

# 経験類似度に基づくボラティリティ予測

森本孝之 (関西学院大学), 川崎能典 (統計数理研究所)

科学研究費基盤研究 (A)

「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再帰的事象」

東京大学経済学部 小島ホール

2015年12月18日

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.1/29

## 経験類似度に基づく予測

- $y_t$  を共変量  $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^d)$  で予測する問題
- $(x_i^1, \dots, x_i^d, y_i), i = 1, \dots, n$ : シナリオ or データベース
- 共変量の類似度を与える関数  $s (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{++})$  を特定化
- 新たにデータ  $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^d)$  が来た時, 類似度に基づいて予測  $y_t^s$  を以下のように構成する

$$y_t^s = \frac{\sum_{i \leq n} s(x_i, x_t) y_i}{\sum_{i \leq n} s(x_i, x_t)}$$

Gilboa, Lieberman, Schmeidler (2011) J Econometrics

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.2/29

- モデルアベレージング,  $\exp(-AIC/2)$  による重み付け (Akaike weights)
- 共変量や予測量の近さ (類似度) による重み付けを考えたところ?
- 概念的には Gilboa and Schmeidler (1995) QJE まで遡る
- ボラティリティ予測モデルの比較に流用 Golosnoy-Hamid-Okhrin (2014) J Banking & Finance
- 本報告はとりあえず Golosnoy et al. を日本のデータでなぞってみる

## *Golosnoy et al.* の設定

- $\mathcal{H}$  でモデル集合ないし説明変数・被説明変数の組の集合を表し,  $h \in \mathcal{H}$  で特定のモデル等を指す
- $v_t^{(h)}$  と書いて,  $t$  期までの情報に基づきモデル  $h$  から得られるボラティリティ予測値を表す
- $t-1$  時点までの情報に基づいて  $t$  期の予測量を構成するとしよう.  $v_{t-1}$  はイントラデイデータを使った RV 推定等で観測が得られたかのように見なす.
- このとき,  $t-2$  時点までの情報で  $t-1$  時点の予測を構成した  $v_{t-2}^{(h)}$  が, 実際の  $v_{t-1}$  にどれだけ近かったかを測る, 類似度  $s$  の定式化を分析者が与える必要がある.

- $t - 2$  時点までの情報で  $t - 1$  時点の予測を構成した  $v_{t-2}^{(h)}$  が、実際の  $v_{t-1}$  にどれだけ近かったかを

$$\theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(h)}] = \exp\left(-w_h(v_{t-1} - v_{t-2}^{(h)})^2\right)$$

と定式化する.

- $w_h$  はデータから推定.  $v_t$  に対するモデル (以降便宜上 ES1 と呼ぶ) として考えれば

$$v_t = \frac{\sum_{h \in \mathcal{H}} \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(h)}] v_{t-1}^{(h)}}{\sum_{h \in \mathcal{H}} \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(h)}]} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.5/29

## 比較したいモデル群

- Heterogeneous Autoregression (HAR) モデル
  - Corsi (2009) J Financial Econometrics
- 経験類似度モデル (ES1)
  - HAR モデルで採用される説明変数の重みを経験類似度で決めるモデル
- 1/3 ルール
  - ES モデルの重み係数部分を恣意的に与えるモデル
- その他線形 AR1 や ARCH/GARCH とその変種も取り上げてみたが、本報告では省略.

- 日次ボラティリティ過程  $v_t$  に対する HAR モデルの典型的定式化

$$v_t = \alpha_0 + \omega_1 v_{t-1}^{(d)} + \omega_2 v_{t-1}^{(w)} + \omega_3 v_{t-1}^{(m)} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

- ここで  $v_t^{(w)} = 5^{-1} \sum_{i=1}^5 v_{t-i+1}^{(d)}$ ,  
 $v_t^{(m)} = 22^{-1} \sum_{i=1}^{22} v_{t-i+1}^{(d)}$ , 営業日ベースで見た週次と月次ボラティリティ
- $v_t$  は観測不能だが、実際には RV で代用するので、OLS 回帰で推定可能
- ES1 モデルには定数項がないことに注意

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.7/29

## 1/3ルール (ES0)

- ES1 モデルの各係数を 1/3 で決め打ちする

$$v_t = \frac{1}{3} v_{t-1}^{(d)} + \frac{1}{3} v_{t-1}^{(w)} + \frac{1}{3} v_{t-1}^{(m)} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

- $\theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(d)}] = \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(w)}] = \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(m)}] = 1/3$  となっていることから、これを ES0 と呼ぶ。
- ES1 モデルにおける規格化された重みを長期にわたって観察すると、概ねどの重みも 1/3 に近いという経験則を取り入れた手法
- 何らの推定なしに予測ステップに進める

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.8/29

- 日次ボラティリティ系列  $\{v_t\}$  は観測できないので、高頻度データから推定し、あたかも観測値であるかのごとく扱う。
- ここでは1分間隔でサンプリングされた日次収益率の2乗から

$$RV_t = \sum_{i=1}^{n_t} r_{t,i}^2$$

と計算する。ここで  $r_{t,i}$  は第  $t$  日の  $i$  番目の日次収益率、 $n_t$  はサンプルサイズ。東証のデータを使うので、夜間や昼休みの影響も考慮して加重平均。

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.9/29

## データ

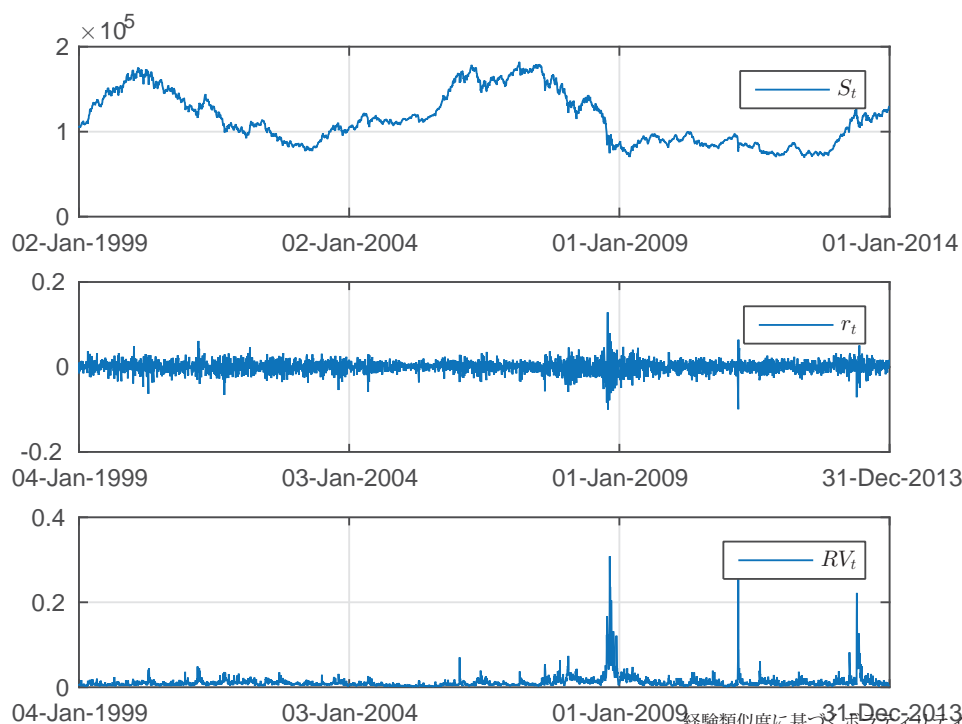
- 日経ティックデータ、株式指数と個別銘柄ティックデータを1分値に
- 1999年1月4日から2013年12月30日まで
- 株価指数6銘柄：TOPIX、日経株価指数300、日経平均、東証電気機器株価指数、東証輸送用機器株価指数、東証銀行業株価指数
- 個別24銘柄：2009年4月1日時点でのTOPIX Core30に含まれる銘柄から、1999年から2013年まで継続的に市場で取引された計24銘柄を採用

# 分析対象 30 銘柄

| 株価指数        | 個別銘柄      |         |
|-------------|-----------|---------|
| TOPIX       | 日本たばこ産業   | 本田技研工業  |
| 日経株価指数 300  | 信越化学工業    | キヤノン    |
| 日経平均        | 武田薬品工業    | 任天堂     |
| 東証電気機器株価指数  | アステラス製薬   | 三井物産    |
| 東証輸送用機器株価指数 | 富士フイルム HD | 三菱商事    |
| 東証銀行業株価指数   | 新日本製鐵     | 野村 HD   |
|             | 小松製作所     | 三菱地所    |
|             | 日立製作所     | 東日本旅客鉄道 |
|             | 松下電器産業    | 日本電信電話  |
|             | ソニー       | KDDI    |
|             | 日産自動車     | NTT ドコモ |
|             | トヨタ自動車    | 東京電力    |

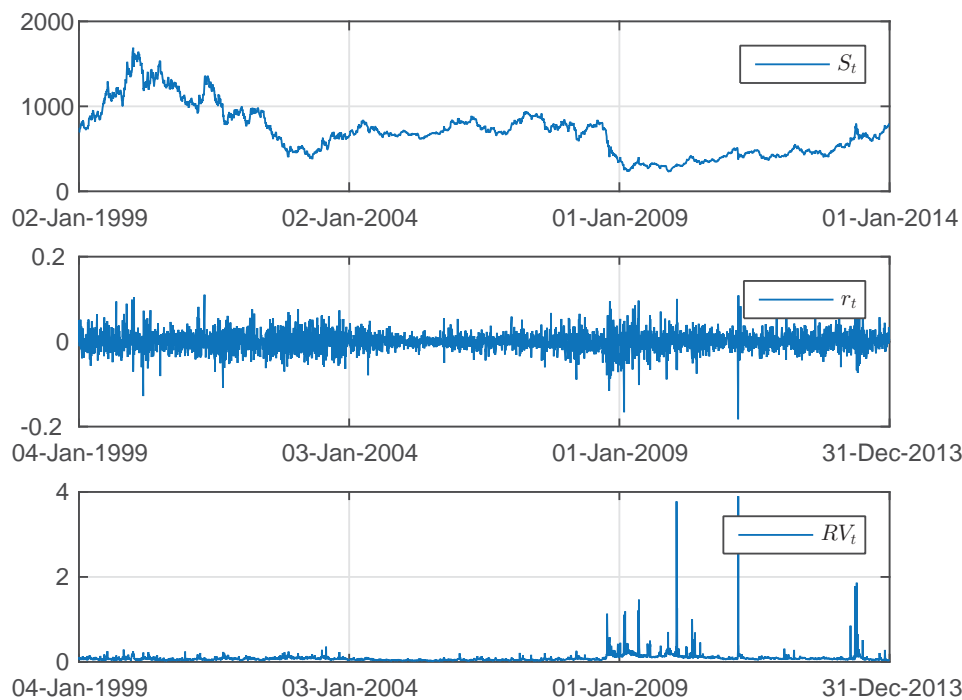
経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.11/29

## 株価・収益率・ $RV$ (TOPIX)



経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.12/29

## 株価・収益率・ $RV$ (日立製作所)



経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.13/29

## 推定区間と予測区間

- 分析ではインサンプル予測とアウトオブサンプル予測を行った
- インサンプルはそれぞれ1年間のインサンプル15通り、2年以上5年未満で50通り、5年以上15年以下で55通りの推定期間
- 推定期間1年が14通り、推定期間2年以上5年未満が46通り、推定期間5年以上14年以下が45通り、計105通り (外挿予測期間は直後の1年)
- $RV$  系列に対してはCookの距離で外れ値を同定し除外している

## 推定結果の例：日経平均

| ES1     |        |           |          |           |
|---------|--------|-----------|----------|-----------|
| 推定値     | -      | 5230.2599 | 687.1264 | 5126.0609 |
| 標準誤差    | -      | 1170.6525 | 188.7263 | 1436.2081 |
| $t$ 統計量 | -      | 4.4678    | 3.6409   | 3.5692    |
| $p$ 値   | -      | 0.0000    | 0.0003   | 0.0004    |
| HAR     |        |           |          |           |
| 推定値     | 0.002  | 0.274     | 0.5077   | 0.1012    |
| 標準誤差    | 0.000  | 0.020     | 0.0317   | 0.0276    |
| $t$ 統計量 | 6.061  | 13.738    | 16.0186  | 3.6624    |
| $p$ 値   | 0.000  | 0.000     | 0.0000   | 0.0003    |
| AR1     |        |           |          |           |
| 推定値     | 0.004  | 0.668     | -        | -         |
| 標準誤差    | 0.000  | 0.012     | -        | -         |
| $t$ 統計量 | 19.637 | 53.905    | -        | -         |
| $p$ 値   | 0.000  | 0.000     | -        | -         |

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.15/29

## 推定結果の例：KDDI

| ES1     |        |        |         |        |
|---------|--------|--------|---------|--------|
| 推定値     | -      | 0.0934 | 0.0792  | 0.2252 |
| 標準誤差    | -      | 0.0193 | 0.0194  | 0.0393 |
| $t$ 統計量 | -      | 4.8324 | 4.0751  | 5.7315 |
| $p$ 値   | -      | 0.0000 | 0.0000  | 0.0000 |
| HAR     |        |        |         |        |
| 推定値     | 0.043  | 0.456  | 0.3266  | 0.1446 |
| 標準誤差    | 0.011  | 0.019  | 0.0295  | 0.0243 |
| $t$ 統計量 | 3.815  | 23.556 | 11.0903 | 5.9559 |
| $p$ 値   | 0.000  | 0.000  | 0.0000  | 0.0000 |
| AR1     |        |        |         |        |
| 推定値     | 0.125  | 0.788  | -       | -      |
| 標準誤差    | 0.011  | 0.010  | -       | -      |
| $t$ 統計量 | 11.549 | 76.664 | -       | -      |
| $p$ 値   | 0.000  | 0.000  | -       | -      |

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.16/29



- どのような評価関数を設定するか結論は依存する
- 設定次第で様々な評価関数を表現できる族として、Patton (2001) にならってパラメータ  $b$  を持つ以下の誤差関数を導入する

$$\mathcal{L}(rv, \hat{v}, b) = \begin{cases} \hat{v} - rv + rv \cdot \log(rv/\hat{v}), & \text{for } b = -1 \\ \frac{rv}{\hat{v}} - \log \frac{rv}{\hat{v}} - 1, & \text{for } b = -2 \\ \frac{1}{(b+1)(b+2)}(rv^{b+2} - \hat{v}^{b+2}) - \frac{1}{b+1}\hat{v}^{b+1}(rv - \hat{v}), & \text{otherw} \end{cases}$$

- ここで  $rv$  はボラティリティ,  $\hat{v}$  は対応する予測値

## 誤差関数について (1)

- この誤差関数は  $b = -2$  のとき 擬似尤度誤差 (Quasi-LIKelihood, QLIKE) に対応する一方,  $b = 0$  のときは平均 2 乗誤差 (Mean-Squared-Error, MSE) 測度に対応している.
- Patton and Sheppard (2009) によれば, 尤度に基づく誤差関数である QLIKE は, ノイズに対して頑健であるため, MSE と比較してボラティリティの予測力を比較する上でより好ましい誤差関数である.
- $b$  が正で値も大きいとき, この誤差関数は真値の過大推定に対しより大きな値を返す一方, 負値の  $b$  に対しては, 真値の過小評価に対し大きな値を返す (Patton, 2011).

## 誤差関数について (2)

- 本研究では、 $b \in \{1, 0, -1, -2\}$  という 4 種類の値を用いる。
- 実際の計算された誤差関数の値は、インサンプル、アウトオブサンプル合わせて 225 通りの推定予測期間に銘柄数 30 と上述の 4 種類の  $b$  を組合せた数  $225 \times 30 \times 4 = 27000$
- 結果を個別に見ることはあまりに煩雑なので、誤差関数の値から作成した統計量をインサンプル予測 (表 9) とアウトオブサンプル予測 (表 10) とにまとめてある。

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.19/29

表 9 誤差関数 ( $b = 1, 0, -1, -2$ ) の基本統計量 (in-sample)

| $b = 1$  | <i>ES0</i> | <i>ES1</i> | <i>HAR</i> | <i>AR1</i> |
|----------|------------|------------|------------|------------|
| 平均       | 0.0186     | 0.0185     | 0.0185     | 0.0205     |
| 最大値      | 0.8704     | 0.9900     | 0.9717     | 0.9674     |
| 標準偏差     | 0.0830     | 0.0827     | 0.0836     | 0.0925     |
| 歪度       | 5.7047     | 5.9336     | 5.9975     | 5.8805     |
| 尖度       | 38.3773    | 43.4167    | 44.1103    | 40.9770    |
| 標本数      | 3519       | 3519       | 3519       | 3519       |
| $b = 0$  | <i>ES0</i> | <i>ES1</i> | <i>HAR</i> | <i>AR1</i> |
| 平均       | 0.0106     | 0.0101     | 0.0101     | 0.0115     |
| 最大値      | 0.9818     | 0.9703     | 0.9486     | 0.6294     |
| 標準偏差     | 0.0455     | 0.0436     | 0.0431     | 0.0465     |
| 歪度       | 8.5951     | 8.7612     | 8.6038     | 6.8007     |
| 尖度       | 112.6878   | 118.8399   | 114.8965   | 61.9610    |
| 標本数      | 3520       | 3520       | 3520       | 3520       |
| $b = -1$ | <i>ES0</i> | <i>ES1</i> | <i>HAR</i> | <i>AR1</i> |
| 平均       | 0.0126     | 0.0122     | 0.0123     | 0.0150     |
| 最大値      | 0.7353     | 0.7070     | 0.6921     | 0.7416     |
| 標準偏差     | 0.0307     | 0.0294     | 0.0294     | 0.0356     |
| 歪度       | 8.2619     | 8.2384     | 7.9477     | 6.9066     |
| 尖度       | 124.3799   | 124.9828   | 115.5328   | 81.9811    |
| 標本数      | 3521       | 3521       | 3521       | 3521       |
| $b = -2$ | <i>ES0</i> | <i>ES1</i> | <i>HAR</i> | <i>AR1</i> |
| 平均       | 0.1182     | 0.1171     | 0.1170     | 0.1409     |
| 最大値      | 0.8761     | 0.8750     | 0.9881     | 0.9643     |
| 標準偏差     | 0.0804     | 0.0804     | 0.0818     | 0.0969     |
| 歪度       | 1.5317     | 1.5297     | 2.0063     | 1.6576     |
| 尖度       | 9.2594     | 9.2258     | 14.7414    | 10.4143    |
| 標本数      | 3522       | 3522       | 3522       | 3522       |

表10 誤差関数 ( $b = 1, 0, -1, -2$ ) の基本統計量 (out-of-sample)

| $b = 1$  | <i>ES0</i> | <i>ES1</i> | <i>HAR</i> | <i>AR1</i> |
|----------|------------|------------|------------|------------|
| 平均       | 0.0029     | 0.0030     | 0.0030     | 0.0039     |
| 最大値      | 0.4941     | 0.4660     | 0.5642     | 0.7705     |
| 標準偏差     | 0.0176     | 0.0183     | 0.0188     | 0.0242     |
| 歪度       | 13.3959    | 12.3298    | 14.5015    | 16.0055    |
| 尖度       | 264.8005   | 211.3206   | 319.6418   | 390.0936   |
| 標本数      | 3061       | 3061       | 3061       | 3061       |
| $b = 0$  | <i>ES0</i> | <i>ES1</i> | <i>HAR</i> | <i>AR1</i> |
| 平均       | 0.0057     | 0.0055     | 0.0063     | 0.0071     |
| 最大値      | 0.5086     | 0.7682     | 0.8100     | 0.7864     |
| 標準偏差     | 0.0368     | 0.0381     | 0.0439     | 0.0456     |
| 歪度       | 11.6775    | 14.4489    | 12.4176    | 12.7044    |
| 尖度       | 149.2158   | 239.8356   | 168.9225   | 181.5710   |
| 標本数      | 3061       | 3061       | 3061       | 3061       |
| $b = -1$ | <i>ES0</i> | <i>ES1</i> | <i>HAR</i> | <i>AR1</i> |
| 平均       | 0.0098     | 0.0104     | 0.0106     | 0.0146     |
| 最大値      | 0.3381     | 0.5879     | 0.5105     | 0.9356     |
| 標準偏差     | 0.0244     | 0.0310     | 0.0279     | 0.0380     |
| 歪度       | 9.2539     | 12.3787    | 9.6937     | 10.6424    |
| 尖度       | 111.5964   | 195.2102   | 122.6855   | 174.7504   |
| 標本数      | 3062       | 3062       | 3062       | 3062       |
| $b = -2$ | <i>ES0</i> | <i>ES1</i> | <i>HAR</i> | <i>AR1</i> |
| 平均       | 0.1218     | 0.1237     | 0.1273     | 0.1707     |
| 最大値      | 0.5506     | 0.7121     | 0.5685     | 0.8637     |
| 標準偏差     | 0.1012     | 0.1036     | 0.1053     | 0.1430     |
| 歪度       | 1.2880     | 1.3960     | 1.2796     | 1.4295     |
| 尖度       | 4.6043     | 5.3772     | 4.5292     | 5.2193     |
| 標本数      | 3063       | 3063       | 3063       | 3063       |

## 結果の考察 (平均値)

- まず平均値に注目すると、インサンプルの表9では **ES1** と **HAR** がほぼ同値で低い値となっており、**AR1** はすべての  $b$  において最も高い値となっている。
- アウトオブサンプルの表10では、**ES0** の健闘が目立つ。
- この表から、アウトオブサンプルにおける誤差の平均値は、全体的な傾向として  $ES0 < ES1 < HAR < AR1$  となっていることが分かる。

## 結果の考察 (最大値, 標準偏差)

- 次に最大値に着目すると, 表 9 および表 10 共に,  $b$  の値によって結果がまちまちであるが, AR1 も他のモデルに比べて違いがそれ程大きくはない.
- 最後に標準偏差に関して見ると, インサンプルの表 9 では, すべての  $b$  において AR1 が最も高い値となっているが, 他の ES0, ES1, HAR は各  $b$  において大きな違いは見られない.
- そして, アウトオブサンプルの表 10 では, ES0(重み 1/3 の固定モデル) がすべての  $b$  において最も低い標準偏差の値となっている.

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.21/29

## モデルの序列化

- ブートストラップベースの対比較検定によるモデルの序列化を行う
- Hansen et al. (2011) が提案したモデル信頼集合 (Model Confidence Set)
- 候補となるモデルの組  $\mathcal{M}_0 = \{1, \dots, m_0\}$
- モデル  $i, j$  ( $i, j = 1, \dots, m_0$ ) と全ての  $t = 1, \dots, T$  で

$$d_{ij,t} = L(rv_{it}, \hat{rv}_{it}) - L(rv_{jt}, \hat{rv}_{jt})$$

を計算する.

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.22/29

- 各  $d_{ij,t}$  において, 帰無仮説

$$H_0 : E[d_{ij,t}] = 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{M}, i > j$$

を, モデル  $\mathcal{M} \in \mathcal{M}_0$  に対して検定. 初期値は  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$

- もし帰無仮説  $H_0$  が所与の有意水準 (たとえば 10%) で棄却されるならば, 予測力が最も低いモデルがこのモデルの組から除外される.
- この方法を,  $H_0$  が棄却できなくなるまで継続する.

- ここでは Hansen et al. (2011) に従い,  $H_0$  を評価するために以下のような範囲統計量を用いる

$$T_{R,k} = \max_{i,j \in \mathcal{M}} |t_{ij}| = \max_{i,j \in \mathcal{M}} \frac{|\bar{d}_{ij}|}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(d_{ij})}}$$

- ここで  $\bar{d}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T d_{ij}$  および  $\widehat{\text{var}}(\bar{d}_{ij})$  は, ブロック・ブートストラップ法より得られる.





- (インサンプル) 株式指数ではすべての推定期間で HAR が最良モデル最頻，次点が ES1.
- (インサンプル) 個別銘柄では，推定期間が 5 年以上のデータセットで HAR と ES1 が逆転し ES1 が最良モデル最頻.
- (アウトオブサンプル) 株式指数，個別銘柄共，推定期間が 5 年以上のデータセットを除き ES0 が最良モデル最頻.
- (アウトオブサンプル) 推定期間が 5 年以上のデータセットでは，株式指数では HAR，個別銘柄では ES1 がそれぞれ最良モデル最頻.

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.26/29

## まとめ

- 経験類似度モデル ES1 とその他の時系列モデルとの予測力比較を，4 つの誤差関数による MCS を用いることにより，複数の銘柄と推定予測期間におけるモデルの予測力を順位付けし，最良モデルの累積頻度を分析することで行った.
- 株式指数ではインサンプル，アウトオブサンプル共，HAR が最良モデルとしての頻度が最も高く，個別銘柄については，インサンプルでは ES1，アウトオブサンプルでは ES0 がそれぞれ最良モデルとしての頻度が最も高かった.
- アウトオブサンプルにおける ES0 の予測力が他のモデルと比較して高くなる傾向は，先行研究 Golosnoy et al. (2014) の結果と整合的である.

経験類似度に基づくボラティリティ予測 - p.27/29



- Corsi, F. (2009). A simple long memory model of realized volatility. *Journal of Financial Econometrics*, **7**, 174–196.
- Gilboa, I. and Schmeidler, D. (1995). Case-Based Decision Theory. *Quarterly Journal of Economics*, **110**, 605–639.
- Gilboa, I., Lieberman, O. and Schmeidler, D. (2011). A similarity-based approach to prediction. *Journal of Econometrics*, **162**, 124–131.
- Golosnoy, V., Hamid, A. and Okhrin, Y. (2014). The empirical similarity approach for volatility prediction. *Journal of Banking & Finance*, **40**, 321–329.

経験類似度に基づくボラティリティ予測 – p.28/29

- Hansen, P.R., Lunde, A. and Nason, J.M. (2011). The model confidence set. *Econometrica*, **79**, 453–497.
- Patton, A.J. and Sheppard, K. (2009). Evaluating volatility and correlation forecasts. In: T. G. Andersen, R. A. Davis, J. P. Kreiss and T. Mikosch (eds.), *Handbook of Financial Time Series*, Springer, 801–838.
- Patton, A. J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. *Journal of Econometrics*, **160**, 246–256.

経験類似度に基づくボラティリティ予測 – p.29/29

# 株価指数と先物間の因果関係変化の検証

木下 亮<sup>1</sup> 大屋幸輔<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 大阪大学大学院経済学研究科,

<sup>2</sup> 大阪大学大学院経済学研究科

2015年12月18日

「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再起的事象」研究報告会@東京大学

## 概要

- 1 因果性の計測に関する先行研究
- 2 因果性の変化に関する検定
- 3 実証分析
- 4 結語

## 1. 先行研究：因果性の計測

### 時間領域：

Granger (1963): 因果性の強さ  $\{ X_{kt} \} \Rightarrow \{ X_{jt} \}$ ,

$$1 - \text{var}_j[ Q ] / \text{var}_j[ Q(k) ]$$

- $Q$ : 確率過程  $\{ X_{it} \}$ ,  $i = 1, \dots, q$  の集合
- $Q(k)$ :  $Q$  から過程  $\{ X_{kt} \}$  を除外したもの
- $\text{var}_j[ Q ]$ : 過程  $\{ X_{jt} \}$  の  $Q$  による一期先予測誤差の分散

### 周波数領域：Granger の因果性測度のスペクトル分解

- Geweke (1982): 特定の仮定下での VAR モデル
- Hosoya (1991) より一般的な定常過程
- Yao and Hosoya (2000): 非定常過程への拡張

### 周波数領域での分析

▶ ISM: web decomp

- Diebold et al. (1998) : インパルス応答関数は、排除すべき周波数領域の情報も含んでいる
  - 景気循環モデルの評価：インパルス応答関数を周波数領域へ変換し、1 周期 2 年から 8 年までの周波数領域の情報だけを使って、モデルを評価する
- Otrok et al. (2002) : 消費の習慣形成
  - **spectral utility function** which decompose agents' preferences for consumption smoothness into preferences for smoothness by frequency.
  - For time-separable preferences, **spectral utility is flat** because in such cases agents care only about overall volatility in consumption and not about temporal distribution of volatility.
  - For habit preferences, **the spectral utility function is not flat**: agents are **less averse to low-frequency (persistent) fluctuations** than to high-frequency (less persistent) fluctuations.

## 因果性の変化についての検定法

- Tsukuda and Miyakoshi (1998) :

構造変化 & VAR モデルでの Granger 因果性検定

- モデルのパラメータが変化すれば因果性検定の結果も変わる.
- “money → income” was strong before 1980 but weakened or virtually disappeared after 1980.
- more properly, “no causality” was rejected before 1980

## 本報告では

- 周波数領域での因果性の変化の大きさを測る (Hosoya (1991) による因果性測度の利用)
- 因果性の変化の大きさに関する統計的測推

## 二変量 { X(t), Y(t) } に関する因果性測度

### Geweke (1982)

$$F_{Y \rightarrow X} = \log \left\{ \frac{\text{var}(\text{one step prediction error of } X(t) \text{ given } \{X(s)\}_{-\infty}^{t-1})}{\text{var}(\text{one step prediction error of } X(t) \text{ given } \{X(s), Y(s)\}_{-\infty}^{t-1})} \right\}$$

### Hosoya (1991)

$$M_{Y \rightarrow X} = \log \left\{ \frac{\text{var}(\text{one step prediction error of } X(t) \text{ given } \{X(s)\}_{-\infty}^{t-1})}{\text{var}(\text{one step prediction error of } X(t) \text{ given } \{X(s), Y_{0,-1}(s)\}_{-\infty}^{t-1})} \right\}$$

- $Y_{0,-1}(t)$ :  $Y(t)$  を  $\{X(s)\}_{-\infty}^t, \{Y(s)\}_{-\infty}^{t-1}$  へ射影したときの残差  
 $Y(t)$  固有のショック,  $X(t)$  と無相関
- $M_{Y \rightarrow X}$ : Granger's strength of causality for  $Y_{0,-1}(t) \rightarrow X(t)$  に対応



## 定常時系列モデルのスペクトル密度行列

スペクトル密度行列  $f(\lambda)$ ,  $\tilde{f}(\lambda)$  をもとめるためには  $\Lambda(e^{-i\lambda})$  が必要

- ARMA モデル  $A(L)Z(t) = B(L)\epsilon(t)$ ,  $\epsilon(t) \sim N(0, \Sigma)$

- $Z(t)$  のスペクトル密度行列

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \Lambda(e^{-i\lambda}) \Lambda(e^{-i\lambda})^*, \quad \Lambda(e^{-i\lambda}) = A(e^{-i\lambda})^{-1} B(e^{-i\lambda}) \Sigma^{1/2}$$

- $\{X(t), Y_{0,-1}(t)\}'$  のスペクトル密度行列  $\tilde{f}(\lambda)$

$$\tilde{f}(\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11}(\lambda) & \tilde{f}_{12}(\lambda) \\ \tilde{f}_{21}(\lambda) & \tilde{f}_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \tilde{f}_{11}(\lambda) &= f_{11}(\lambda), \quad \tilde{f}_{12}(\lambda) = \tilde{f}_{21}(\lambda)^*, \\ \tilde{f}_{21}(\lambda) &= \begin{bmatrix} -\Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} B(e^{-i\lambda})^{-1} A(e^{-i\lambda}) \begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) \end{bmatrix}, \\ \tilde{f}_{22}(\lambda) &= (\Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}) / (2\pi) \end{aligned}$$

## 2. 資産収益利率に関する因果性変化の検定

仮定

- $Z(t)$  は資産の (対数) 価格,  $\Delta Z(t)$  はその収益率 (リターン)
- 構造変化時点  $T_1 = cT$ ,  $c \in (0, 1)$ .
- $k = 1$  for  $t < T_1$ ,  $k = 2$  for  $T_1 \leq t$ ,  $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ ,  $\theta_k = \{\Psi_k, \Omega_k\}$ .

$$\Delta Z(t) = \sum_{j=1}^{p_k} \Psi_k(j) \Delta Z(t-j) + \epsilon(t), \quad \epsilon(t) \sim N(0, \Omega_k),$$

対数尤度の最大化

$$\max_{\theta} l(\theta|Z) = \max_{\theta_1} l_1(\theta_1|Z) + \max_{\theta_2} l_2(\theta_2|Z),$$

$$l_k(\theta_k|Z) = -\frac{T_k}{2} \det \Omega_k - \frac{1}{2} \sum_t (\Delta Z(t) - \mu_k(t))' \Omega_k^{-1} (\Delta Z(t) - \mu_k(t)),$$

$$\mu_k(t) = \sum_{j=1}^{p_k} \Psi_k(j) \Delta Z(t-j), \quad T_2 = T - T_1, \quad k = 1, 2.$$

## Test of zero causality: Yao and Hosoya (2000)

- $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta)$  の漸近分布

$$\sqrt{T} \left( M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta) \right) \xrightarrow{d} N(0, H(\theta))$$

$$\text{where } H(\theta) = \left( \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta)}{\partial \theta'} \right)' V(\theta) \left( \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta)}{\partial \theta} \right).$$

- Test statistic for  $\mathcal{H}_0 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta) = 0$  for a frequency  $\lambda$

$$W_f(\lambda) = T M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta})^2 / H(\hat{\theta}) \rightarrow \chi^2(1) \text{ under } \mathcal{H}_0 \text{ 厳密には?}$$

- Test for  $\mathcal{H}_0 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta) = 0$  for frequency band  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$

$$W_B = T \times \left( \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}) d\lambda \right)^2 / H_B(\hat{\theta}) \rightarrow \chi^2(1) \text{ under } \mathcal{H}_0 ?$$

$$H_B(\hat{\theta}) = \text{Acov} \left( \sqrt{T} (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}) d\lambda \right).$$

## Test of causality change: Kinoshita and Oya (2014)

Yao and Hosoya (2000) と同様に

$$\sqrt{T} \left( M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2) \right) \xrightarrow{d} N \left( M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2), \mathcal{V}(\lambda; \theta) \right).$$

$$\text{where } \mathcal{V}(\lambda; \theta) = \frac{1}{c} \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1)}{\partial \theta_1'} V(\theta_1) \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1)}{\partial \theta_1} + \frac{1}{(1-c)} \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2)}{\partial \theta_2'} V(\theta_2) \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2)}{\partial \theta_2}.$$

Test statistic for  $\mathcal{H}_0 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1) = M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2)$  for frequency  $\lambda$

$$W_f(\lambda) = T \left( M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2) \right)^2 / \mathcal{V}(\lambda; \hat{\theta}) \rightarrow \chi^2(1) \text{ under } \mathcal{H}_0,$$

## Test of causality change for frequency band ( block wise )

$\mathcal{H}_0 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1) = M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2)$  for frequency band  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$

$$W_B = T \times \left( M_{Y \rightarrow X}(\hat{\theta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\hat{\theta}_2) \right)^2 / \mathcal{V}(\hat{\theta}) \rightarrow \chi^2(1) \text{ under } \mathcal{H}_0,$$

where

$$M_{Y \rightarrow X}(\theta_k) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_k) d\lambda,$$

$$\mathcal{V}(\hat{\theta}) = \text{Acov} \left( \sqrt{T} \left( M_{Y \rightarrow X}(\hat{\theta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\hat{\theta}_2) \right) \right).$$

以降の分析では、周波数帯  $(0, \pi]$  を 6 分割する

$$f_1 = (0, \pi/6], f_2 = (2\pi/6, 3\pi/6], \dots, f_6 = (5\pi/6, \pi].$$

## 3. 実証分析：株価指数とその先物の因果関係

- Intraday data ( 15sec. int.): Nikkei 225 (index), Future mini (mini)



Fig.1: price (upper panel), return (lower panel)



## Block wise: 2013/03/21 – morning session

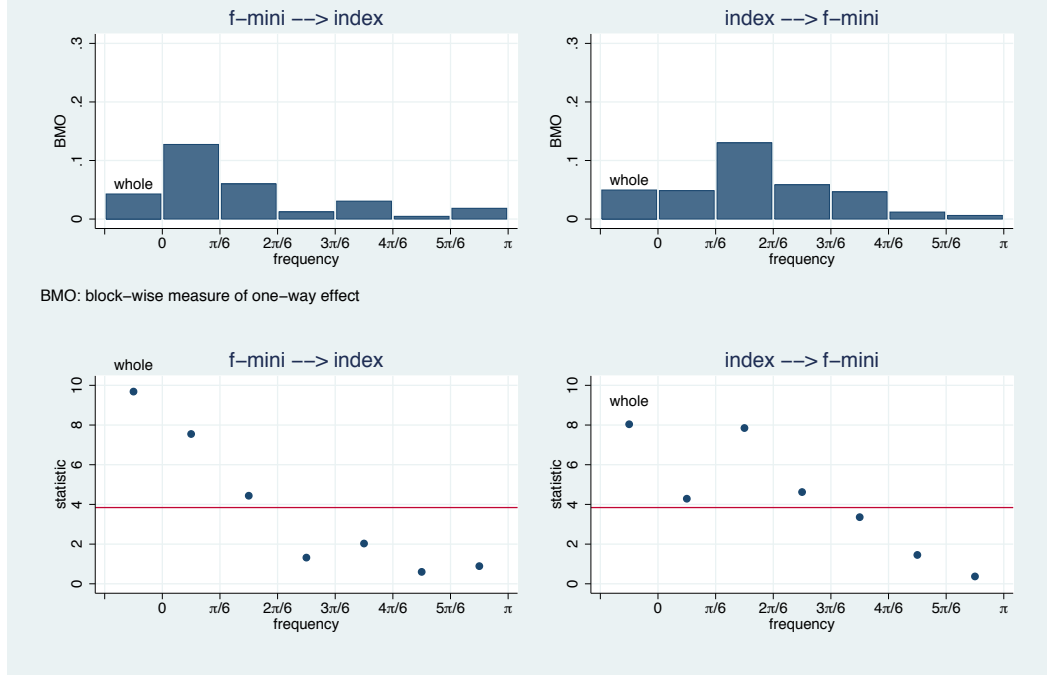


Fig.2: causality (upper panel), test stat. (lower panel)

## Block wise: 2013/03/21 – afternoon session

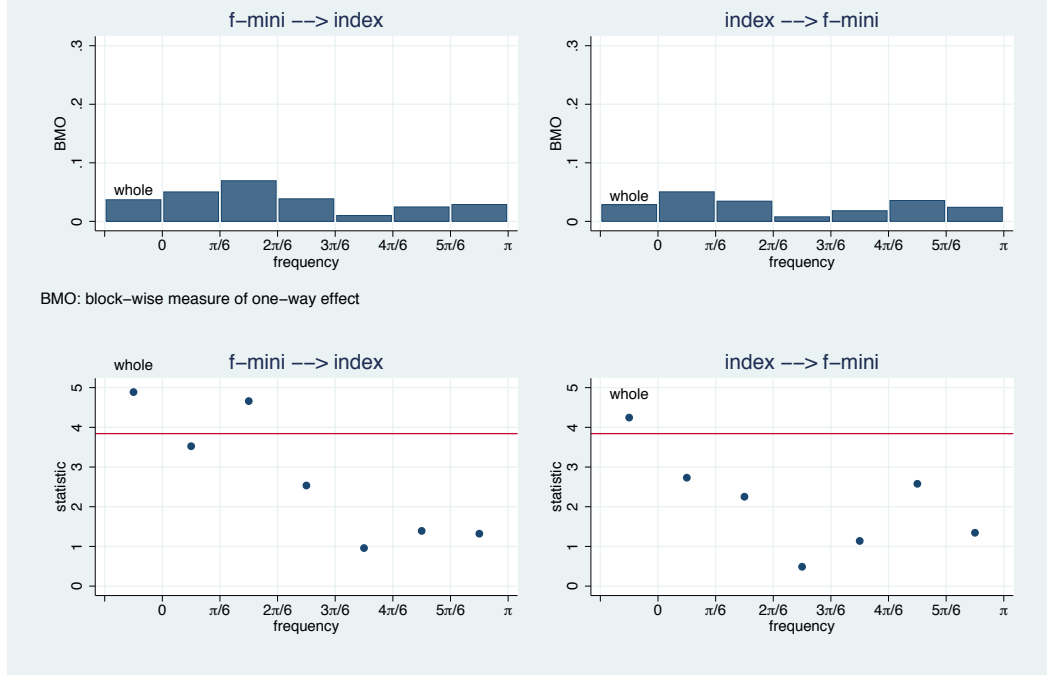
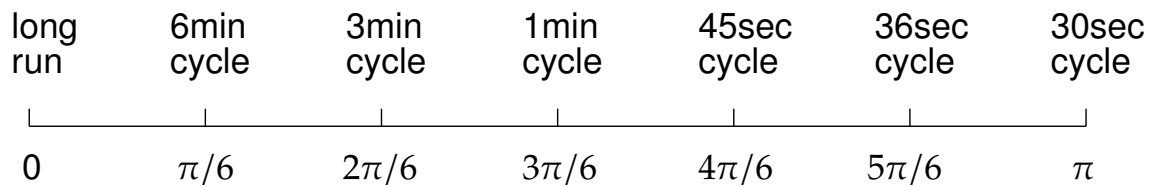


Fig.3: causality (upper panel), test stat. (lower panel)

## 周期と（角）周波数：15 秒間隔データの場合

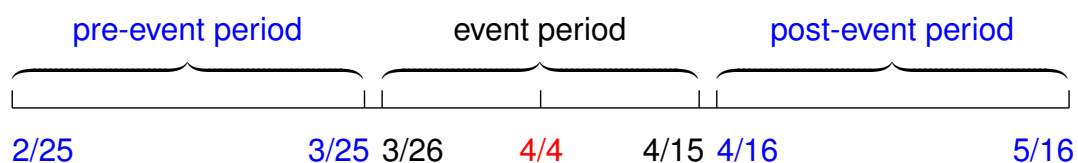


- (前場) **future mini → index**: 周波数帯  $(0, \pi/6]$  に大きな因果性測度  
検定結果 ⇒ (6 分以上の周期) において, 有意な因果性がある
- (前場) **index → future mini**: 周波数帯  $(\pi/6, 2\pi/6]$  に大きな因果性測度  
検定結果 ⇒ (3 分から 6 分の周期) において, 有意な因果性がある
- (後場) ほとんどの周波数帯で, 低い因果性水準

## 株価指数とその先物の因果性に関する実証分析

### 量的質的緩和 (QQE) は, 株式市場と先物市場にどのような影響を与えたか

- 15 秒間隔のデータ：日経平均と日経平均先物ミニ
- 標本期間：2013/02/25 - 2013/05/16
- 2013/04/04: イベント日 (BOJ による“QQE”の導入のアナウンス)
- 各日の因果性を推定 (モデルを推定し, 因果性を計算)
- イベントの前後のそれぞれの期間における因果性測度の標本平均をもとめる
- 各期間の因果性測度の平均に差があるかどうかを検定



Strength of Causality (f-mini -> index) : 2013/03/25 – 2013/05/16 morning

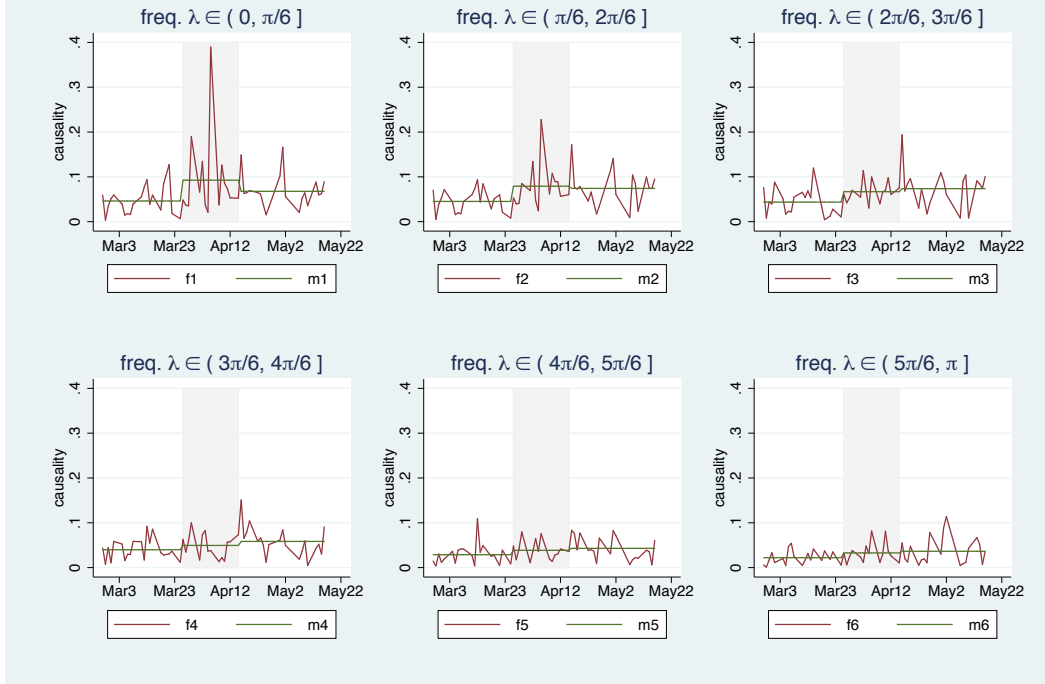


Fig.4a: causalities for each frequency band

Strength of Causality (f-mini -> index) : 2013/03/25 – 2013/05/16 afternoon

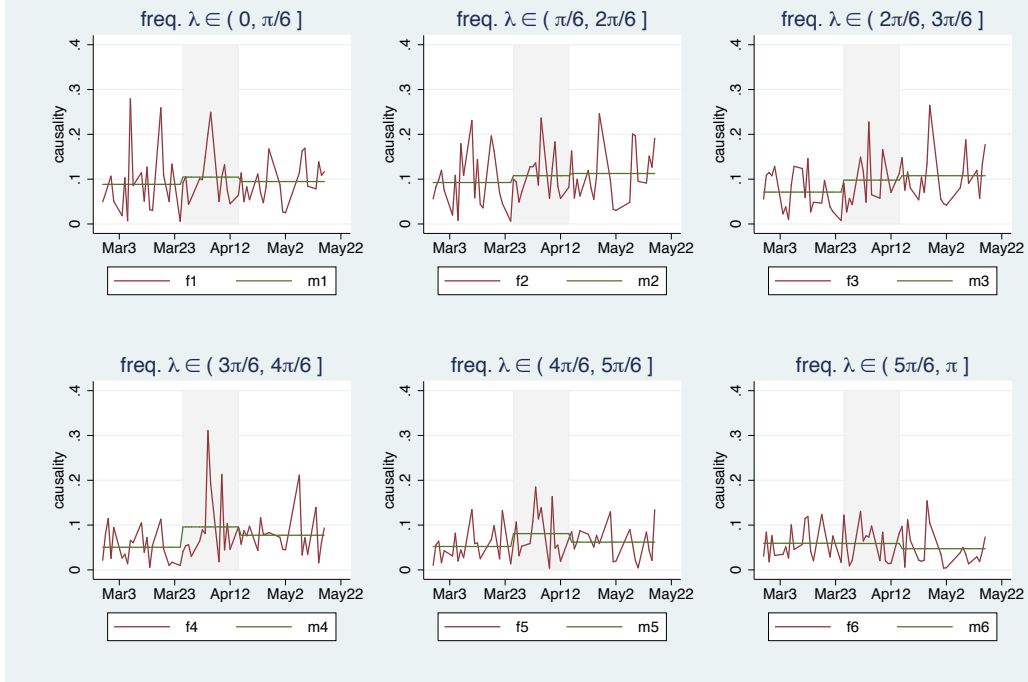


Fig.4b: causalities for each frequency band







## 4. 結語

### 要約

- 先行研究 Hosoya (1991), Yao and Hosoya (2000) をもとに、因果性の変化を計測する方法と、関連する検定を提案した。
- 政策変更による、異なる種類の資産収益率の因果関係の変化を検出することができた。
- 量的質的金融緩和により、先物から指数（現物）への因果性が有意に強くなっていることが確かめられた。
- その増加は、全周波数帯で見られるが、特に中位の周波数帯で顕著であった。

### 今後の課題

- 未知の変化点
- （今回は説明していない数値実験で確認されている）小標本での検定統計量にサイズにおけるバイアス

## References

- Diebold, F.X., Ohanian, L.E. and Berkowitz, J. (1998) "Dynamic Equilibrium Economies: A Framework for Comparing Models and Data," *Review of Economic Studies*, **65**, 433-451.
- Geweke, J. (1982), "Measurement of linear dependence and feedback between multiple time series," *Journal of the American Statistical Society*, **77**, 303-314.
- Granger, C.W.J. (1963), "Economic processes involving feedback," *Information and Control*, **6**, 28-48.
- Granger, C.W.J. and Lin, J.L.(1995), "Causality in the long run," *Econometric Theory*, **11**, 530-536.
- Hosoya, Y.(1991), "The decomposition and measurement of the interdependency between second-order stationary processes," *Probability Theory*, **88**, 429-444.
- Kinoshita, R. and Oya, K.(2014), "Measurement of causality change between Multiple time series," *Journal of the Japan Statistical Society Japanese Issue*, **44**, Series J, 19-40.
- Otrok, C., Ravikumar, B. and Whiteman, C.H. (2002) "Habit Formation: A Resolution of the Equity Premium Puzzle," *Journal of Monetary Economics*, **49**, 1261-1288.
- Tsukuda, Y. and Miyakoshi, T.(1998), "Granger causality between money and income for the Japanese economy in the presence of structural break," *Japanese Economic Review*, **49**, 191-209.
- Yao, F. and Hosoya, Y.(2000), "Inference on one-way effect and evidence in Japanese macroeconomic data," *Journal of Econometrics*, **98**, 225-255.

Strength of Causality (index  $\rightarrow$  f-mini) : 2013/03/25 – 2013/05/16 morning

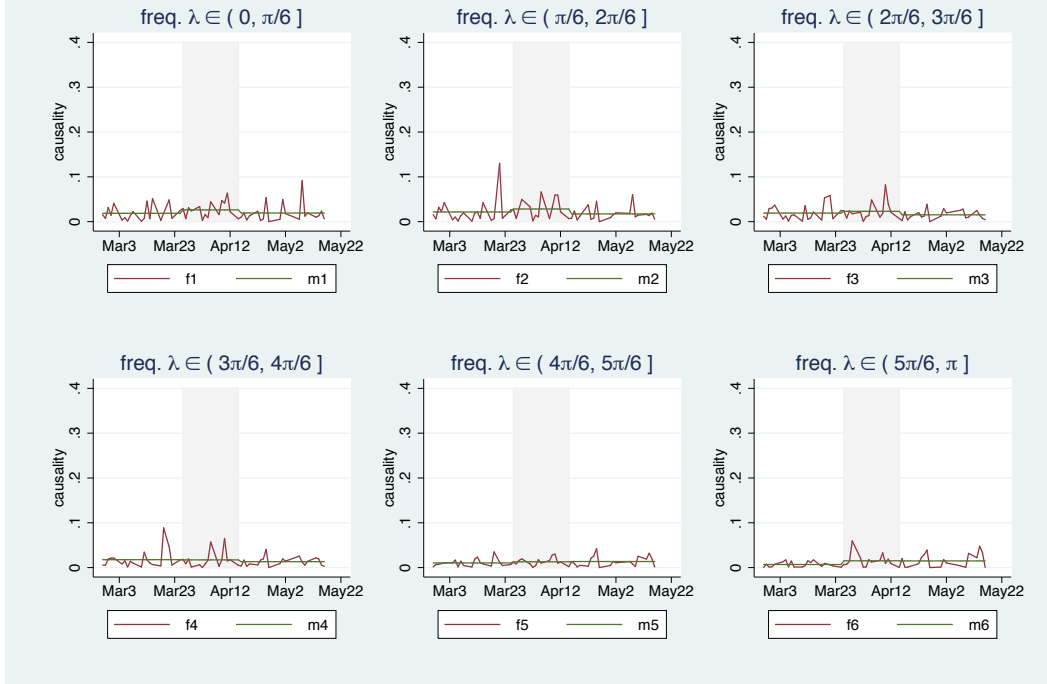


Fig.4c: causalities for each frequency band

Strength of Causality (index  $\rightarrow$  f-mini) : 2013/03/25 – 2013/05/16 afternoon

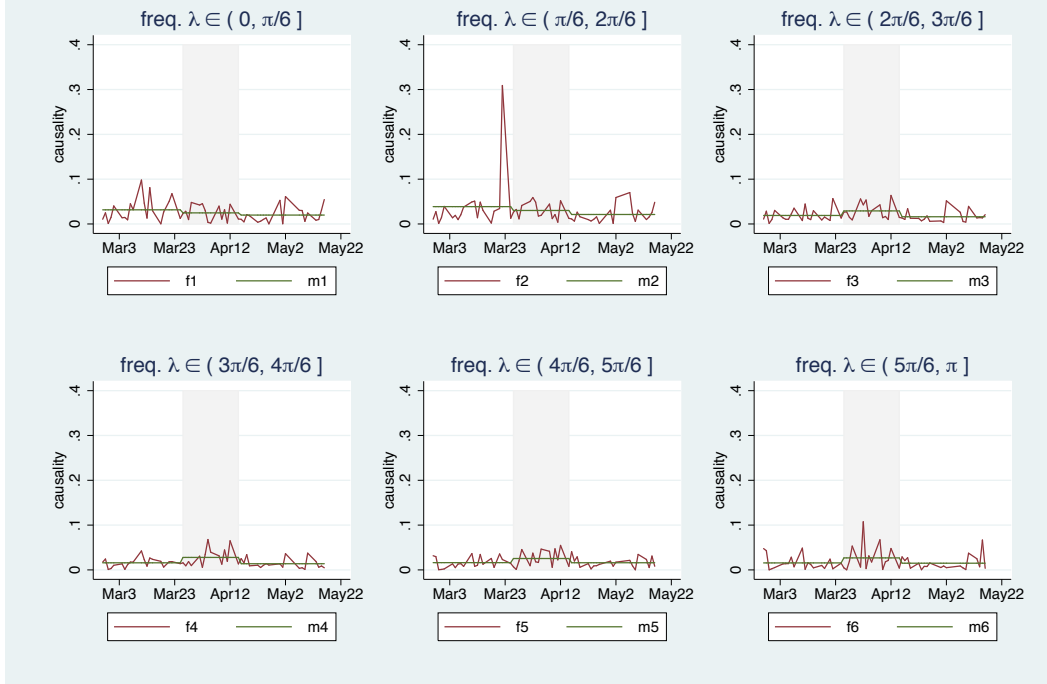


Fig.4d: causalities for each frequency band



Causality diff. (post event) minus (pre event), afternoon

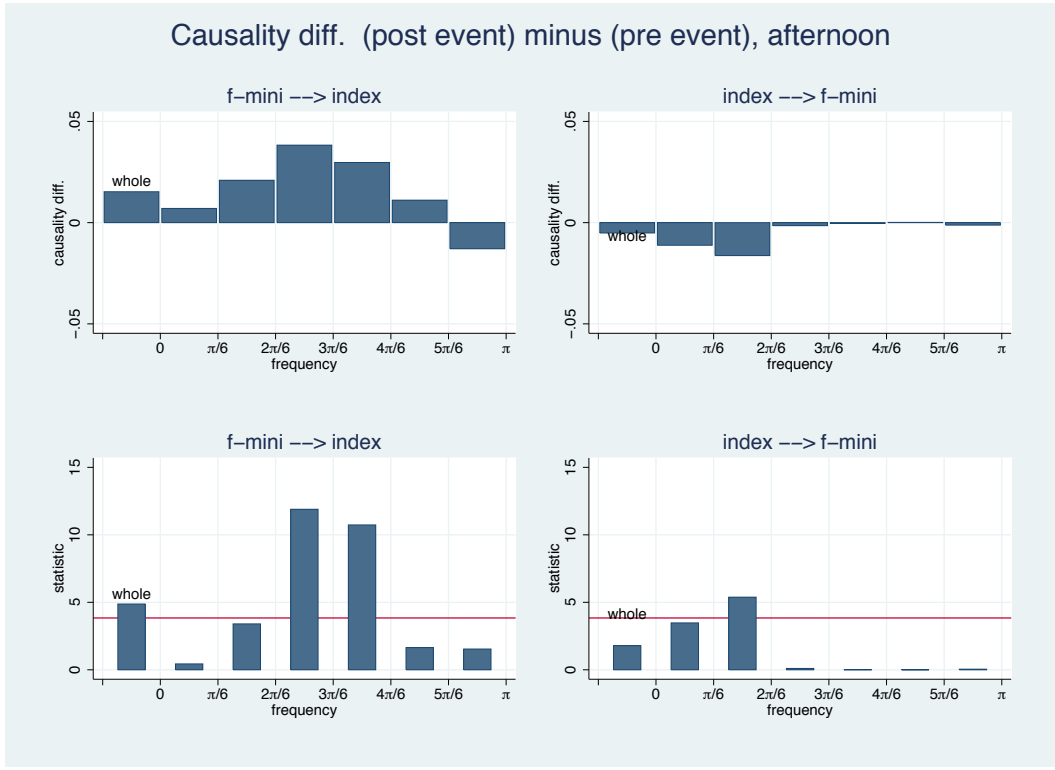


Fig.6 (goba): averages of causality differences for each frequency band