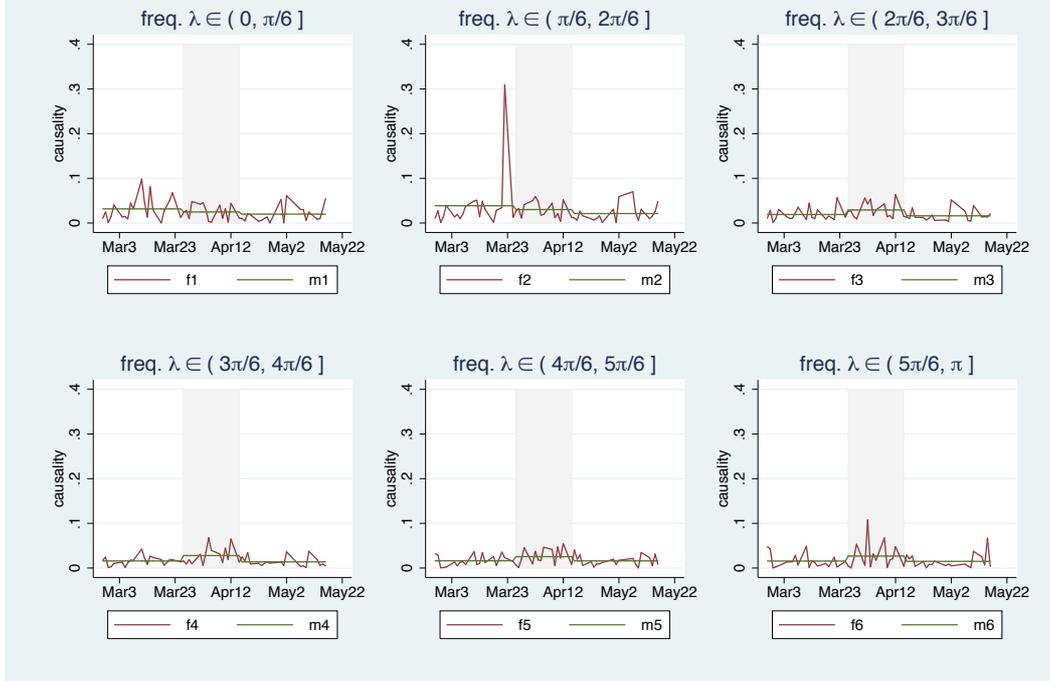


Fig.4d: causalities for each frequency band

Causality diff. (post event) minus (pre event), afternoon

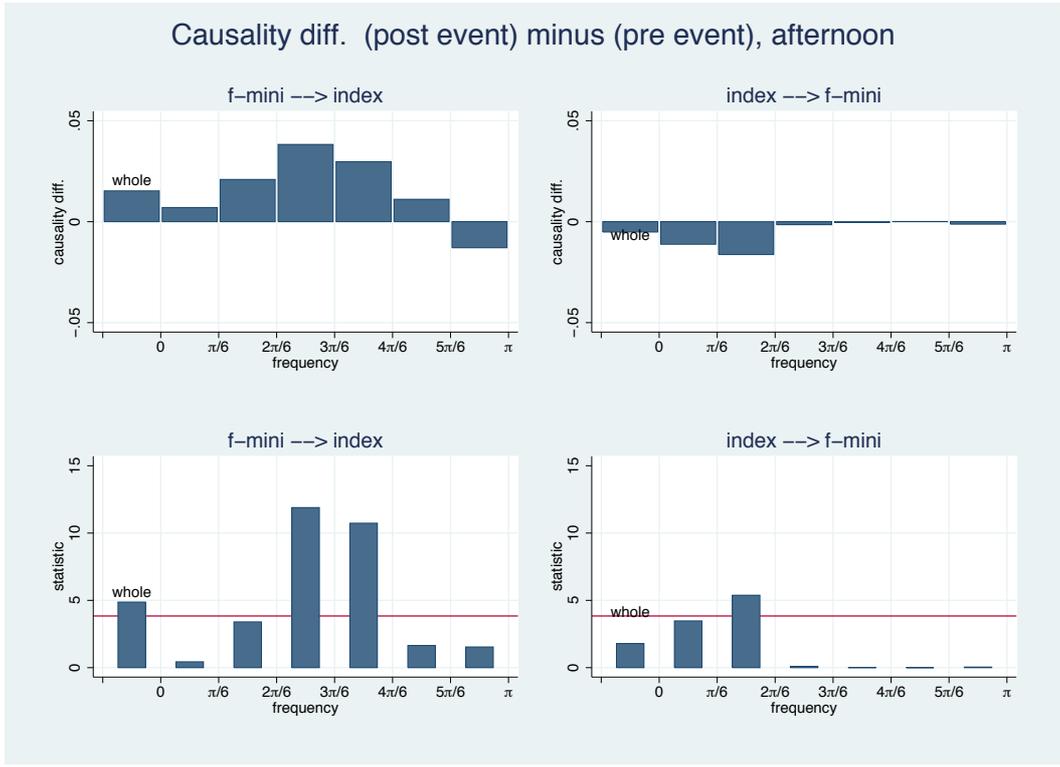


Fig.6 (goba): averages of causality differences for each frequency band