

Effects of Jump and Noise via the Small Noise Asymptotics in High-Frequency Econometrics

栗栖大輔¹, 国友直人²

¹ 東京大学・経済・M2

² 東京大学

2015年12月18日

経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再帰的事象

Outline

- Introduction
- Effects of Jump and Noise on Realized Volatility
- Effects of Jump and Noise on Higher Order Functionals
- Effects of Noise on Jump Test
- Simulation
- Conclusion

1. Introduction 1/2

- 高頻度データを用いたリスク指標 (volatility) の推定や jump の検定等の統計的手法がこれまで開発されてきたが, 実務上重要である micro-market noise が存在する場合また noise と jump が同時に存在する場合における既存の方法の信頼性についてはよく知られていない.
- 本報告では noise が存在する下での realized volatility を含む関数のクラスに対する漸近的性質とその応用として, jump の有無の検定統計量に関して noise がある場合の misspecification の影響について報告する.

1. Introduction 2/2

- 具体的には"small-noise" の設定のもと、ジャンプとノイズが存在する場合において各種統計量の漸近的性質が, noise が存在しない場合と比較してどのように影響を受けるか, ということについて報告する.
- また数値実験の結果をもとに上記の結果の妥当性について述べる.

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 1/7

- まずは Realized volatility を用いた quadratic variation (QV) の推定に関して述べる.
- 金融市場のデータの観測期間を $[0, T]$ とし, T を固定する (今の場合 $T = 1$ とする).

$$Y(t_i^n) = X(t_i^n) + \epsilon_n v(t_i^n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

を時刻 $t_i^n \in [0, 1]$ における (log-)price の観測値とし, $X(t)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ 上の連続確率過程

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma_s dB_s \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (2)$$

とする. ここで B_s は標準 Brown 運動, micro-market noise $v(t_i^n)$ は $X(t)$ と独立な i.i.d. の確率変数かつ $E[v_1] = 0$, $E[v_1^2] = 1$, $E[v_1^4] = 3 + \kappa_4 < \infty$. ϵ_n は n に依存するパラメータの列.

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 2/7

- 以下では micro-market noise が "small-noise" 即ち $\epsilon_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ であると仮定し, データの観測は regular scheme ($t_i^n - t_{i-1}^n = 1/n$) であるとする.
- このとき, realized volatility を用いて QV を推定することを考える.

$$V_n(2) = \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n Y)^2 \quad (3)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^2 + 2\epsilon_n \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)(\Delta v_i) + \epsilon_n^2 \sum_{i=1}^n (\Delta v_i)^2 \quad (4)$$

$$= (I) + (II) + (III) \quad (5)$$

ここで $\Delta_i^n Y = Y(t_i^n) - Y(t_{i-1}^n)$.

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 3/7

- 特に $n\epsilon_n^2 = c + O(1/n)$ ($c > 0$) とし, volatility を以下のように仮定する.

$$\sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t \mu_s^\sigma ds + \int_0^t \omega_s^\sigma dB_s^\sigma \quad (6)$$

ここで B_s^σ は B_s と相関し得る Brown 運動であり, 簡単のため $\mu_s^\sigma, \omega_s^\sigma$ は bounded とする. このとき, 確率過程の離散化に伴う誤差の評価として次の結果を得る.

Lemma 1

For $i = 1, \dots, n$, and $t_{i-1}^n < t \leq t_i^n$,

$$\sigma_t^2 - \sigma^2(t_{i-1}^n) = \int_{t_{i-1}^n}^t [2\sigma_s \mu_s^\sigma + (\omega_s^\sigma)^2] ds + \int_{t_{i-1}^n}^t 2\sigma_s \omega_s^\sigma dB_s^\sigma \quad (7)$$

$$\int_0^1 \sigma_s^2 ds = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2(t_{i-1}^n) + O_p(1/n) \quad (8)$$

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 4/7

Lemma 2

For $i = 1, \dots, n$ we have

$$\begin{aligned}\Delta_i^n X &= \sigma(t_{i-1}^n)(B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)) + O_p(1/n) & (9) \\ &= \sigma(t_{i-1}^n) \frac{1}{\sqrt{n}} Z_i + O_p(1/n)\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^2 - \int_0^1 \sigma_s^2 ds = 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} [X_s - X_{t_{i-1}^n}] dX_s = O_p(1/\sqrt{n}) \quad (10)$$

where $Z_i \sim N(0, 1)$

Lemma 1, 2 を用いて $V_n(2)$ の分解の各項を評価することを考える。

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 5/7

Lemma 1,2 を用いて $V_n(2)$ を書き下す.

$$V_n(2) = (I) + (II) + (III)$$

$$(I) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1}^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1}^2 (Z_i^2 - 1) \right] + O_p(1/n) \quad (11)$$

$$(II) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1} Z_i (v_i - v_{i-1}) \right] + O_p(1/n) \quad (12)$$

$$(III) = 2c + \frac{c}{\sqrt{n}} \times \sqrt{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - v_{i-1})^2 - 2 \right] \quad (13)$$

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 6/7

このとき,

$$U_{0n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1}^2 + 2c \quad (14)$$

$$U_{1n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1}^2 (Z_i^2 - 1) \right] \quad (15)$$

$$U_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1} Z_i (v_i - v_{i-1}) \right] \quad (16)$$

$$U_{3n} = \frac{c}{\sqrt{n}} \times \sqrt{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - v_{i-1})^2 - 2 \right] \quad (17)$$

とおくと, $U_{0n} \xrightarrow{P} \int_0^1 \sigma_s^2 ds + 2c$ であり, U_{1n}, U_{2n}, U_{3n} の各項を評価することで次の定理を得る.

2.1 Effects of Noise on RV (Simple case) 7/7

Theorem 1

Small-noise の仮定の下, $U_0 = \int_0^1 \sigma_s^2 ds + 2c$ とすると,

$$\sqrt{n}(V_n(2) - U_0) \xrightarrow{\text{stably}} U = U_1 + U_2 + U_3 \quad (18)$$

ここで U_i ($i = 1, 2, 3$) は \mathcal{F} -conditionally mutually independent Gaussian r.v. with zero mean and variance

$$E[U_1^2 | \mathcal{F}] = [2 + \kappa_4] \int_0^1 \sigma_s^4 ds,$$

$$E[U_2^2 | \mathcal{F}] = 8c \int_0^1 \sigma_s^2 ds,$$

$$E[U_3^2 | \mathcal{F}] = [12 + 4\kappa_4]c^2$$

2.2 Effects of Jump and Noise on RV 1/2

次に jump を含む場合を考えるために $X(t)$ は以下の Ito-semimartingale に従うとする.

$$\begin{aligned} X(t) = X(0) &+ \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \\ &+ \int_s \int_{|x| < 1} \delta(s, x) (\mu - \nu)(ds, dx) + \int_s \int_{|x| > 1} \delta(s, x) \mu(ds, dx) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで $\delta(s, x)$ は predictable function, $\mu(\cdot)$ は jump measure, $\nu(\cdot)$ は μ の compensator (上記の表現は Jacod and Protter (2012, Section 2) に基づく). このとき Theorem 1 における U_i ($i=0,1$) はそれぞれ次のようになる.

2.2 Effects of Jump and Noise on RV 2/2

$$U_0 = \int_0^1 \sigma_s^2 ds + \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X)^2 + 2c \quad (20)$$

$$E[U_1^2 | \mathcal{F}] = [2 + \kappa_4] \int_0^1 \sigma_s^4 ds + 4 \sum_{0 \leq s \leq 1} \sigma_s^2 (\Delta X)^2 \quad (21)$$

ここで U_1 は \mathcal{F} -conditionally mutually independent r.v. with zero mean. さらに v_i に対して正規性を仮定すると, U_2 は \mathcal{F} -conditionally Gaussian r.v. with zero mean であり,

$$E[U_2^2 | \mathcal{F}] = 8c \left[\int_0^1 \sigma_s^2 ds + \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X)^2 \right] \quad (22)$$

以上の結果は jump に関する項を除くと Theorem 1 と一致する。

3. Effects of Noise on $V_n(4)$ 1/6

- Noise が small noise であるときには, $V_n(p)$ 特に $V_n(4)$ の漸近的な性質についても調べることができる.

$$\begin{aligned} V_n(4) &= \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n Y)^4 & (23) \\ &= \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^4 + 4\epsilon_n \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^3 (\Delta v_i) \\ &\quad + 6\epsilon_n^2 \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^2 (\Delta v_i)^2 + 4\epsilon_n^3 \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X) (\Delta v_i)^3 \\ &\quad + \epsilon_n^4 \sum_{i=1}^n (\Delta v_i)^4 \end{aligned}$$

- Micro-market noise は small-noise $n\epsilon_n^2 = c + O(1/n)$ であるとする.

3. Effects of Noise on $V_n(4)$ 2/6

$V_n(4)$ の漸近的性質を調べるにあたり, $V_n(2)$ のときと同様に確率過程の離散化に伴う誤差を評価する必要がある. 以下の補題は semimartingale に対する伊藤の公式を用いることで得られる.

Lemma 3

X が (19) に従うとき, 任意の正の整数 $p \geq 2$ に対して以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^p - \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^p \quad (24) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} p(X_{s-} - X_{t_{i-1}^n})^{p-1} dX_s + \frac{p(p-1)}{2} (X_{s-} - X_{t_{i-1}^n})^{p-2} d[X_s, X_s]^c \right] \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{t_{i-1}^n \leq s < t_i^n} \sum_{j=2}^{p-1} p C_j (X_{s-} - X_{t_{i-1}^n})^{p-j} (\Delta X_s)^j = O_p(1/\sqrt{n}) \end{aligned}$$

ここで $[X_s, X_s]^c$ は X の 2 次変分の連続部分.

3. Effects of Noise on $V_n(4)$ 3/6

Lemma 3 を用いて

$$V_n(4) - \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^4 = U_{1n} + U_{2n} + U_{3n} + U_{4n} + U_{5n}$$

where

$$U_{1n} = \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^4 - \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^4$$

$$U_{2n} = 4\epsilon_n \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^3 (\Delta v_i), \quad U_{3n} = 6\epsilon_n^2 \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X)^2 (\Delta v_i)^2$$

$$U_{4n} = 4\epsilon_n^3 \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n X) (\Delta v_i)^3, \quad U_{5n} = \epsilon_n^4 \sum_{i=1}^n (\Delta v_i)^4$$

の各項を評価すると, $U_{1n} = U_{2n} = O_p(1/\sqrt{n})$, $U_{3n} = U_{4n} = O_p(1/n)$, $U_{5n} = O_p(1/n\sqrt{n})$ となり, 次の定理を得る.

3. Effects of Noise on $V_n(4)$ 4/6

Theorem 2

$U_0 = \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^4$ とすると,

$$\sqrt{n}(V_n(4) - U_0) \xrightarrow{\text{stably}} U = U_1 + U_2 \quad (25)$$

U_1, U_2 は \mathcal{F} -conditionally mutually independent r.v. with zero mean with

$$E[U_1^2 | \mathcal{F}] = 16 \sum_{0 \leq s \leq 1} \sigma_s^2 (\Delta X_s)^6,$$

$$E[U_2^2 | \mathcal{F}] = 32c \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^6.$$

特に v_i に正規性を仮定すれば U_2 は \mathcal{F} -conditionally Gaussian r.v. with zero mean.

3. Effects of Noise on $V_n(4)$ 5/6

また X が diffusion type であるときには $U_{jn} = O_p(1/\sqrt{n})$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) となり, 以下に示すように $V_n(4)$ の漸近分布は複雑になる.

Remark

X が continuous Ito-semimartigale であるとき, $V_n(4) = \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n Y|^4$,
 $U_0^*(4) = m_4 \int_0^1 \sigma_s^4 ds + 12c \int_0^1 \sigma_s^2 ds + cE[(\Delta v)^4]$ とする.
このとき,

$$\begin{aligned} & \sqrt{n}(nV_n(4) - U_0^*(4)) \\ & \xrightarrow{\text{stably}} U^*(4) = U_1^*(4) + U_3^*(4) + U_3^*(4) + U_4^*(4) + U_5^*(4) \end{aligned} \quad (26)$$

m_k は標準正規分布の k 次モーメント.

3. Effects of Noise on $V_n(4)$ 6/6

ここで $U_i^*(4)$ ($i=1,2,3,4,5$) は \mathcal{F} -conditionally mutually independent Gaussian r.v. with zero mean and

$$E[U_1^*(4)^2|\mathcal{F}] = (m_8 - m_4^2) \int_0^1 \sigma_s^8 ds \quad (27)$$

$$E[U_2^*(4)^2|\mathcal{F}] = 480c \int_0^1 \sigma_s^6 ds \quad (28)$$

$$E[U_3^*(4)^2|\mathcal{F}] = 72c^2[(m_4 - m_2^2)\text{Var}(\Delta v)^2 + 4E[v_1^4]m_2^2] \int_0^1 \sigma_s^4 ds \quad (29)$$

$$E[U_4^*(4)^2|\mathcal{F}] = 16c^3\text{Var}[(\Delta v)^3] \int_0^1 \sigma_s^2 ds \quad (30)$$

$$E[U_5^*(4)^2|\mathcal{F}] = c^4\text{Var}[(\Delta v)^4] \quad (31)$$

4. Effects of Noise on Jump Test 1/5

- Jump test in Ait-Saharia and Jacod (2009)

Ait-Saharia and Jacod (2009) では, 検定統計量

$$S_n(p, k) = \frac{V_n(p, k)}{V_n(p, 1)} \left(V_n(p, k) = \sum_{i=1}^{[n/k]} |\Delta_i^n X(k)|^p \right) \quad (32)$$

を用いて離散観測されたデータから jump の有無を検定する方法が提案されている.

$$\Omega^j = \{ \omega : s \mapsto X_s(\omega) \text{ が } [0,1] \text{ 上で不連続} \}$$

$$\Omega^c = \{ \omega : s \mapsto X_s(\omega) \text{ が } [0,1] \text{ 上で連続} \}$$

として,

4. Effects of Noise on Jump Test 2/5

Proposition (Ait-Saharia and Jacod (2009))

(i) In the restriction to the set Ω^j ,

$$\sqrt{n}(S_n(4, 2) - 1) \xrightarrow{\text{stably}} \text{N} \left(0, \frac{8 \sum_{0 \leq s \leq 1} \sigma_s^2 (\Delta X_s)^6}{\left(\sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^4 \right)^2} \right) \quad (33)$$

(ii) In the restriction to the set Ω^c ,

$$\sqrt{n}(S_n(4, 2) - 2) \xrightarrow{\text{stably}} \text{N} \left(0, \frac{160 \int_0^1 \sigma_s^8 ds}{3 \left(\int_0^1 \sigma_s^4 ds \right)^2} \right) \quad (34)$$

(i), (ii) を用いて, 帰無仮説 H_0 : jump 有り, H_0 : jump 無し に対してそれぞれ検定が実行できる.

4. Effects of Noise on Jump Test 3/5

- Ait-Saharia and Jacod (2009) で提案された jump の検定統計量の noise による影響を調べる. このため, 以下の統計量を考える.

$$W_n(p, k) = \sqrt{n} \left[\sum_{i=1}^{[n/k]} |\Delta_i^n Y(k)|^p - \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n Y(1)|^p \right] \quad (35)$$

ここで $\Delta_i^n Y(k) = (X_{ik\Delta_n} - X_{(i-1)k\Delta_n}) + \epsilon_n(v_{ik\Delta_n} - v_{(i-1)k\Delta_n})$, $v_{ik\Delta_n}$ は i.i.d. noise, $\Delta_n = 1/n$. このとき, Lemma 3 と 次の Theorem 3 の結果から次の定理を得る.

4. Effects of Noise on Jump Test 4/5

Theorem 3

X を Ito-semimartingale とし, $p > 3$, $k \geq 2$ とする. このとき, small noise かつ $E[v_1^8] < \infty$ の仮定の下,

$$W_n(p, k) \xrightarrow{\text{stably}} U = U_1 + U_2 \quad (36)$$

ここで U_i ($i = 1, 2$) は \mathcal{F} -conditionally mutually independent Gaussian r.v. with zero mean and

$$E[U_1^2 | \mathcal{F}] = p^2(k-1) \sum_{0 \leq s \leq 1} \sigma_s^2 (\Delta X_s)^{2(p-1)},$$
$$E[U_2^2 | \mathcal{F}] = 2cp^2(k-1) \sum_{0 \leq s \leq 1} (\Delta X_s)^{2(p-1)}.$$

4. Effects of Noise on Jump Test 5/5

- 以上の結果は $c = 0$ とすると Ait-Saharia and Jacod (2009) の結果と一致する.
- X が diffusion type のときも漸近分布が導けるが, Theorem 2 の Remark で述べたように結果は複雑になる.
- Theorem 3 より, $S_n(p, k) = V_n(p, k)/V_n(p, 1)$ とすると次の系を得る.

Corollary 4

X を Ito-semimartingale とすると, Theorem 3 の仮定の下, $p = 4, k = 2$ として以下成り立つ.

$$\sqrt{n}[S_n(p, k) - 1] \xrightarrow{\text{stably}} S = \frac{U_1 + U_2}{U_0^2} \quad (37)$$

ここで U_i ($i = 0, 1, 2$) は Theorem 2 で定義されたもの.

5. Simulation

- 以上の結果を数値実験により確かめる.
- まず $S_n(4, 2)$ がどのように noise の影響を受けるかを紹介する.
- Theorem 1, 2, Corollary 4 に対していくつかの場合における simulation 結果を紹介.

5. Simulation

X は以下の data generating process に従って生成.

$$\text{(Case 1) } dX_t = \sigma_t dB_t$$

$$\text{(Case 2) } dX_t = \sigma_t dB_t + dJ_t^{CP}$$

$$\text{(Case 3) } dX_t = \sigma_t dB_t + dJ_t^S$$

$$d\sigma_t^2 = \kappa(\alpha - \sigma_t^2)dt + \sigma_t dB_t^\sigma$$

B_t : Brownian motion,

J_t^{CP} : compound Poisson (λ (intensity) = 10, jump size = $N(0, 5)$),

J_t^S : β -stable process with $\beta = 1$,

$\kappa = 5$, $\alpha = 0.2$, $\rho = E[dB_t dB_t^\sigma] = -0.5$.

5. Simulation

noise の影響を見るために以下の場合について jump test をそのまま適用した図を示す.

X_0 : Diffusion + Poisson jump,	X_1 : Diffusion,
Y_0 : Diffusion + Poisson jump + ϵ_0 ,	Y_1 : Diffusion + ϵ_0 ,
V_0 : Diffusion + Poisson jump + ϵ_1 ,	V_1 : Diffusion + ϵ_1 ,
W_0 : Diffusion + Poisson jump + ϵ_2 ,	W_1 : Diffusion + ϵ_2

where

$\epsilon_0 \sim N(0, 0.05)$ (large noise),
 $\epsilon_1 \sim \Delta_n^{1/2} N(0, 1)$ (type-1 small noise),
 $\epsilon_2 \sim \Delta_n^{1/4} N(0, 1)$ (type-2 small noise)

5.1 Effects of Noise on $S_n(4, 2)$ (Case 1)

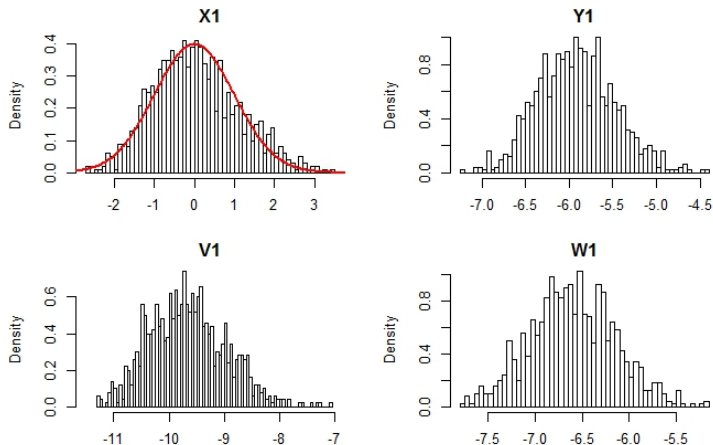


Figure: Effect of noise for CLT (diffusion)

5.1 Effects of Noise on $S_n(4, 2)$ (Case 2)

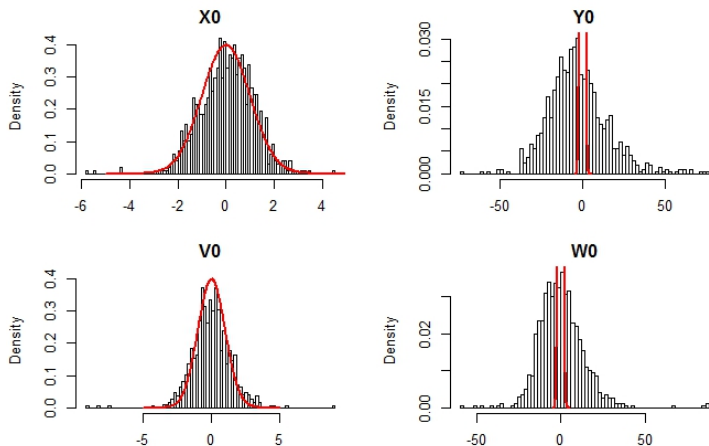


Figure: Effect of noise for CLT (jump)

5.2 Theorem 1 (Case 1)

$\Delta_n = 1/1000$, $c = 100$, シミュレーション回数 1000 回

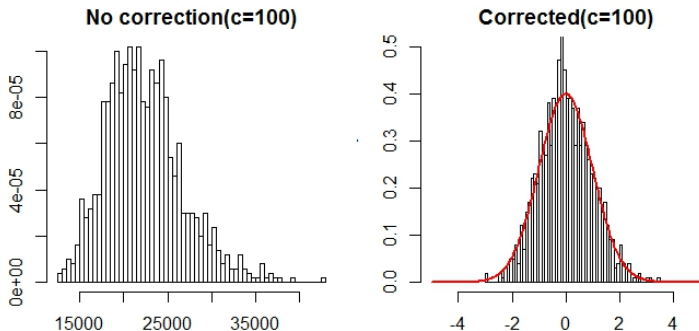


Figure: Effect of noise for CLT (diffusion)

5.2 Theorem 1 (Case 2)

$\Delta_n = 1/1000$, $c = 100$, シミュレーション回数 1000 回

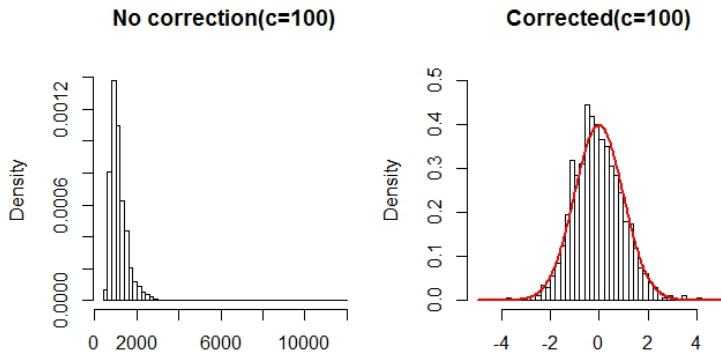
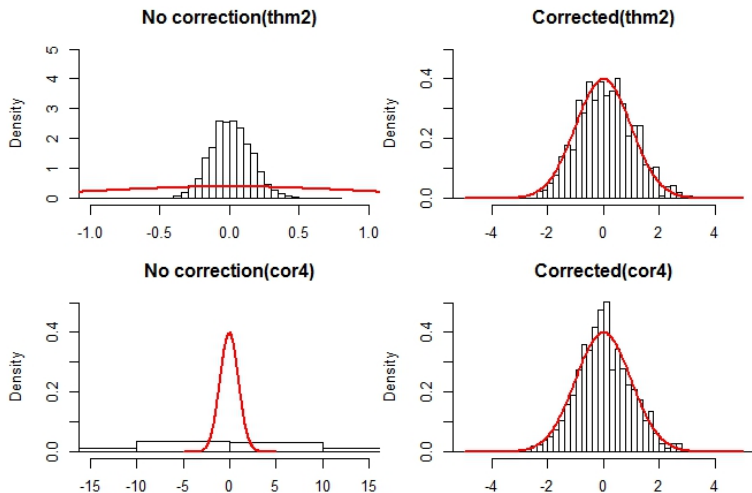


Figure: Effect of noise for CLT (jump)

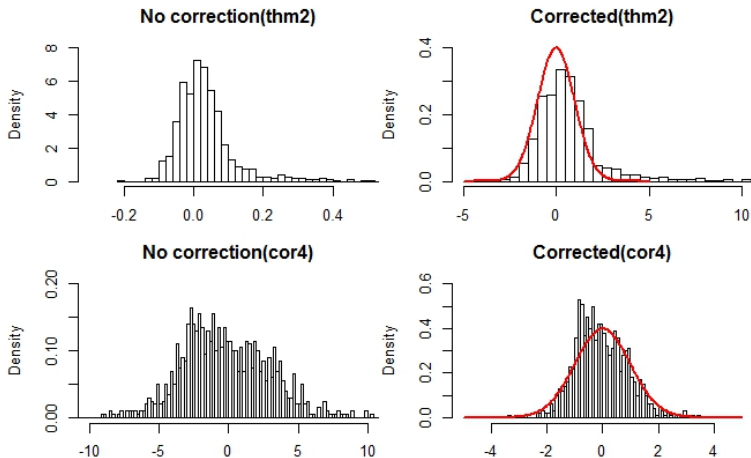
5.2 Theorem 2, Corollary 4 (Case 2)

$\Delta_n = 1/5000$, $c = 10$, シミュレーション回数 1000 回



5.2 Theorem 2, Corollary 4 (Case 3)

$\Delta_n = 1/5000$, $c = 1$, シミュレーション回数 1000 回



5.3 Remarks

- ϵ_0 (large noise), ϵ_2 (type-2 small noise) のケースでは noise が支配的になり, 漸近的な近似は成り立たない.
- Diffusion case では比較的小標本であっても漸近分布の良い近似を与える (Theorem 1).
- Jump を含むケースでは diffusion case と比較してより多くのデータが必要になる (Theorem 2, Corollary 4).
- Jump の頻度に関して, finite activity よりも infinite activity の方がより多くのデータが必要 (Theorem 2, Corollary 4).

6. Conclusion

本研究では、高頻度データ分析における jump と noise の影響を調べるために "small-noise" の設定の下で, realized volatility を含む関数のクラスである $V_n(p, k)$ の漸近的性質を明らかにした.

また数値実験により, 以下のことが確認できた.

- $V_n(p, k)$ を用いた既存の QV の推定や jump の検定法は noise の有無に非常に敏感である.
- 今回導出した漸近的性質は比較的小標本であっても漸近分布の良い近似を与える.

今後の課題としては, Bipower variation, Joint jump test に対する影響 etc.

References

- Ait-Saharia, Y. and Jacod, J. (2009), Testing for Jumps in a Discretely Observed Process, *Annals of Statistics*, 37-1, 184-222.
- Jacod, J. and Protter, P. (2012), *Discretization of Processes*, Springer.
- Kunitomo, N. and Kurisu, D. (2015), On Effects of Jump and Noise in High-Frequency Financial Econometrics, Discussion Paper CIRJE-F-996, Graduate School of Econometrics, University of Tokyo.

Intensity and G-Causality in Financial Econometrics : an empirical analysis

江原 斐夫

東京大学経済学研究科経済理論専攻統計学コース

2015年12月18日

※この報告は東京大学経済学研究科の国友直人教授・栗栖大輔氏との共同研究に基づくものである。

はじめに (1)

2008年のリーマンショックに代表されるような大規模な金融危機に対するリスク管理手法の研究が多くなされており、稀にしか起きない金融危機をどのようにモデル化および分析するかということに注目が集まる。

金融危機時における市場の顕著な特徴は、

1. 急激かつ大幅な資産価格の下落（以降ではジャンプと呼ぶ）
2. そのようなジャンプがもたらす同じ市場もしくは市場間における下落の連鎖および伝播

の2つである。言い換えれば、稀にしか起きないような大幅な資産価格の下落を rare event として捉え、それをジャンプと呼んでいるのである。

今回の発表では、この2つの論点を取り込むことのできるモデルとして、確率過程のクラスの一つである点過程 (point process) モデルを提案しそれを用いた実証分析を行う。

はじめに (2)

点過程モデルにおいて最も単純なモデルはポアソン過程であり、その概念を拡張したものとして Self-Exciting Model や Mutually-Exciting Model がある。

それらのモデルは地震の予測などに用いられ、先ほどの金融危機時における特徴をうまく取り込むことができる可能性があると考えられる。

ここでは、点過程モデルを用いた予測や市場間の因果関係の分析を紹介する。

今回の発表は大きく4つに分かれる。

1. 点過程モデルおよびデータセットの説明
2. モデルのフィット
3. 条件付き確率を基準にした Causality Analysis
4. 日米欧市場における将来の「ジャンプ (rare event)」の予測

1次元の点過程の紹介 Hawkes Process

まず、1次元の場合の点過程の例として1次元の Hawkes Process 説明をする。

$$P(N(t + \Delta) - N(t) = 1 | \mathcal{F}_t) = \lambda(t)\Delta + o(\Delta)$$

$$P(N(t + \Delta) - N(t) > 1 | \mathcal{F}_t) = o(\Delta)$$

ここで λ, α, β は定数とし、 $\lambda(t)$ を以下のように定める。

$$\lambda(t) = \lambda + \int_0^t \alpha e^{-\beta(t-s)} dN(s)$$

さらに、 $\lambda(t) \equiv \lambda(t | \mathcal{F}_t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} E[\frac{N(t+\Delta) - N(t)}{\Delta} | \mathcal{F}_t]$ より、過去のジャンプの回数が次のジャンプが起きる確率に影響を与えていることがわかる。

多次元の点過程の定義

市場 m において、時刻 t までのジャンプの累積回数を図る確率過程である点過程 $N_m(t)$ ($m = 1, 2, 3$) を各 m について以下のように定義する。

$$P(N_m(t + \Delta) - N_m(t) = 1 | \mathcal{F}_t) = \lambda_m(t)\Delta + o(\Delta)$$

$$P(N_m(t + \Delta) - N_m(t) > 1 | \mathcal{F}_t) = o(\Delta)$$

ここで

$$\lambda_m(t) = \lambda_m + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \alpha_{m,i} C_{m,i}(X_i) e^{-\beta(t-s)} dN_i(s)$$

ここで、 λ_m 、 $\alpha_{m,i}$ 、 β は定数であり、 $C_{m,i}(\cdot)$ はリターンの関数でありインパクト関数と呼ばれる。

例えば $C_{m,i} = 1$ とすると多次元の Hawkes Process となる。

多次元点過程の尤度関数の定義

1次元の場合の analogy として、多次元の点過程の対数尤度関数を以下で与える。

$$L_T(\theta) = \sum_{m=1}^3 \left\{ - \int_0^T \lambda_m(t) dt + \int_0^T \log \lambda_m(t) dN_m(t) \right\}$$

θ はパラメーターのベクトルで、 T は観測されたデータにおける最後の時刻を表す。

計数過程 $N_m(t)$ による確率積分は、任意の有限な T に対し、区間 $[0, T]$ において有界変動であることからルベグ・スティルチェス積分として計算できる。実際には「ジャンプ」が起きた時刻で足し合わせることになる。

多次元点過程における最尤法

多次元点過程におけるパラメーター推定は最尤法が基本である。1次元の場合に関しては Ogata(1978) に MLE の一貫性や漸近的性質の証明があり、通常の漸近理論が適用できる。

しかし、多次元の場合には一般的にそれらを示したものはない。

今回の分析で用いるモデルにおいては、MLE の一貫性は成立し、さらにある条件を課すことで尤度比検定などの漸近理論が成立する。

具体的には多次元における Ogata(1978) の正則条件を仮定し、十分小さな Δ に対して以下を仮定する ($m_1 \neq m_2$)。

$$E[(N_{m_1}(t + \Delta) - N_{m_1}(t))(N_{m_2}(t + \Delta) - N_{m_2}(t)) | \mathcal{F}_t] = E[(N_{m_1}(t + \Delta) - N_{m_1}(t)) | \mathcal{F}_t] \cdot E[(N_{m_2}(t + \Delta) - N_{m_2}(t)) | \mathcal{F}_t]$$

多次元点過程における漸近論

以下に多次元点過程の推定で必要となる定理を3つ掲げる。

定理1 最尤推定量の一致性

最尤推定量 $\hat{\theta}_T$ は $T \rightarrow \infty$ としたとき θ_0 に確率収束する。

定理2 中心極限定理

$L_T(\theta_0)$ を真のパラメーター θ_0 で評価した対数尤度関数とすると $\frac{1}{\sqrt{T}} \times \frac{\partial L_T(\theta_0)}{\partial \theta}$ は $N(0, E[\Delta(0,1)\Delta(0,1)'])$ に分布収束する。

なお、

$\Delta(0,1) \equiv -\sum_{m=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \lambda_m(t)}{\partial \theta} dt + \sum_{m=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \lambda_m(t)}{\partial \theta} \frac{1}{\lambda_m(t)} dN_{m,t}$
である。

定理 3 最尤推定量の漸近分布と尤度比

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0) \rightarrow N(0, B^{-1}AB^{-1})$$

なお $A = E[\Delta(0, 1)\Delta(0, 1)']$, $B = E[\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}]$ である。

また、先ほどの条件

$$E[(N_{m_1}(t + \Delta) - N_{m_1}(t))(N_{m_2}(t + \Delta) - N_{m_2}(t)) | \mathcal{F}_t] = \\ E[(N_{m_1}(t + \Delta) - N_{m_1}(t)) | \mathcal{F}_t] \cdot E[(N_{m_2}(t + \Delta) - N_{m_2}(t)) | \mathcal{F}_t]$$

は $A = B$ となる十分条件の一つであり、このもとで通常尤度比検定が適用できる。

Model Fitting

前述の3つの株式指標におけるジャンプの構造を多次元点過程モデルによってモデル化し、AIC基準によってモデル選択を行う。モデルデザインは $\lambda_m(t)$ の形を考えることによってできる。

具体的には3次元モデルを考え、幾つかのインパクト関数の候補から選択を行う。

次元数はモデルに組み込む市場の数に対応する。以下の Intensity は上から順に1次元、2次元、3次元の場合を考えている。

$$\lambda_m(t) = \lambda_m + \int_0^t \alpha_m C_m(\tilde{X}_m) e^{-\beta(t-s)} dN_m(s)$$

$$\lambda_m(t) = \lambda_m + \sum_{i=1}^2 \int_0^t \alpha_{m,i} C_{m,i}(X_i) e^{-\beta(t-s)} dN_i(s)$$

$$\lambda_m(t) = \lambda_m + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \alpha_{m,i} C_{m,i}(X_i) e^{-\beta(t-s)} dN_i(s)$$

インパクト関数の候補として、

$C_{m,i}(X) = 1, X, X^{c_{m,i}}$ ($0 < c_{m,i} < 1$) の3つのケースを考えることとする。なお、 X はジャンプサイズである。

AIC 基準によって最適なモデルを選択した後に、そのモデルを用いて Causality Analysis および条件付き確率による予測の精度を考えることとする。

データセットの説明

日本、米国、英国の3つの金融市場において、それぞれを代表するような株式指標を考える。

具体的には、日経225、S & P500、FTSE100の3指標である。各指標について daily return を考え、今回は、negative return を分析対象とする。

ある閾値を各指標の negative daily return に対して設定する。市場 m において、閾値を超えたことを市場 m における「ジャンプ」と定義し、その日付と negative daily return を分析に用いるデータとする。

以下では、日本を市場1、米国を市場2、英国を市場3と呼ぶことにする。

データセットの説明

分析データとして、前述の3指標について1990年1月2日から2015年8月26日までの6691日分のdaily dataを用いる(Yahoo Financeより取得)。

t日目でのdaily returnの定義を以下のようにする。

$$\frac{(\text{t日目の終値}) - (\text{t日目の始値})}{(\text{t日目の始値})}$$

なお、他の市場は開いているが、ある市場は開いていない日がある場合、その日の当該市場でのdaily returnは0として考える。

また、時差の影響は考慮せず、同じ日付であれば各市場とも同時に取引を行っているものとする。

閾値の設定

閾値の設定に際して、前述の通り negative return を用いて考える。市場が「荒れている」状況を適切に捉えるような閾値を設定したい。

return の変動の大きさによって「荒れている」状態を捉えることとし、negative return の絶対値を考える。

今回の分析においては、各市場とも閾値は 0.02 に設定し、それぞれの市場において negative daily return がこの閾値より小さい場合に「ジャンプ」が発生したと考えることとする。

それぞれの市場でのジャンプは、日本では 326 回、米国では 218 回、英国では 212 回あり、3 市場の同時のジャンプは 13 回であった。

最尤推定の結果

1次元で $C_{m,i}(X) = 1$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α	β	λ
日本	-1223.977	2453.954	0.03436384	0.05138892	0.01620106
米国	-841.0083	1688.0166	0.026352273	0.032767337	0.006454535
英国	-822.963	1651.926	0.035424863	0.046252389	0.007467518

1次元で $C_{m,i}(X) = X$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α	β	λ
日本	-1221.312	2448.624	1.12737806	0.05197126	0.01736689
米国	-839.9651	1685.9302	0.851603473	0.032506289	0.007314026
英国	-822.9651	1651.9302	1.21743874	0.048733979	0.008416301

1次元で $C_{m,i}(X) = X^{C_{m,i}}$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α	β	λ	
日本	-1221.033	2450.066	0.5457783	0.05192993	0.01695144	0.78733141
米国	-839.4549	1686.9098	0.27214672	0.032683782	0.006920712	0.665727874
英国	-822.2781	1652.5562	0.237772734	0.047789561	0.007911337	0.532541432

2次元で $C_{m,i}(X) = 1$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}	β	λ_1	λ_2
日米	-2106.612	4227.224	0.032491667	0.008489694	0.013958546	0.018329762	0.051481148	0.012679105	0.007798501
日英	-2090.862	4195.724	0.034955319	0.008049622	0.016041366	0.017771423	0.056426344	0.014085228	0.007878567
米英	-1648.446	3310.892	0.023645859	0.017171343	0.017393812	0.024254896	0.051492015	0.007116251	0.005814737

最尤推定の結果

2次元で $C_{m,i}(X) = X^{c_{m,i}}$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	β	α_{12}	α_{21}	α_{22}	λ_1	λ_2	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$
日米	-2058.485	4138.97	0.2804018	0.04495949	0.2153843	0.00000002812282	0.3037283	0.01311897	0.008039725	0.6455516	0.9927791	0.9886552	0.6189034
日英	-2042.336	4106.672	0.1261768	0.04982152	0.005788145	0.00000001525655	0.04439157	0.01415417	0.007715713	0.3897289	0.0000001881301	0.3475653	0.04771773
米英	-1650.345	3322.69	0.06841466	0.05009657	0.01789549	0.02023358	0.02181179	0.007162941	0.00579299	0.2234785	0.000002482735	0.0000009428906	0.000000295011

2次元で $C_{m,i}(X) = X$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{21}	α_{22}	β	λ_1	λ_2
日米	-2059.784	4133.568	0.9191201	0.2011328	0.000002090301	1.095524	0.4356791	0.01374505	0.008380763
日英	-2041.338	4096.676	1.113517	0.2181885	0.000000235527	1.332249	0.05407480	0.01531142	0.008750348
米英	-1649.065	3312.13	0.717090219	0.622531484	0.665100128	0.702675068	0.051970838	0.008115698	0.006741501

最尤推定の結果

3次元で $C_{m,i}(X) = 1$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{21}	α_{22}	α_{23}
日米英	-2873.707	5773.414	0.03494467	0.00997911	0.000695051	0.000000003391512	0.02517662	0.01931174
	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β	λ_1	λ_2	λ_3	
	0.000000006613519	0.02307102	0.02309372	0.05638844	0.01261261	0.007471421	0.00565408	

3次元で $C_{m,i}(X) = X$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{21}	α_{22}	α_{23}
日米英	-2872.637	5771.274	1.12534	0.3010446	0.001314446	0.0000007845216	0.7543096	0.682119
	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β	λ_1	λ_2	λ_3	
	0.0000001558291	0.7669669	0.7212312	0.05600671	0.01465875	0.008345238	0.006557638	

3次元で $C_{m,i}(X) = X^{C_{m,i}}$ の場合の最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{21}	α_{22}	α_{23}
日米英	-2869.357	5782.714	0.1215351	0.2915931	0.04147686	4.27682E-08	0.1148787	0.2305131
	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β	λ_1	λ_2	λ_3	$c_{1,1}$
	2.50647E-06	0.246322	0.02160597	0.05632616	0.01336187	0.007837616	0.005915225	0.3568761
	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$c_{2,3}$	$c_{3,1}$	$c_{3,2}$	$c_{3,3}$
	0.9853837	0.9999954	0.9769868	0.4432387	0.692316	0.9999983	0.6511724	0.007946657

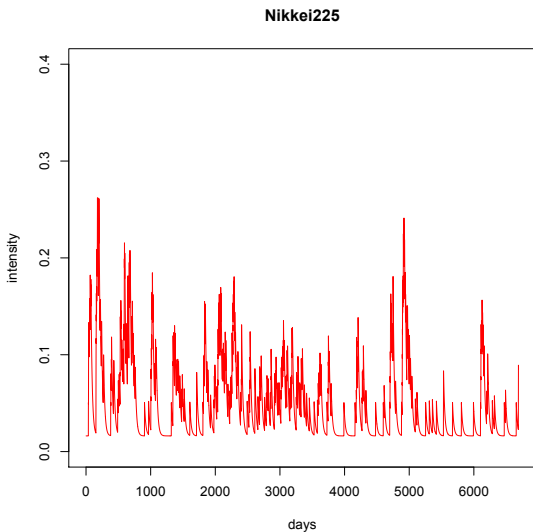


Figure : 1次元で $C_{m,i}(X) = 1$ の場合

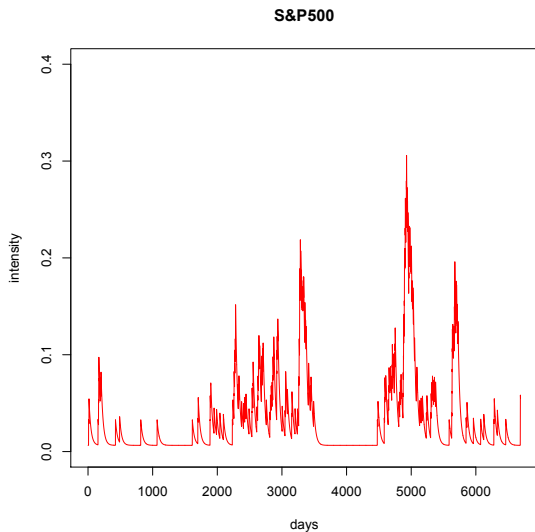


Figure : 1次元で $C_{m,i}(X) = 1$ の場合

先ほどの推定結果から AIC 基準で比較した場合、 $C_{m,i}(X) = X$ が最も良いことになる。

複雑な impact function を適用する場合と、単純なモデルを適用する場合とで、モデルとしての良さは変わらないことが示唆される。なお、1次元や2次元の場合についてもこの事実が示唆される。

また、 $\alpha_{2,1}$ 及び $\alpha_{3,1}$ は0にかなり近く、日本市場のジャンプが欧米市場へのジャンプに与える影響がないことが示唆されている。

先ほど行った推定において、日本市場でのジャンプが欧米市場でのジャンプのメカニズムに影響を与えないことが示唆された。

そこで、時刻 $[0, T]$ までのデータが与えられたときの欧米市場において、将来初めてジャンプが起きる条件付き予測確率を基準にして、causality analysis を考える。

連続時間における Causality を考えた、Florens J.P. and D. Fougere(1996) にならって (ラフな) 定式化を考える。

τ_m ($m = 2, 3$) を系列 m において時刻 T 以降に初めてジャンプが起きる時刻であるとする。

また、 $\mathcal{F}_{t,(i,j)}$ によって、時刻 t までの市場 i および市場 j の情報を表すこととする。

日本市場のジャンプの情報が、欧米市場におけるジャンプの条件付き予測確率に影響を及ぼさないことを次のように定式化する。

$$P(\tau_m \geq T | \mathcal{F}_t) = \exp\left(-\int_t^T \lambda_m(s | \mathcal{F}_t) ds\right)$$

$$P(\tau_m \geq T | \mathcal{F}_t) = E[1_{[\tau_m \geq T]} | \mathcal{F}_t]$$

となることから、

$$P(\tau_m \geq T | \mathcal{F}_{t,(1,2,3)}) = P(\tau_m \geq T | \mathcal{F}_{t,(2,3)})$$

は

$$E[1_{[\tau_m \geq T]} | \mathcal{F}_{t,(1,2,3)}] = E[1_{[\tau_m \geq T]} | \mathcal{F}_{t,(2,3)}]$$

を考えればよく、この等式を満たす必要十分条件は $\alpha_{m,1} = 0$ であると考えられる。次にこの条件を尤度比を用いて検定しよう。

帰無仮説: $\alpha_{2,1} = 0$ $\alpha_{3,1} = 0$ を尤度比検定で検定する。

次のスライドの計算結果により、検定統計量は $2 \times (2872.632 - 2872.637) \simeq 0$ であり、自由度 2 のカイ二乗分布の上側 95 パーセント点は 10.5966 だから帰無仮説は棄却されない。

したがって、日本市場のジャンプの影響が欧米市場のジャンプに影響を与えないことが考えられる。

制約のもとでの最尤推定の結果

3次元で $C_{m,i}(X) = X$ かつ帰無仮説: $\alpha_{1,2} = 0$ $\alpha_{1,3} = 0$ のもとでの最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{21}	α_{22}	α_{23}
日米英	-2877.519	5777.038	1.179661	null	null	6.11759E-08	0.7755849	0.6434333
	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β	λ_1	λ_2	λ_3	
	5.85979E-08	0.7448034	0.7136607	0.05474386	0.01768599	0.008138487	0.006595461	

3次元で $C_{m,i}(X) = X$ かつ帰無仮説: $\alpha_{2,1} = 0$ $\alpha_{3,1} = 0$ のもとでの最尤推定の結果を以下に示す。

市場	Log Likelihood	AIC	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{21}	α_{22}	α_{23}
日米英	-2872.632	5767.264	1.138196	0.3116197	0.00001283367	null	0.7630126	0.6886259
	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β	λ_1	λ_2	λ_3	
	null	0.7730794	0.7282002	0.05653087	0.0144764	0.008366399	0.006657181	

条件付き予測確率

最尤推定量と直前までのデータセットを用いて、各系列において将来ジャンプが起きる確率を求めることができる。

つまり時刻 0 から T までのデータとそれに基づく最尤推定量が得られたとき、 $(T, T']$ の間に初めてジャンプが起きる条件付き確率を各系列ごとに求めることができる。

点過程モデルを用いた条件付き確率の応用として、損失額を任意に固定したときにその額を上回るようなイベントがいつ起きるか、というような予測を考えることができる。

計数過程 N_m の \mathcal{F}_t のもとでの条件付き確率を考えよう。時間間隔 $[T, T']$ での計数過程 N_m の first arrival time τ の分布は

$Pr(\tau \geq T' | \mathcal{F}_T) = \exp(-\int_T^{T'} \lambda_m(t | \mathcal{F}_T) dt)$ である。

条件付き予測確率

(続き)

したがって、 $(T, T']$ の間に初めてジャンプが起きる条件付き確率は

$$Pr(\tau \leq T' | \mathcal{F}_T) = 1 - \exp\left(-\int_T^{T'} \lambda_m(t | \mathcal{F}_T) dt\right)$$

となる。

それでは以下の3つの時期において、その100日後までに初めてジャンプが起きる確率を計算し、モデルの予測力を確認してみよう。

1. 市場が安定している時期 (2005年8月31日)
2. 市場が荒れている時期 (2015年8月26日)
3. リーマンショック直前 (2008年9月12日)

条件付き予測確率

(続き)

計算に用いる Intensity について、impact function は $C(X) = X$ を使い、3次元、2次元、1次元の3つのモデルを考える。

米国市場、英国市場に関しては、以下のようにプロットする。

1. 日米英の3市場 (赤)
2. 米英の2市場 (青)
3. 米もしくは英の1市場 (緑)

日本市場に関しては、以下のようにプロットする。

1. 日米英の3市場 (赤)
2. 日米の2市場 (青)
3. 日英の2市場 (青)
4. 日の1市場 (緑)

日本市場 安定時 (閾値2%)

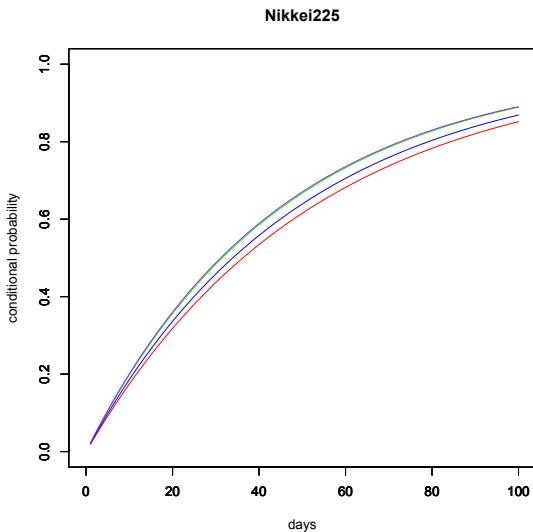


Figure : 2005 年 12 月 14 日にジャンプが起きる (75 日後)

日本市場 動揺時 (閾値2%)

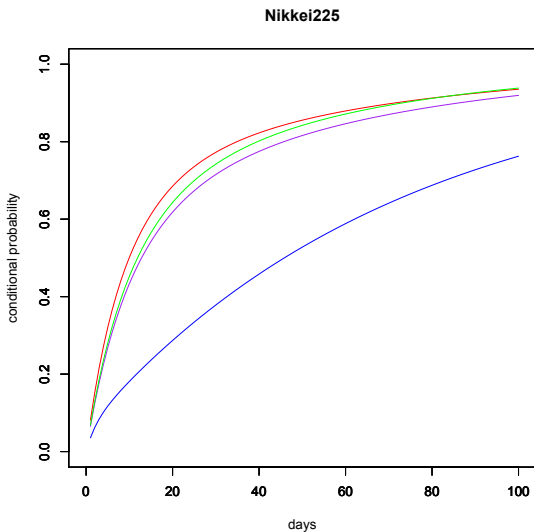


Figure : 2015年9月1日にジャンプが起きる(4日後)

日本市場 リーマンショック直前 (閾値2%)

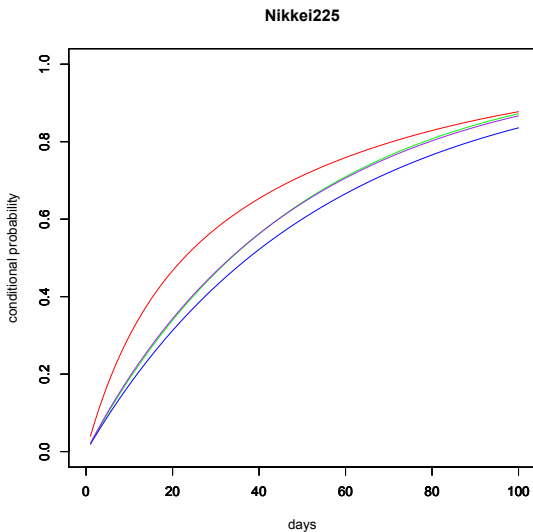


Figure : 2015年9月16日にジャンプが起きる(2日後)

米国市場 安定時 (閾値 2%)

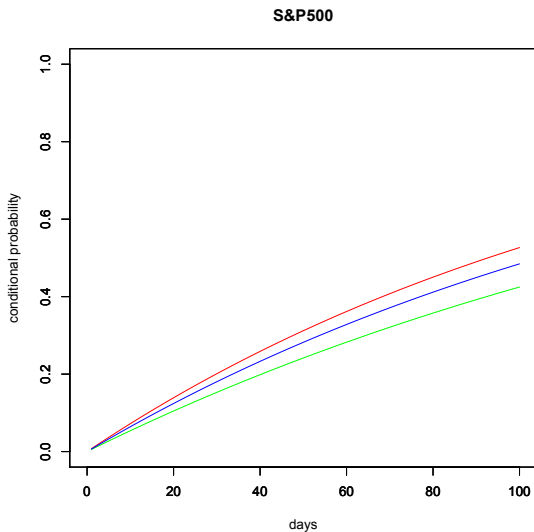


Figure : この期間にジャンプは発生しなかった

米国市場 動揺時 (閾値 2%)

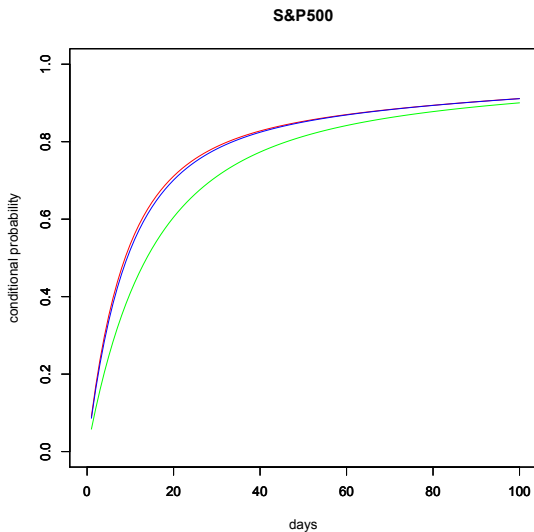


Figure : 2015 年 9 月 1 日にジャンプが起きる (4 日後)

米国市場 リーマンショック直前 (閾値2%)

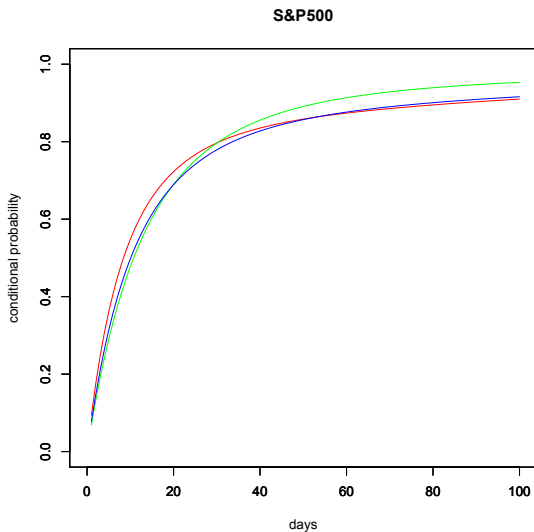


Figure : 2015年9月15日にジャンプが起きる (1日後)

英国市場 安定時 (閾値2%)

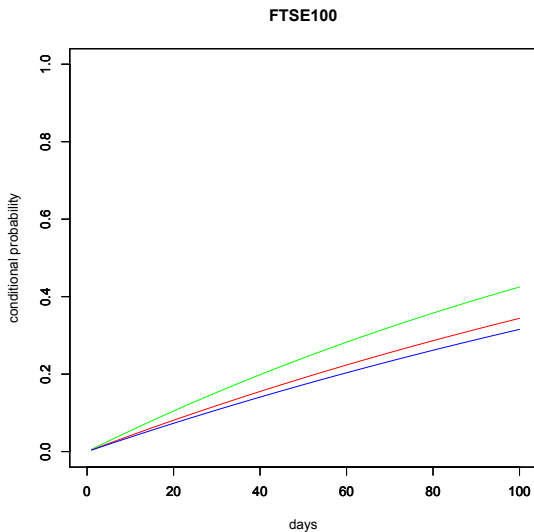


Figure : この期間にジャンプは発生しなかった

英国市場 動揺時 (閾値2%)

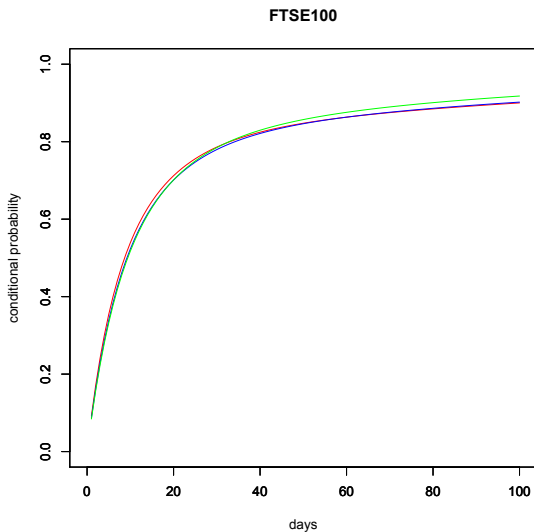


Figure : 2015年9月1日にジャンプが起きる(4日後)

英国市場 リーマンショック直前 (閾値2%)

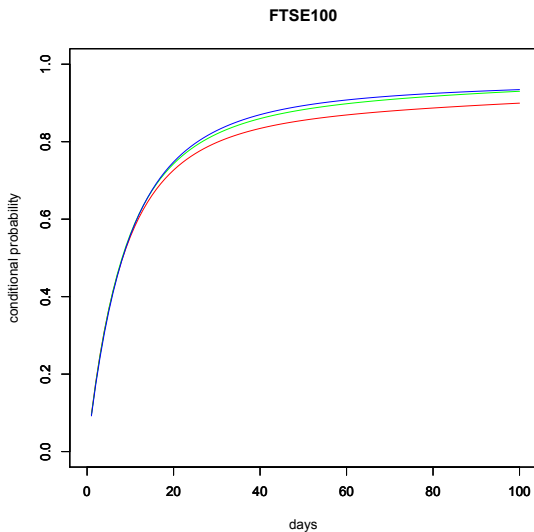


Figure : 2015年9月15日にジャンプが起きる(1日後)

閾値の決定について

閾値を2%とすると、市場が荒れている時期と安定している時期とで条件付き確率の挙動が大きく違うことがわかった。

しかし、大規模な金融危機と市場動揺時とがあまり区別されていないようにも見える。その上、日本市場は他の2市場に比べてvolatileなので閾値の設定が低いようにも見えるかもしれない。

そこで閾値を3%に設定し、先ほどと同じ時期に同じモデルを適用してみる。

なお、閾値3%を超えるデータは少ないため1987年のブラックマンデーのデータを取り込んで係数の推定を行う。

日本市場 安定時 (閾値 3%)

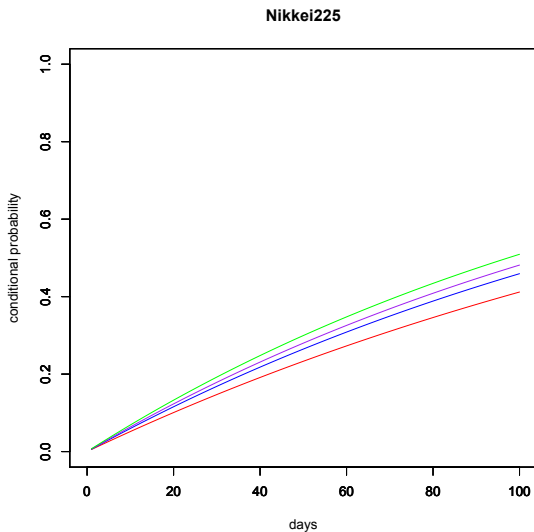


Figure : この期間にジャンプは発生しなかった

日本市場 動揺時 (閾値3%)

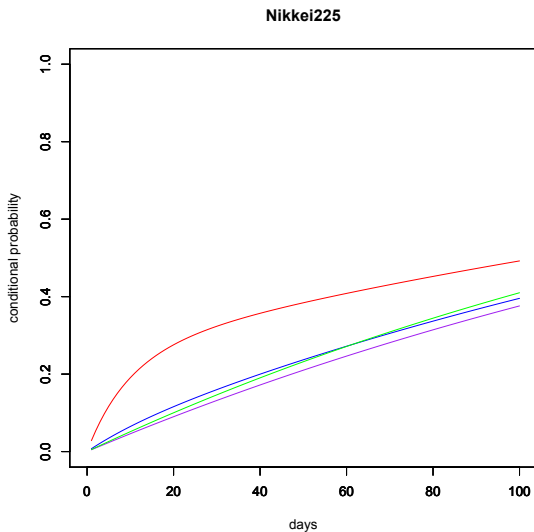


Figure : 2015年9月1日にジャンプが起きる(4日後)

日本市場 リーマンショック直前 (閾値3%)

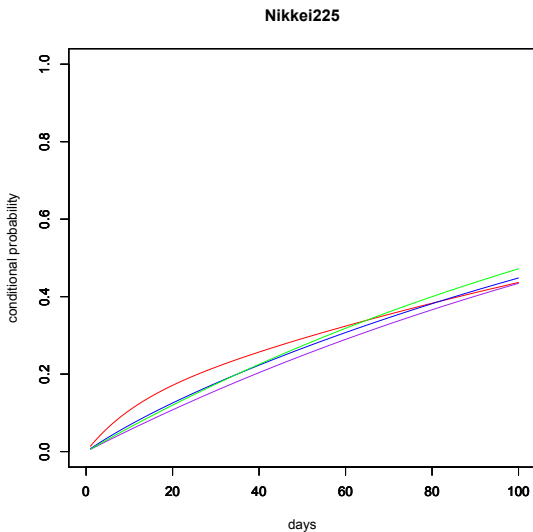


Figure : 2015年9月16日にジャンプが起きる(2日後)

米国市場 安定時 (閾値3%)

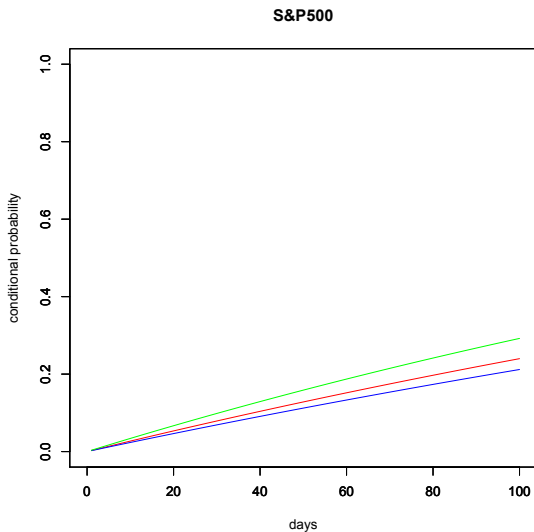


Figure : この期間にジャンプは発生しなかった

米国市場 動揺時 (閾値 3%)

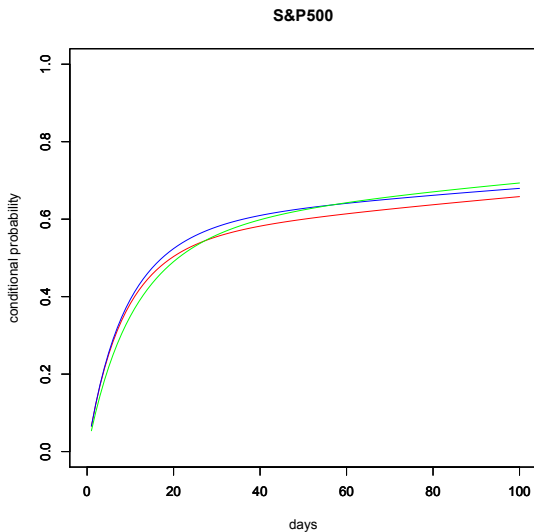


Figure : この期間にジャンプは発生しなかった

米国市場 リーマンショック直前 (閾値3%)

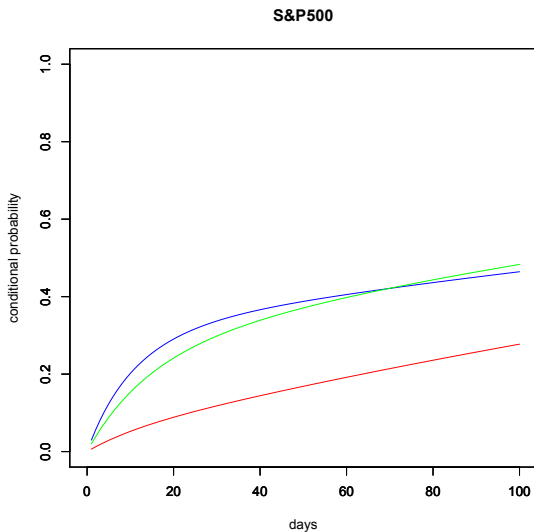


Figure : 2015年9月15日にジャンプが起きる (1日後)

英国市場 安定時 (閾値3%)

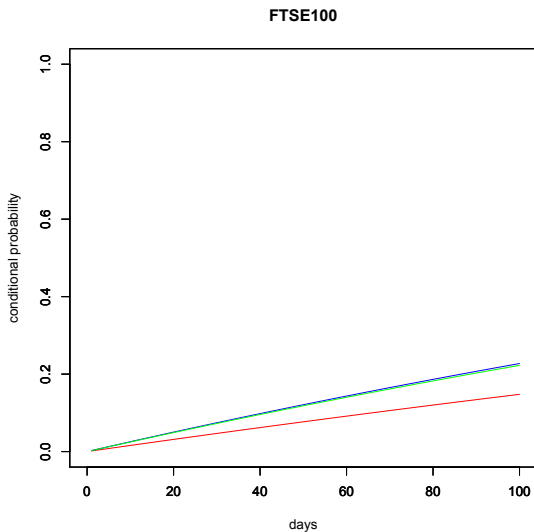


Figure : この期間にジャンプは発生しなかった

英国市場 動揺時 (閾値3%)

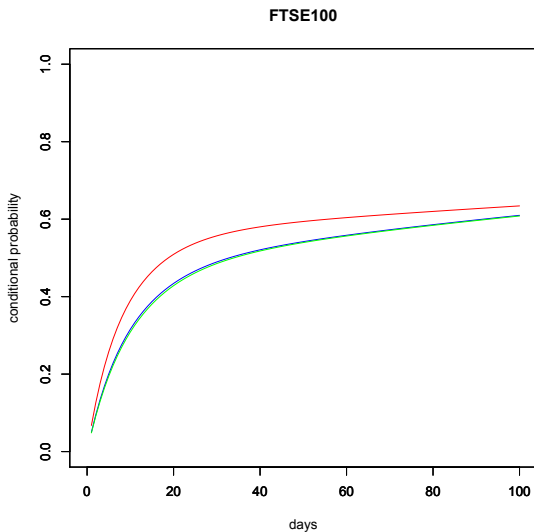


Figure : 2015年9月1日にジャンプが起きる(4日後)

英国市場 リーマンショック直前 (閾値3%)

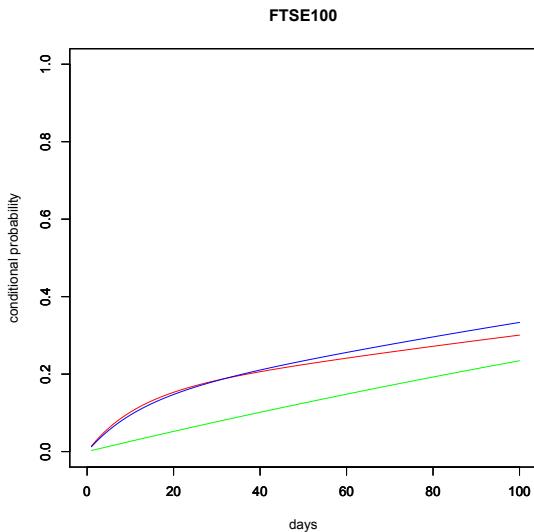


Figure : 2015年9月15日にジャンプが起きる (1日後)

条件付き確率

以上で見たように閾値を3%とすると、そのような閾値を超えるデータが少ないためか2%の場合と比べて予測力は劣る。

閾値が2%の場合には、市場の状況に応じて条件付き確率の挙動が目に見えて変化するため、市場リスク管理の応用に有用であることが示唆される。

特に安定時は λ_m ($m = 1, 2, 3$) の1次関数のような形状となるため (intensity の式と e^x のテーラー展開による)、グラフがそのような形に近いかどうか判断すれば良い。

多次元点過程モデルを用いて

1. Causality Analysis
2. 将来のジャンプの予測

を行った。

(1) に関しては、単純な尤度比検定による手法だけでなく、因果を定量的に把握できる手法を考えることが望まれる。

(2) に関しては、ジャンプの時刻と大きさという情報のみでもある程度の予測ができることがわかった。

intensity のデザインを巧妙に行うことでより良いモデルを考えることが可能であり、定常性などの正則性に気を付けさえすれば柔軟なモデリングが可能だと思われる。

Oliver Grothe, Volodymyr Korniiichik, Hans Manner, 2014
"Modeling multivariate extreme events using self-exciting point processes" Journal of Econometrics 182 269-289

Florens J.P. , D. Fougere ,1996," A Note on Noncausality"
Econometrica vol.50, No.3, 583-591

Yacine Ait-Sahalia, Julio Cacho-Diaz, Roger J.A. Laeven, 2015
"Modeling Financial Contagion Using Mutually Exciting Jump Processes" Journal of Financial Econometrics 117 585-606

Yoshihiko Ogata, 1978, "The Asymptotic Behavior of Maximum Likelihood Estimators for Stationary Point Processes", Ann. Inst. Statist. Math. 30, Part A, 243-261