

# 経済リスクの統計学の新展開 : 稀な事象と再起的事象 2015<sup>1</sup>

国友直人<sup>2</sup> & 川崎能典<sup>3</sup>  
(共編)

2016年2月

<sup>1</sup>文部科学省・科学研究費プロジェクト「経済統計・政府統計の理論と応用からの提言」(2013年度～)が2015年12月18日に東京大学経済学研究科において開催した研究集会における講演をまとめたものである。

<sup>2</sup>東京大学大学院経済学研究科

<sup>3</sup>統計数理研究所

# 概要

日本では2011年3月に発生した東日本大震災を一つの契機に「通常の常識では起こりにくいと思われる事象」についてのリスク解析や対策の重要性についての認識が高まっている。経済・社会における近年の現象でも2008年に起きたリーマンショック・経済危機、2011年から経験しているヨーロッパ諸国の金融危機なども我々が暮らしている国際的な経済社会においては、従来の議論ではほとんど考慮されていない経済変動の例である。こうした事前には予想が困難で無視されてきた事象、自然災害、経済変動の中でも実際に起きると大きな影響のある不確実な事象を科学的に理解し、有効な対策を考察する研究が必要であり重要である。本研究プロジェクトでは近年の日本など現代の経済・社会の理解にとって重要になっている「きわめて稀に起きる事象」と「しばしば起きる事象」の評価・分析法について研究する予定である。「稀な事象」に関わる経済リスクの分析という課題について理論的・実証的な観点から分析することにより、科学的根拠にもとづいた経済・社会における「経済リスクの分散化」という方策、公共的政策のあり方の提案することが目標である。近年に特に関心が高まっている「従来の常識では希にしか起きない、無視できると見なされる事象」と「ときどき経済・社会では起きると見なされる現象」の科学的解析を柱に、確率論・統計学と経済学・金融（ファイナンス・保険）における既存の理論と現実の乖離、新しい数理的理論の構築と応用、新しい数理的理論を踏まえた「経済リスクの解析と分散化の方策」について研究活動を行う予定である。本研究プロジェクトでは経済リスクを(i)社会・人口リスク、(ii)自然災害と極端な事象のリスク、(iii)経済・金融・保険の対象となるリスク、に関連した3つの領域の経済リスクに分類し、リスクに係わる問題と相互に関わる総合的問題という二つの方向から問題を理論的に解明し、総合的な研究をふまえた経済リスクの科学的制御・管理の方策を提言することを目指す。さらに、経済統計学における研究・研究者と確率論・統計学など数理科学の関係者、さらに金融（ファイナンス）の関係者を交え、現代の社会・経済においては重要ではあるが、既存の研究分野では十分に取り上げられなかった研究課題を研究するとともに、経済リスクの分析と科学的制御・統計的管理法についての共同研究を行う計画である。

今回の研究集会では、経済リスクの統計学を巡るさまざまなトピックについて報告を行う機会であった。このような情報交換が関係者の知的刺激となり、経済リスクの統計学の今後の展開の一助になることを期待する次第である。

2016年2月  
編者

# 研究集会・プログラム

「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再起的事象」

日程：2015年12月18日(金曜)

会場：東京大学経済学部小島ホール1階セミナー室

オーガナイザー：国友直人(東京大学)・川崎能典(統計数理研究所)

<プログラム>

12月18日(金)

<セッションI：経済リスクの統計学>

Chair: 楠岡成雄

13:00~13:40 「公的年金運用の基本ポートフォリオの検証-リスクとファクター配分の観点から-」  
田中周二(日本大学)

13:40~14:20 「Evaluating capital allocation with distortion risk measures」塚原英敦(成城大学)

14:20~15:00 「G-expectation and Statistical Problems」一場知之(カリフォルニア大学)

<休憩>

<セッションII：経済リスク分析の統計的基礎>

Chair: 川崎能典

15:10~15:40 「Effects of Jump and Noise via the Small Noise Asymptotics in High-Frequency  
Financial Econometrics」栗栖大輔・国友直人(東京大学)

15:40~16:10 「Intensity and G-Causality in Financial Econometrics : an empirical analysis」江  
原斐夫・国友直人・栗栖大輔(東京大学)

<休憩>

<セッションIII：金融市場の統計分析>

Chair: 国友直人

16:20~17:00 「経験類似度に基づくボラティリティ予測」川崎能典(統計数理研究所)

17:00~17:40 「株価指数と先物間の因果関係の変化の検証」大屋幸輔(大阪大学)

# 公的年金運用の基本ポートフォリオの検証

-リスクとファクター配分の観点から-

田中 周二, 新川 康青

日本大学大学院総合基礎科学研究科

October 31, 2015

# 初めに

- H26年厚生労働省による財政検証の報告書が提示され、引き続き、内外株式のウェイトを増加させる年金積立金管理運用独立行政法人(GPIF)の運用基本ポートフォリオの見直しが行われた。
- 従来は名目リターンをベースとする通常の前分散分析であった。
- 今回のポートフォリオの見直しは、債券なみのリスクを維持しつつ、実質的な運用利回り(積立金の運用利回りから名目賃金上昇率を差し引いたもの)1.7%を確保することを目標としている。
- 一方で、リーマンショックという経験を経て、ここ数年はグローバル運用機関ではより低リスクの運用を目指す動きが加速されている。
- 果たして今回の見直しの決定は正しいのか、またよりよいポートフォリオ運用があるのかを理論的に検討する。

## 今回の発表内容

- GPIF の基本ポートフォリオの構築法およびデータの確認
- 収集した過去データの確認とリスク尺度 (標準偏差, TailVaR, LPM) を置き換えたポートフォリオ最適化の構築
- 代表的な低リスク運用手法 (GMV, MDP, ERC) のリスク・リターンの比較分析
- 投資対象を 14 系列に増やした場合の低リスク運用のリスク・リターンの比較分析
- 主成分分析を用いたファクター投資の試算

# GPIF による基本ポートフォリオの考え方

- 基金全体では基本となるポートフォリオを予め定めておき、できるだけ運用リスクを抑制しつつ運用パフォーマンスを追求する運営が求められている。
- よって、運用リスクは財政投融资の時代と同様、債券運用と同程度のリスクの範囲で行うことが基本的な方針となっていた。
- ところが突然、昨年秋、アベノミクスを背景にして、従来より積極的なリスクテイクを目指す GPIF の基本ポートフォリオの見直しが行われることになった。

## 中期目標

- ① 財政検証を踏まえ、保険給付に必要な流動性を確保しつつ実質的な運用リターン（運用利回りから名目賃金上昇率を差し引いたもの）1.7%を最低限のリスクで確保すること
- ② 基本ポートフォリオは、資産運用に関し一般に認められている専門的な知見や内外の経済動向を考慮して、フォワードルッキングなリスク分析を踏まえて長期的な観点から設定すること
- ③ 名目賃金上昇率からの下振れリスクが全額国内債券運用の場合を超えないこと

## 主な変更点

- ① これまでのように長期均衡状態のみを前提とするのではなく、フワードルッキングなリスク分析を踏まえ、財政検証と整合性をとって、足下から向こう 10 年間の金利上昇シナリオを想定
- ② 基本ポートフォリオ策定の際のリスクの捉え方については、賃金上昇率からの下振れリスクが全額国内債券運用の場合の下振れリスクを超えない確率を基準とする。さらに、賃金上昇率を下回った場合の平均的な不足額も考慮する
- ③ 財政検証でいずれの経済シナリオでも必要な運用利回りが確保できるため運用目標の元となった「経済中位ケース」(財政検証のケース E に相当する)と、現在の市場に織り込まれた将来の金利水準を前提とする「市場基準ケース」(ケース G に相当)の 2 つのケースを想定する



# 基本ポートフォリオの概要

- ① **想定運用期間** 積立金の水準が最も高くなり、継続的に低下が始まる直前までの 25 年間
- ② **選定方法** 伝統的 4 資産のリターン, リスク等に基づき, 多数のポートフォリオ (5% 刻み) について, リターン, リスク, 名目賃金上昇率を下回る確率 (下方確率), 名目賃金上昇率を下回るときの平均不足率 (条件付平均不足率) などを推計し, 制約条件については「外国株式比率  $\geq$  外国債券比率」だけを課している。  
この推計結果に基づき検討を行い, 「経済中位ケース」及び「市場基準ケース」において, 運用目標 (名目賃金上昇率 + 1.7%) を満たしつつ, その一方で, 下方確率が全額国内債券運用の場合を下回り, かつ, 条件付平均不足率が最も小さいポートフォリオを選定
- ③ **検証方法** 基本ポートフォリオで運用した場合の積立金の時系列推移を推計するため, ケースごとに 10 万回のシミュレーションを行う

## 検証結果

- 想定運用期間の最終年度（平成 51 年（2039 年））において予定積立金額を確保できないリスクは、経済中位ケースでは約 40%，市場基準ケースでは約 25%
- 以上を総合的に勘案すると、GPIF による基本ポートフォリオは、必要な積立金を確保しつつ、下振れリスクの最小化を図った最も効率的なポートフォリオといえる判断を下したということである。

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産
資産構成割合	60 %	12 %	11 %	12 %	5 %
乖離許容幅	± 8 %	± 6 %	± 5 %	± 5 %	-

Table 1: 変更前の基本ポートフォリオ

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産
資産構成割合	35 %	25 %	15 %	25 %	-
乖離許容幅	± 8 %	± 6 %	± 5 %	± 5 %	-

Table 2: 変更後の基本ポートフォリオ

# 基礎データの確認と基本ポートフォリオの位置づけ

- 変更前後の基本ポートフォリオを客観的に分析
- GPIF では、伝統的 4 資産 (内外債券, 内外株式) のポートフォリオ構築に当たって、従来は名目のリターンに基づく平均分散分析により、今回の見直しは賃金上昇率に基づく平均・分析によって基本ポートフォリオの決定を行った

時系列	平均 (年率)	標準偏差	使用データ
日本債券	2.86 %	2.71 %	野村債券総合インデックス [Nomura-BPI]
日本株式	0.84	17.99	東証第 1 部時価加重収益率 (配当込み)[TSE1]
外国債券	7.18	11.05	Citi World Bond Index[Citi WBIG]
外国株式	9.06	19.15	Morgan Stanley Capital Index[MSCI(KOKUSAI)]
賃金上昇率	-0.01	0.93	毎月勤労統計調査全国調査 [厚生労働省]
物価上昇率	0.17	1.22	消費者物価指数全国総合 [総務省統計局]

Table 3: 伝統的 4 資産に使用した時系列データ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>1995 年 1 月～2014 年 12 月までの 20 年間の月次収益率 (変化率)

## 各資産のリスク・リターンおよび相関係数

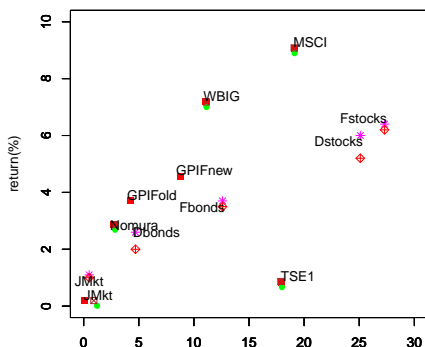


Figure 1: 各資産のリスク・リターン

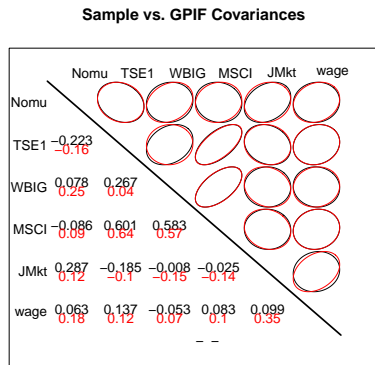


Figure 2: 各資産のピアソン相関係数

## GPIF の運用利回り想定値および実質リターン比較

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産	賃金上昇率
経済中位	2.6 %	6.0 %	3.7 %	6.4 %	1.1 %	2.8 %
市場基準	2.0 %	5.2 %	3.5 %	6.2 %	1.0 %	2.1 %

Table 4: GPIF の運用利回り想定値

	Nomura	TSE1	WBIG	MSCI	JMkt
市場実績	2.9 %	0.9 %	7.2 %	9.1 %	0.2 %
GPIF 中位	-0.2	3.2	0.9	3.6	-1.7
GPIF 市場	-0.1	3.1	1.4	4.1	-1.1

Table 5: 実質リターン比較 (年率)

- 以降の結果は最小分散ポートフォリオ (GMVP) と接点ポートフォリオ (TP), および賃金上昇率を年率 1.7 % 上回る最適ポートフォリオ (OP) のリスク, リターンおよび資産配分の結果である。
- 日本国債 : 日本株式 : 外国債券 : 外国株式 : 短期資産の割合は賃金上昇率を年率 1.7 % (月率 0.14 %) 上回るポートフォリオである。

## 過去実績での資産配分結果

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=39:2:0:2:56

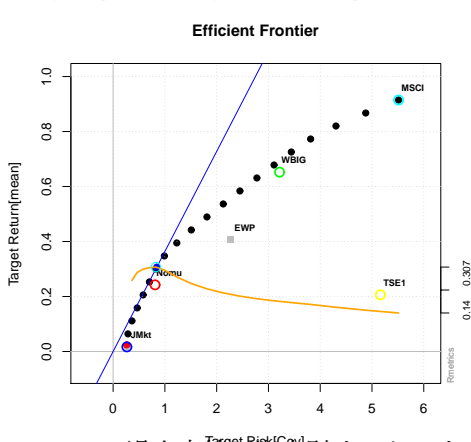


Figure 3: 過去実績の資産別リスク・リターン

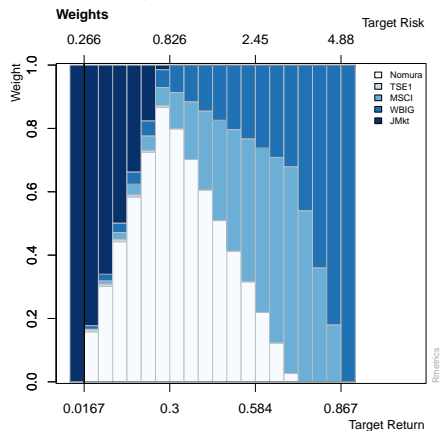


Figure 4: 過去実績のリスク・リターンに基づく資産配分

# GPIFの「経済中位ケース」での資産配分結果

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=50:42:0:8:0

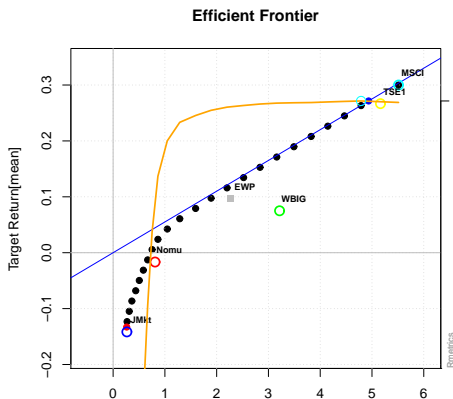


Figure 5: GPIF リターン(中位)に基づく資産別リスク・リターン

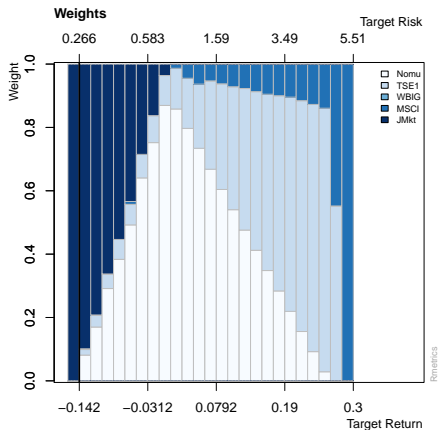


Figure 6: GPIF リターン(中位)に基づく資産別配分

# GPIFの「市場基準ケース」での資産配分結果

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=50:42:0:8:0

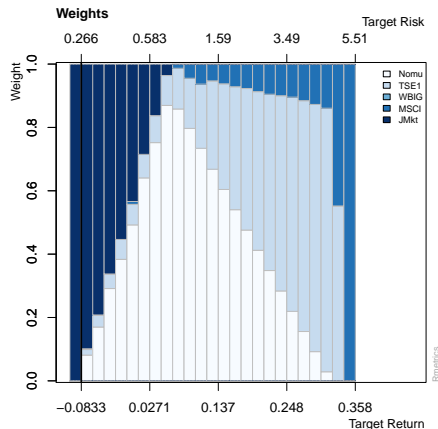
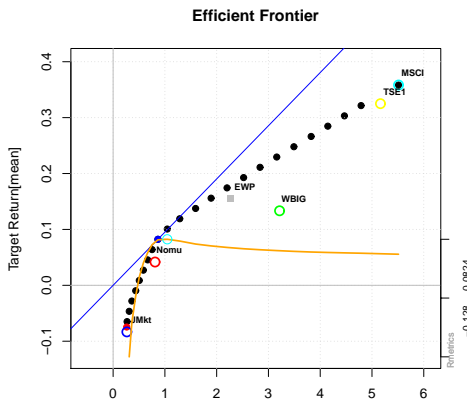


Figure 7: GPIF リターン(市場)に基づく資産別配分

Figure 8: GPIF リターン(市場)に基づく資産別配分



## TailVaR, LPM

### 定義 (VaR)

$X$  の分布関数  $F_X(x)$  により, 所与の確率  $\alpha$  について, バリュアットリスク  $VaR_\alpha(X)$  は

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \leq \alpha\} \quad (3.1)$$

### 定義 (TailVaR)

$TailVaR$  ( $CVaR$ ) は,  $VaR_\alpha(X)$  により損失の条件付き期待値として定義される。

$$TailVaR_\alpha(X) = \mathbb{E}[X | X > VaR_\alpha(X)] \quad (3.2)$$

### 定義 (LPM)

閾値  $\tau$  の冪  $a \geq 1$  の下方部分積率 ( $LPM$ : Lower Partial Moments) は以下の期待値で定義される。

$$LPM_{a,\tau}(X) = \mathbb{E}[\max(0, \tau - X)^a] \quad (3.3)$$

TailVaR( $\alpha = 0.05$ )

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=29:2:0:2:56

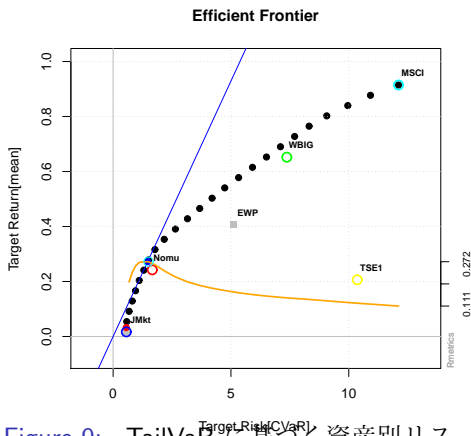


Figure 9: TailVaRに基づく資産別リスク・リターン

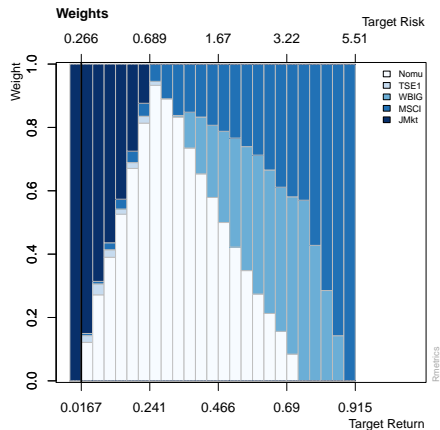
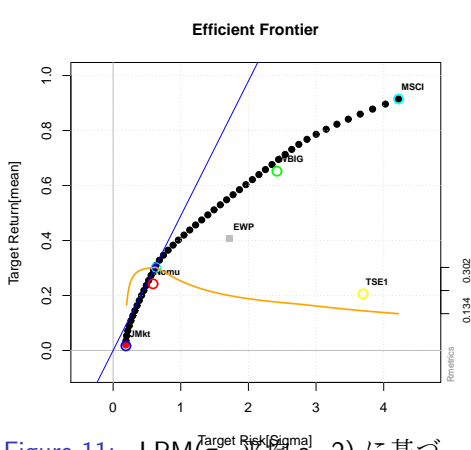
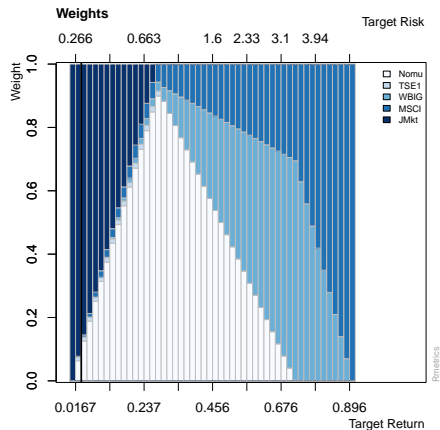


Figure 10: TailVaRに基づく資産配分

LPM( $\tau$ =平均, $a=2$ )

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=38:1:0:2:59

Figure 11: LPM( $\tau$ =平均, $a=2$ )に基づく資産別リスク・リターンFigure 12: LPM( $\tau$ =平均, $a=2$ )に基づく資産配分

# 中位シナリオ:LPM

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=48:30:0:21:0

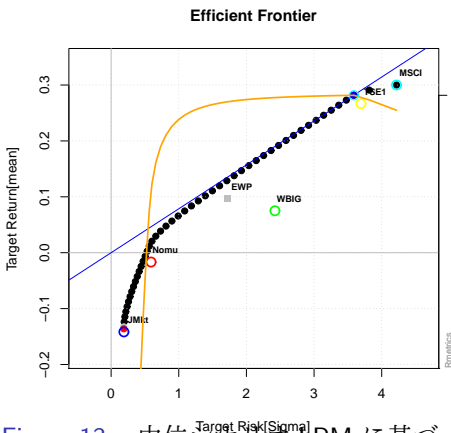


Figure 13: 中位シナリオ:LPM に基づく資産別リスク・リターン

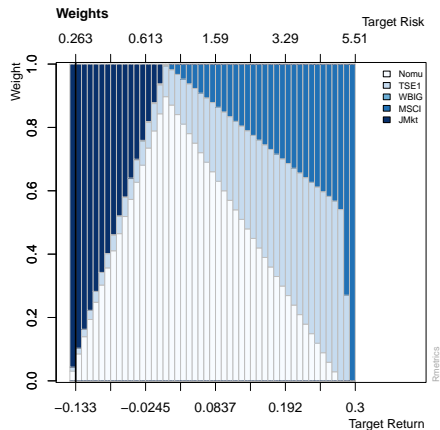


Figure 14: 中位シナリオ:LPM に基づく資産配分

## 市場シナリオ:LPM

日本国債：日本株式：外国債券：外国株式:短期資産=69:20:0:11:0

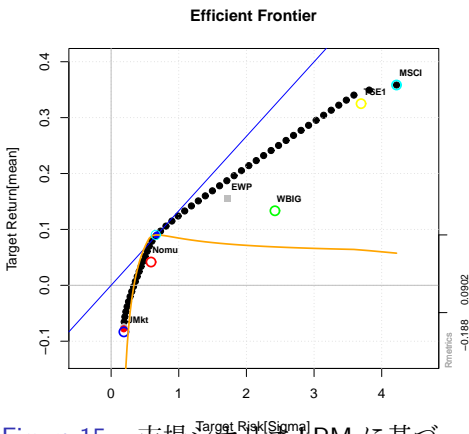


Figure 15: 市場シナリオ:LPM に基づく資産別リスク・リターン

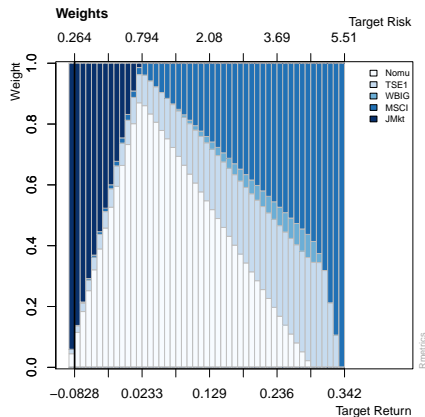


Figure 16: 市場シナリオ:LPM に基づく資産配分

# 低リスク運用ポートフォリオ

- 平均分散法と CAPM によれば, 同一リターン (リスク) で最小 (最大) のリスク (リターン) となる最適な各資産の組み合わせの集合は, ポートフォリオの標準偏差をリスクとし, 平均をリターンとする平面上で曲線を描き, 投資家はその効用に見合う最適ポートフォリオを選択することがよいとされている。
- $N$  個の危険資産が, それぞれ分散  $\sigma_i^2$  と, 二つの資産間の共分散  $\sigma_{ij} (i, j = 1, \dots, N)$  を持つとすると, 分散共分散行列  $\Omega = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^N$  が定義できる。また,  $C$  を対応する相関行列, 標準偏差ベクトルを  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)'$  とする。危険資産のポートフォリオを, 投資比率ベクトル  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)'$  で表すとポートフォリオの総リスクは,  $\sigma(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}'\Omega\mathbf{w}}$  となる。

- ① 平均分散法による大域最小分散ポートフォリオ (GMV); ポートフォリオの総分散を最小化
- ② 等金額投資 (EW); 各資産の投資比率を同一とする
- ③ 最大分散化ポートフォリオ (MDP); 分散化比率 (DR) を最大化
- ④ 均等リスク寄与度法 (ERC); 各資産のリスク寄与率を同一させるように資産配分を決定

# GMV

GMV においてはポートフォリオの総分散を最小化するので制約条件の下で以下の量の最小化を行った最適解となる。

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \mathbf{w}' \Omega \mathbf{w} \\ \text{s.t.} & \mathbf{w}' \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

ここで  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$  は総和をとるためのベクトルである。構成比率ベクトルの非負制約がなければ、この解は以下のようになることが簡単な計算により確かめられる。

$$\mathbf{w}^* = \frac{\Omega^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \Omega^{-1} \mathbf{1}} \quad (4.1)$$

このときの最小分散は、

$$\sigma^2(\mathbf{w}^*) = \mathbf{w}^* \Omega \mathbf{w}^* = \frac{1}{\mathbf{1}' \Omega^{-1} \mathbf{1}} \quad (4.2)$$

となる。これから、以下の比例関係が成り立つ。

$$\mathbf{w} \propto \Omega^{-1} \cdot \mathbf{1} = \text{diag}(\sigma^{-1}) \cdot C^{-1} \cdot \text{diag}(\sigma^{-1}) \cdot \mathbf{1} \quad (4.3)$$

# MDP

MDP では、分散化比率 DR を最大化する。

$$R(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}'\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{w}}}$$

$$\mathbf{w}^* = \arg \max_{\mathbf{w}'\mathbf{1}=1} DR(\mathbf{w})$$

この解は Chouefaty and Coignard [2008] によれば、以下のとおりの比例関係が成り立つ。  
MVP とは  $\text{diag}(\boldsymbol{\sigma}^{-1})$  の項だけ異なる。

$$\mathbf{w}^* \propto \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}^{-1}) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (4.4)$$

なお分散化比率 DR とボラティリティ加重の集中度 CR

$$CR(\mathbf{w}) = \frac{\sum_i (w_i \sigma_i)^2}{(\sum_i w_i \sigma_i)^2}$$

にはボラティリティ加重平均相関  $\rho(\mathbf{w})$

$$\rho(\mathbf{w}) = \frac{\sum_{i \neq j} (w_i w_j \sigma_i \sigma_j) \rho_{ij}}{\sum_{i \neq j} (w_i w_j \sigma_i \sigma_j)}$$

を用いて、以下の関係があることが知られている。

$$DR(\mathbf{w}) = [\rho(\mathbf{w})(1 - CR(\mathbf{w})) + CR(\mathbf{w})]^{-\frac{1}{2}}$$



## ERC

ERC あるいはリスクパリティポートフォリオ (RPP: Risk Parity Portfolio) は以下のように定義される。まず, 各資産の投資比率  $\mathbf{w}$  に対し, 第  $i$  資産以外の投資比率を 0 としたものを  $\hat{\mathbf{w}}^i$  とすると, 以下の等式が成り立つ。

$$\sigma(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}'\Omega\mathbf{w}} = \sum \frac{\hat{\mathbf{w}}^{i'}\Omega\hat{\mathbf{w}}^i}{\sigma(\mathbf{w})} \quad (4.5)$$

この時,  $\frac{\hat{\mathbf{w}}^{i'}\Omega\hat{\mathbf{w}}^i}{\sigma(\mathbf{w})}$  を第  $i$  資産のリスク寄与度  $RC_i$  と呼ぶ。ERC は, 各資産のリスク寄与度を均一にしたポートフォリオとして定義される。

$$\frac{RC_i}{\sigma(\mathbf{w})} = \frac{1}{N} \quad (4.6)$$

# 伝統的 4 資産を用いた低リスク運用戦略の比較分析

- ① 分散・共分散行列は過去 20 年間の収益率の時系列データに基づく。
- ② ただしここでの集中度はハーフィンダール指数のことであり、 $\mathcal{H}(w) = \sum_{i=1}^n w_i^2$  で定義される。

名目	ポートフォリオ戦略名	集中度	日本債券	日本株式	外国債券	外国株式
1	GMV	88	94	5	1	0
2	ERC	57	74	8	12	6
3	MDP	65	80	10	8	2
4	EW	25	25	25	25	25

Table 6: 名目リターン

実質	ポートフォリオ戦略名	集中度	日本債券	日本株式	外国債券	外国株式
1	GMV	88	94	5	1	0
2	ERC	55	72	9	12	7
3	MDP	64	79	10	8	3
4	EW	25	25	25	25	25

Table 7: 実質リターン

# 低リスク運用ポートフォリオの比較

- リターンは過去 20 年間の平均 (添え字なし) と GPIF の中位ケース (添え字 1) および市場ケース (添え字 2) を使い分ける。
- 実質リターンでは,MDP や ERC では日本債券なみのリスクで年率 1.7 % を上回る。
- GPIF の新しいポートフォリオでは, リターンは少し高いが, リスクは 8 % と大幅に増加する。

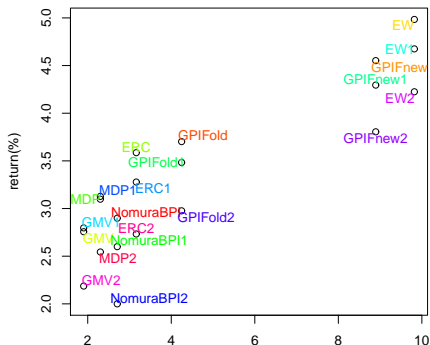


Figure 17: 名目リターンベースの場合

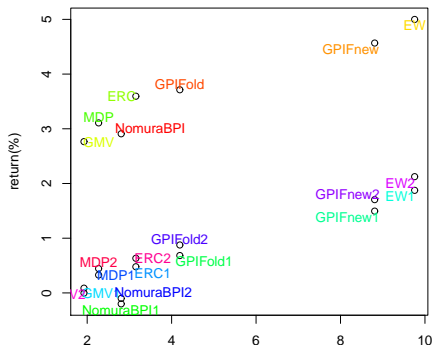


Figure 18: 実質リターンベースの場合

# 投資対象の拡大と分散化の追求

- 資産区分を細分化することによってさらに低リスク運用を進められる可能性がある。
- 資産数を 14 系列に増やした場合の、資産は 5 つのグループに分ける。<sup>2</sup>

グループ	グループに属する資産の時系列名
日本債券	NomuraBPI 国債 1-3
	NomuraBPI 国債 3-7
	NomuraBPI 国債 7 年以上
日本株式	TSE1
	REITJ
	JapanHD(高配当利回り)
外国債券	WBIG
	WBIGhgd(フルヘッジ)
	InflUS(米国インフレ運動債)
外国株式	MSCIKokusai
	EM(MSCI のエマージング株式)
	WorldHD(高配当利回り)
商品	Gold(金)
	CrudeOil(原油)

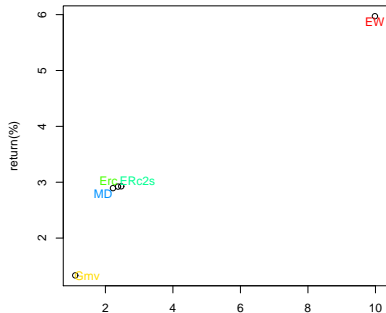


Figure 19: GMV, ERC, ERC2s, MDP の 4 手法による最適化結果

<sup>2</sup>1999 年 1 月から 2014 年 12 月までの 15 年間の月次収益率 (変化率)

## 基礎統計値および相関係数

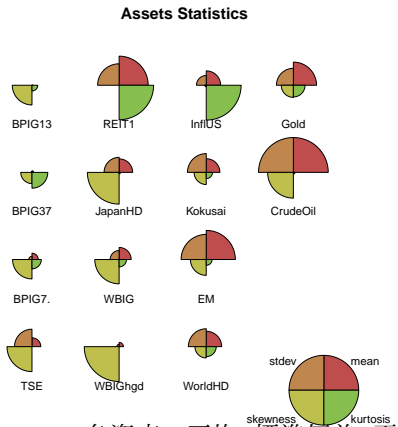


Figure 20: 各資産の平均, 標準偏差, 歪度, 尖度

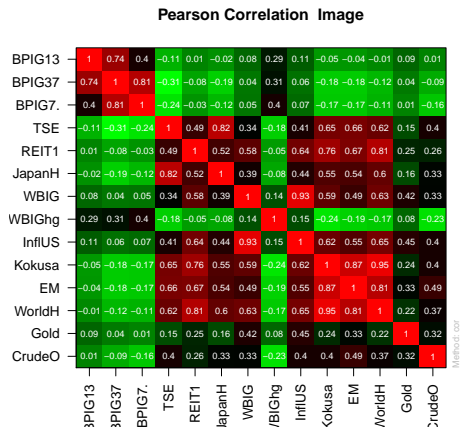


Figure 21: 各資産の相関係数 (Kendall)

## GMV,ERC,ERC2s,MDP の4手法による最適化

	GMV	ERC	ERC2s	MDP
BPIG1-3	96.0	33.9	40.5	11.1
BPIG3-7	0.0	22.2	20.2	36.7
BPIG7-	0.0	10.8	10.8	9.5
TSE1	1.2	1.9	1.5	4.7
REITJ	0.0	1.2	1.4	0.4
JapanHD	1.2	2.0	1.8	0.0
WBIG	0.0	1	2.5	2.8
WBIGhgd	2.8	16.5	10.7	30.6
InflUS	0.0	2.1	2.6	0.0
Kokusai	0.0	1.4	1.3	2.5
EM	0.0	0.0	1.1	1.0
WorldHD	0.0	1.4	1.3	0.0
Gold	0.0	0.0	2.8	2.4
CrudeOil	0.0	1.1	1.4	2.1
集中度	92	21	23	25

# ファクター投資

- ファクター投資は資産クラスのリターンを生み出す共通のリスクファクターによりポートフォリオを構築する手法である。
- 70年代後半に開発され、2008年のリーマンショック以降、低リスク運用に関心が集まる時代背景のもとで再び注目が集まり始めた。
- なぜ低リスク運用である、GMV,ERC,MDPだけでは不十分とされたのであろうか。
- これには、Choueifaty et al[2011]によるポートフォリオ構築不変性による判断基準がある。
- ファクター投資では、「不変性」の基準を満たすばかりか、ファクター数は資産数に比べて十分少なくでき、またファクター間の相関はゼロという好ましい性質を持つからである。
- 統計手法としては、一般には主成分分析や因子分析の手法が用いられる。

# 主成分分析による固有値ベクトル (1,2 軸)

- 第 4 主成分までで 80 % 近い累積寄与率になる。
- また第 1 主成分は 42 % を占める。

Eigenvalue Ratio Plot

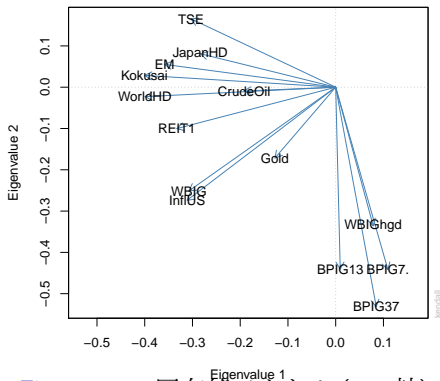


Figure 22: 固有値ベクトル (1,2 軸)



## ファクター配分結果

- $y_i$  は投資割合,  $MR_i$  は限界リスク,  $RC_i$  はリスク寄与度,  $RC^*_i$  は相対リスク寄与度を表している。
- これはファクターというリスクの表現であるので, 実際には資産配分に変換する必要がある。
- しかし, Roncalli and Weisang[2012] で指摘されているように, 空売り禁止の制約下ではこのような解が常に求められるとは限らない。

	GMV : 総リスク=2.19 %				ERC : 総リスク=2.30 %			
	$y_i$	$MR_i$	$RC_i$	$RC^*_i$	$y_i$	$MR_i$	$RC_i$	$RC^*_i$
$\mathcal{F}_1$	7	48	4	9	14	83	13	25
$\mathcal{F}_2$	15	48	8	17	20	61	13	25
$\mathcal{F}_3$	35	48	15	32	31	43	13	25
$\mathcal{F}_4$	42	48	20	42	34	38	13	25

	MDP : 総リスク=2.28 %				EW : 総リスク=2.78 %			
	$y_i$	$MR_i$	$RC_i$	$RC^*_i$	$y_i$	$MR_i$	$RC_i$	$RC^*_i$
$\mathcal{F}_1$	13	86	14	26	25	135	34	50
$\mathcal{F}_2$	19	62	13	26	25	73	18	27
$\mathcal{F}_3$	31	43	12	23	25	36	9	13
$\mathcal{F}_4$	35	38	13	25	25	27	7	10

# 結論

- ① 今回の一連の分析結果から,GPIF の基本ポートフォリオの見直し結果の最適性については疑問が残った。
- ② またリターンに大きく依存するポートフォリオ最適化の不安定性を改めて確認するものとなった。("Garbage in Garbage out")
- ③ 更に GMV,ERC,MDP を用いての検証から,ポートフォリオ最適化と比較すると低リスク運用手法の優位性が確認された。
- ④ 次に資産数を 14 に増やし GMV,ERC,2 段階の ERC(ERC2s),MDP による最適化計算から ERC,ERC2s,MDP のリスクプロファイルはほぼ同じで,より安定性のあるポートフォリオとなることから,投資対象の拡大は更なる分散効果が期待できることがわかった。。
- ⑤ 最後に主成分分析によるファクター投資の試算を行ったが,さらに分散投資効果のあるポートフォリオが構築出来る可能性を示した。

## ファクター投資の今後の課題

- ① ファクター投資の適切な主成分の数の選択
- ② 算出されたファクターの経済的意味付け
- ③ 資産配分への変換
- ④ ファクター投資モデルを中心とした GARCH などの時系列構造を考慮した多期間の最適化などの発展

# Evaluating Capital Allocation with Distortion Risk Measures

Hideatsu Tsukahara

(tsukahar@seijo.ac.jp)

Dept of Economics, Seijo University

December 18, 2015

「経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再起的事象」  
研究集会

## Contents

1. Capital Allocation Problem
2. Distortion Risk Measures (DRMs)
3. Capital Allocation with DRMs
4. Numerical Results
5. Concluding Remarks

## 1. Capital Allocation Problem

$d$  investment opportunities (e.g., business units, subportfolios, assets)

$X_i$ : loss associated with the  $i$ th investments

1. Compute the overall risk capital  $\rho(X)$ , where  $X = \sum_{i=1}^d X_i$  and  $\rho$  is a particular risk measure.
2. Allocate the capital  $\rho(X)$  to the individual investment possibilities according to some mathematical *capital allocation principle* such that, if  $\kappa_i$  denotes the capital allocated to the investment opportunity with potential loss  $X_i$ , we have  $\sum_{i=1}^d \kappa_i = \rho(X)$ .

►► Find  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_d) \in \mathbb{R}^d$  s.t.  $\sum_{i=1}^d \kappa_i = \rho(X)$  according to some criterion

### Setup

It is convenient to introduce 'weights'  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$

(to be interpreted as amount of money invested in each opportunity)

Put  $X(\lambda) := \sum_{i=1}^d \lambda_i X_i$  and

$$r_\rho(\lambda) := \rho(X(\lambda)) \quad \text{risk measure function}$$

If  $\rho$  is positive homogeneous, then, for  $h > 0$

$$r_\rho(h\lambda) = hr_\rho(\lambda)$$

i.e.,  $r_\rho$  is positive homogeneous of degree 1

**Euler's rule:** If  $r_\rho$  is positive homogeneous and differentiable,

$$r_\rho(\lambda) = \sum_{i=1}^d \lambda_i \frac{\partial r_\rho}{\partial \lambda_i}(\lambda)$$

### Euler allocation principle

If  $r_\rho$  is a positive homogeneous risk measure function, which is differentiable on the set  $\Lambda$ , then the (per-unit) Euler capital allocation principle associated with  $r_\rho$  is

$$\kappa_i(\lambda) = \frac{\partial r_\rho}{\partial \lambda_i}(\lambda)$$

### Justification

- Tasche: RORAC compatibility

$r_\rho$ : differentiable risk measure function

$\kappa$ : capital allocation principle

$\kappa$  is called *suitable for performance measurement* if for all  $\lambda$  we have

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left( \frac{-\mathbb{E}(X(\lambda))}{r_\rho(\lambda)} \right) \begin{cases} > 0 & \text{if } \frac{-\mathbb{E}(X_i)}{\kappa_i(\lambda)} > \frac{-\mathbb{E}(X(\lambda))}{r_\rho(\lambda)}, \\ < 0 & \text{if } \frac{-\mathbb{E}(X_i)}{\kappa_i(\lambda)} < \frac{-\mathbb{E}(X(\lambda))}{r_\rho(\lambda)}. \end{cases}$$

►► The only per-unit capital allocation principle suitable for performance measurement is the Euler principle.

- Denault: Cooperative game theory

$d$  investment opportunities =  $d$  players

If  $\rho$  is subadditive, then  $\rho(X(\lambda)) \leq \sum_{i=1}^d \rho(\lambda_i X_i)$ .

A fuzzy core (Aubin, 1981) is given by

$$\mathcal{C} = \left\{ \kappa \in \mathbb{R}^d : r_\rho(\mathbf{1}) = \sum_{i=1}^d \kappa_i \ \& \ r_\rho(\lambda) \geq \sum_{i=1}^d \lambda_i \kappa_i \ \forall \lambda \in [0, 1]^d \right\}$$

►► If  $r_\rho$  is differentiable at  $\lambda = \mathbf{1}$ , then  $\mathcal{C}$  consists only of the gradient vector of  $r_\rho$  at  $\lambda = \mathbf{1}$ :

$$\kappa_i = \left. \frac{\partial r_\rho(\lambda)}{\partial \lambda_i} \right|_{\lambda=\mathbf{1}}$$

## Examples

- Covariance principle:

$$r_\rho(\lambda) = \sqrt{\text{var}(X(\lambda))} = \sqrt{\lambda' \Sigma \lambda}$$

where  $\Sigma$  is the covariance matrix of  $(X_1, \dots, X_d)$ . Then

$$\kappa_i(\lambda) = \frac{\partial r_\rho(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \frac{\text{cov}(X_i, X(\lambda))}{\sqrt{\text{var}(X(\lambda))}}$$

In particular, the capital allocated to the  $i$ th investment opportunity is

$$\kappa_i = \frac{\text{cov}(X_i, X)}{\sqrt{\text{var}(X)}}$$

- **VaR contributions:**

$$r_\rho(\lambda) = \text{VaR}_\alpha(X(\lambda))$$

Then (Tasche, 1999)

$$\kappa_i(\lambda) = \frac{\partial r_\rho(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \mathbb{E}(X_i \mid X(\lambda) = \text{VaR}_\alpha(X(\lambda)))$$

In particular, the capital allocated to the  $i$ th investment opportunity is given by

$$\kappa_i = \mathbb{E}(X_i \mid X = \text{VaR}_\alpha(X))$$

[Difficult to compute (c.f. Glasserman (2005))]

- **ES contributions:**

$$r_\rho(\lambda) = \text{ES}_\alpha(X(\lambda)) = \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 F_{X(\lambda)}^{-1}(u) du$$

Then

$$\kappa_i(\lambda) = \frac{\partial r_\rho(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \mathbb{E}(X_i \mid X(\lambda) \geq \text{VaR}_\alpha(X(\lambda)))$$

In particular, the capital allocated to the  $i$ th investment opportunity is given by

$$\kappa_i = \mathbb{E}(X_i \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X))$$

## 2. Distortion Risk Measures (DRM)

The class of **coherent** risk measures which satisfy **law invariance** and **comonotonic additivity**.

### Definition

A **distortion risk measure (DRM)** is defined by

$$\rho_D(X) := \int_{[0,1]} F_X^{-1}(u) dD(u) = \int_{\mathbb{R}} x D \circ F_X(dx).$$

where  $D$  is a **distortion function** (i.e., a df on  $[0, 1]$ ).

►► a.k.a. **spectral risk measure** (Acerbi), weighted V@R (Cherny)

★  $D_\alpha^{\text{VaR}}(u) = \mathbf{1}_{\{u \geq 1-\alpha\}}$  yields  $\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(1-\alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , but this  $D_\alpha^{\text{VaR}}$  is not convex.

### Example: **Expected Shortfall (ES)**

The expected loss that is incurred when VaR is exceeded

$$\text{ES}_\alpha(X) := \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 F_X^{-1}(u) du \doteq \mathbb{E}(X \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X))$$

Taking distortion of the form

$$D_\alpha^{\text{ES}}(u) = \frac{1}{\alpha} [u - (1 - \alpha)]_+, \quad 0 < \alpha < 1$$

yields ES as a DRM



## One-parameter Families of DRMs (Tsukahara, 2009b):

- *Proportional Hazards*:  $D_{\theta}^{\text{PH}}(u) = 1 - (1 - u)^{\theta}$
- *Proportional Odds*:  $D_{\theta}^{\text{PO}}(u) = \frac{\theta u}{1 - (1 - \theta)u}$
- *Gaussian (Wang transform)*:  $D_{\theta}^{\text{GA}}(u) = \Phi(\Phi^{-1}(u) + \log \theta)$
- *Proportional  $\gamma$ -Odds*:  $D_{\theta}^{\text{PGO}}(u) = 1 - \left[ \frac{(1 - u)^{\gamma}}{\theta - \theta(1 - u)^{\gamma} + (1 - u)^{\gamma}} \right]^{1/\gamma}$

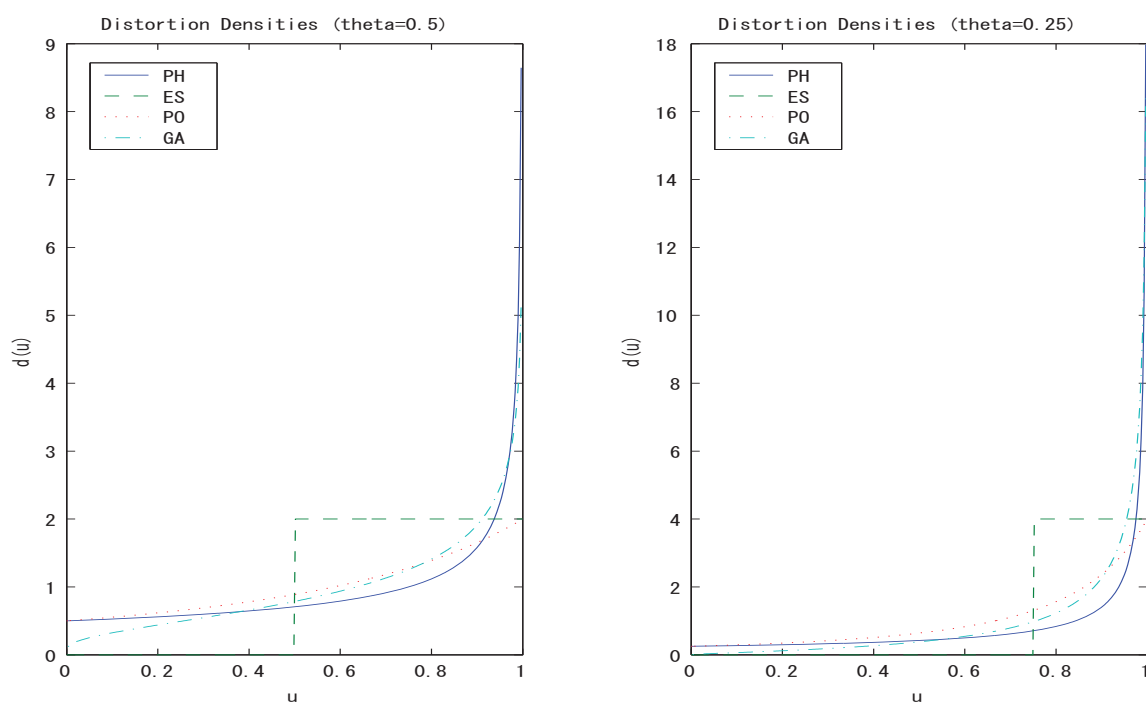


图 1: Distortion densities ( $\theta = 0.5$ ,  $\theta = 0.25$ )

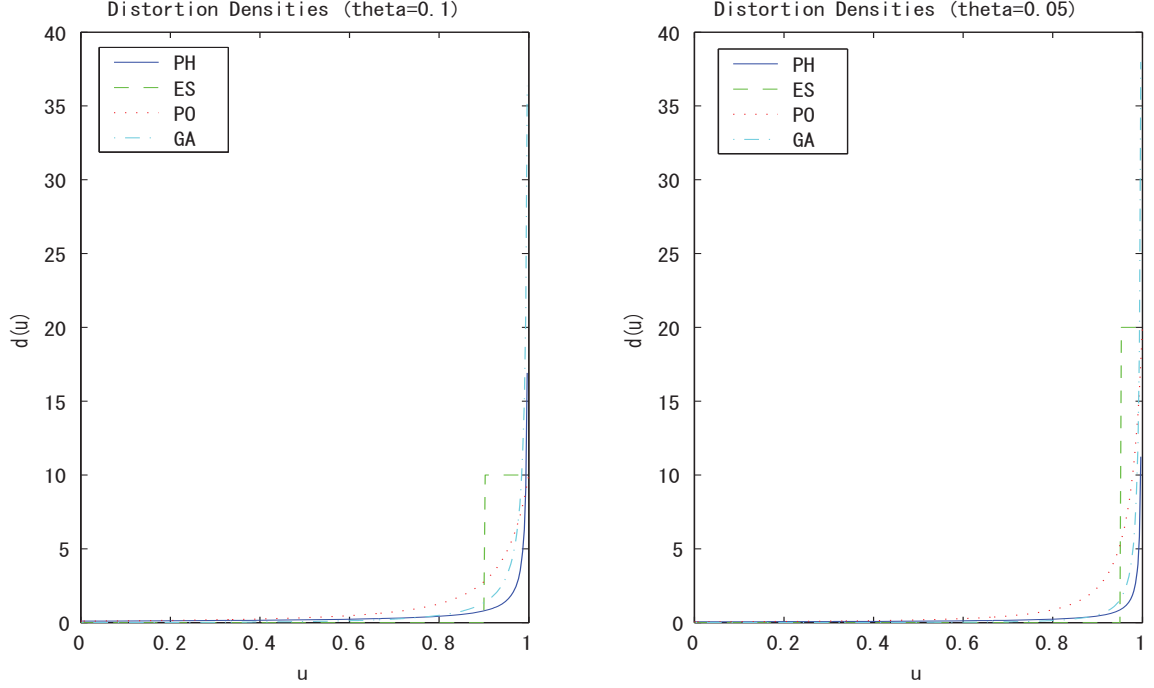


图 2: Distortion densities ( $\theta = 0.1$ ,  $\theta = 0.05$ )

### 3. Capital Allocation with DRMs

$$r_\rho(\lambda) = \rho_D(X(\lambda)) = \int_{[0,1]} F_{X(\lambda)}^{-1}(u) dD(u)$$

Then, under some regularity conditions (Tasche (2000)),

$$\begin{aligned} \kappa_i(\lambda) &= \frac{\partial r_\rho(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \int_{[0,1]} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} F_{X(\lambda)}^{-1}(u) dD(u) \\ &= \int_{[0,1]} E[X_i | X(\lambda) = F_{X(\lambda)}^{-1}(u)] dD(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} E[X_i | X(\lambda) = x] d(F_{X(\lambda)}(x)) dF_{X(\lambda)}(x) \\ &= E[X_i d(F_{X(\lambda)}(X(\lambda)))] \end{aligned}$$

Thus, the capital allocated to the  $i$ th investment opportunity is

$$\kappa_i = E[X_i d(F_X(X))]$$

►► We can think of  $d(F_X(X))$  as a Radon-Nikodym density:

$E(d(F_X(X))) = 1$  trivially

$$\frac{dQ}{dP} = d(F_X(X)) \implies \kappa_i = E^Q(X_i)$$

Even when we know the joint df of  $(X_1, \dots, X_d)$ , it is still difficult to compute  $\kappa_i$  since the joint df of  $X_i$  and  $X$  is needed (The only exception is a Gaussian case).

⇒ Resort to Monte Carlo

Given a random sample  $(X_1^k, \dots, X_d^k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , put

$$X^k = X_1^k + \dots + X_d^k, \quad \mathbb{F}_X(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{X^k \leq x\}$$

Then we can estimate  $\kappa_i$  by

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_i &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_i^k d(\mathbb{F}_X(X^k)) \\ &= \iint x_i d(\mathbb{F}_X(x)) d\mathbb{F}_{X_i, X}(x_i, x) \end{aligned}$$

where

$$\mathbb{F}_{X_i, X}(x_i, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}\{X_i^k \leq x_i, X^k \leq x\}$$

The error  $\widehat{\kappa}_i - \kappa_i$  can be asymptotically evaluated by proving asymptotic normality: Under certain regularity conditions,

$$\sqrt{n}(\widehat{\kappa}_i - \kappa_i) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2)$$

where

$$\sigma^2 = \text{var} \left( F_{X_i}^{-1}(\xi_i) d(\xi) + \iint F_{X_i}^{-1}(u_i) d'(u) \mathbf{1}_{\{\xi \leq u\}} dC_i(u_i, u) \right)$$

$$C_i(F_{X_i}(x_i), F_X(x)) = P(X_i \leq x_i, X \leq x) \text{ and } (\xi_i, \xi) \sim C_i$$

(Needs to be modified for ES)

## 4. Numerical Results

Take the following distortion densities

- Expected Shortfall:  $d_\theta(u) = \frac{1}{\theta} \mathbf{1}_{\{u \geq 1-\theta\}}$
- Proportional Odds:  $d_\theta(u) = \frac{\theta}{(1-u+\theta u)^2}$
- Proportional Hazards:  $d_\theta(u) = \theta(1-u)^{\theta-1}$
- Gaussian:  $d_\theta(u) = \frac{\phi(\Phi^{-1}(u) + \log \theta)}{\phi(\Phi^{-1}(u))}$

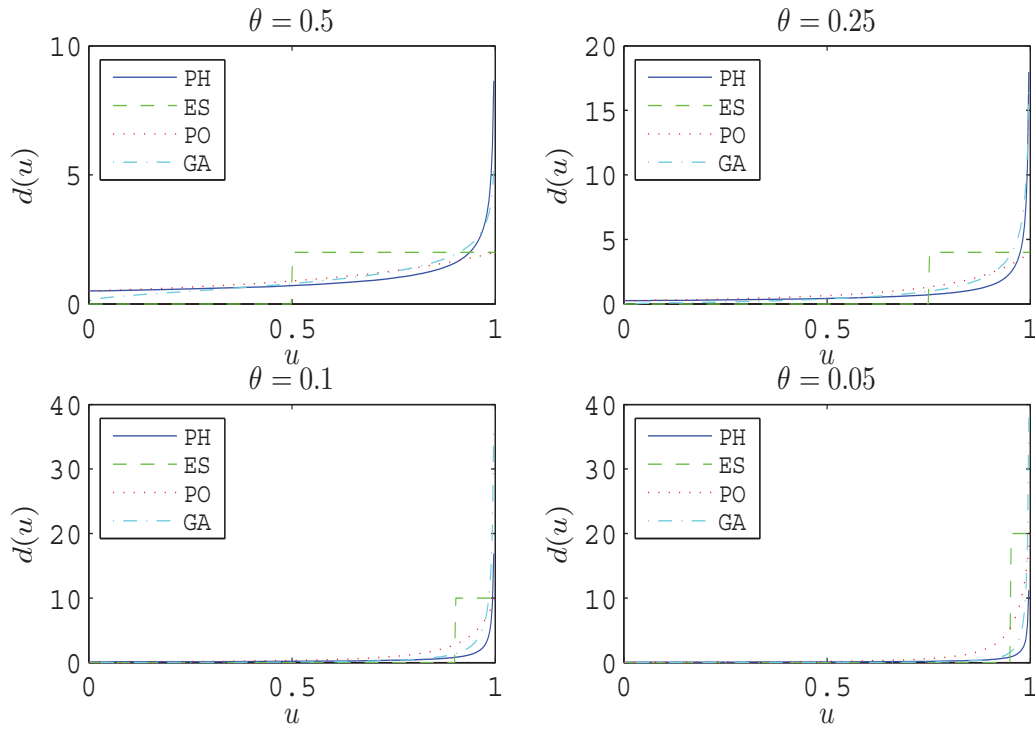


Figure 3: Distortion densities

### Elliptical loss distribution: $E_d(\mu, \Sigma, \psi)$

$\mu$ : location vector,  $\Sigma$ : dispersion matrix,  $\psi$ : characteristic generator

Assume  $r_\rho$  is the risk measure function of a positive homogeneous, law invariant risk measure  $\rho$ . Let  $(X_1, \dots, X_d) \sim E_d(\mathbf{0}, \Sigma, \psi)$ . Then under the Euler allocation, the relative capital allocation is given by

$$\frac{\kappa_i}{\kappa_j} = \frac{\kappa_i(\mathbf{1})}{\kappa_j(\mathbf{1})} = \frac{\sum_{k=1}^d \Sigma_{ik}}{\sum_{k=1}^d \Sigma_{jk}}, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

►► The relative amounts of capital allocated to each investment opportunity are the same as long as we use a positive homogeneous, law invariant risk measure.

Estimated ratios  $\widehat{\kappa}_i/\widehat{\kappa}_{i+1}$  of capital allocation ( $\theta = \alpha = 0.05$ )

sample from  $N\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}\right)$ , size =  $n$ , 1000 runs

$n$	true ratio	ES		PO		PH		Gaussian	
		bias	$\sqrt{\text{MSE}}$	bias	$\sqrt{\text{MSE}}$	bias	$\sqrt{\text{MSE}}$	bias	$\sqrt{\text{MSE}}$
100	4/5	0.0740	0.3962	0.0352	0.2815	0.0422	0.3281	0.0587	0.3933
	5/6	-0.0081	0.1045	-0.0028	0.0793	-0.0023	0.0908	-0.0033	0.1048
250	4/5	0.0129	0.2239	0.0101	0.1669	0.0219	0.2185	0.0332	0.2660
	5/6	0.0007	0.0634	-0.0003	0.0483	-0.0017	0.0623	-0.0030	0.0740
500	4/5	0.0092	0.1441	0.0064	0.1103	0.0138	0.1594	0.0188	0.1911
	5/6	-0.0006	0.0429	-0.0007	0.0329	-0.0015	0.0465	-0.0019	0.0552
5000	4/5	0.0017	0.0459	0.0006	0.0356	$10^{-5}$	0.0888	0.0005	0.0931
	5/6	-0.0003	0.0139	$9 \cdot 10^{-6}$	0.0108	0.0008	0.0265	0.0008	0.0278

Estimated ratios  $\widehat{\kappa}_i/\widehat{\kappa}_{i+1}$  of capital allocation ( $\theta = \alpha = 0.05$ )

sample from  $t_3\left(\begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}, 4\right)$ , size =  $n$ , 1000 runs

$n$	true ratio	ES		PO		PH		Gaussian	
		bias	$\sqrt{\text{MSE}}$	bias	$\sqrt{\text{MSE}}$	bias	$\sqrt{\text{MSE}}$	bias	$\sqrt{\text{MSE}}$
100	4/5	0.1498	1.0398	0.0926	0.5788	0.3003	4.7310	0.1144	1.8068
	5/6	-0.0069	0.1471	-0.0048	0.1238	-0.0068	0.1487	-0.0110	0.1754
250	4/5	0.0563	0.3477	0.0431	0.2970	0.0860	0.4712	0.1227	0.6317
	5/6	-0.0057	0.0966	-0.0043	0.0849	-0.0069	0.1207	-0.0084	0.1410
500	4/5	0.0176	0.2319	0.0198	0.2265	0.0497	1.4311	0.2511	5.8652
	5/6	0.0011	0.0654	-0.0004	0.0615	-0.0056	0.1097	-0.0073	0.1250
5000	4/5	-0.0013	0.0683	-0.0016	0.0638	0.0244	0.3356	0.0220	0.3158
	5/6	-0.0010	0.0202	0.0010	0.0189	0.0027	0.0836	0.0028	0.0820

Estimated capital allocation with GPD & t marginals ( $\theta = \alpha = 0.05$ )

using Gaussian copula with correlation matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}$

	ES		PO		PH		Gaussian	
	cont.	ratio	cont.	ratio	cont.	ratio	cont.	ratio
GPD(1/25)	2.60		2.21		1.58		3.25	
GPD(1/10)	4.38	(0.59)	3.45	(0.64)	4.18	(0.38)	8.30	(0.39)
GPD(1/3)	9.12	(0.48)	6.99	(0.49)	24.32	(0.17)	38.87	(0.21)
t(25)	1.28		0.99		0.74		1.60	
t(10)	2.04	(0.63)	1.54	(0.64)	1.69	(0.44)	3.44	(0.47)
t(3)	3.82	(0.53)	2.88	(0.54)	9.62	(0.18)	14.97	(0.23)

Estimated capital allocation with GPD & t marginals ( $\theta = \alpha = 0.05$ )

using Gaussian copula with correlation matrix  $\begin{pmatrix} 1 & -0.1 & 0.5 \\ -0.1 & 1 & -0.9 \\ 0.5 & -0.9 & 1 \end{pmatrix}$

	ES		PO		PH		Gaussian	
	cont.	ratio	cont.	ratio	cont.	ratio	cont.	ratio
GPD(1/25)	3.24		2.63		1.17		2.99	
GPD(1/10)	1.05	(3.09)	1.15	(2.29)	0.29	(4.03)	0.41	(7.29)
GPD(1/3)	8.12	(0.21)	6.26	(0.18)	7.58	(0.04)	21.02	(0.02)
t(25)	2.08		1.57		0.65		1.78	
t(10)	-0.73	(-2.83)	-0.54	(-2.91)	-0.60	(-1.09)	-1.75	(-1.02)
t(3)	2.63	(-0.28)	2.01	(-0.27)	2.60	(-0.23)	7.32	(-0.24)

## 5. Concluding Remarks (Tentative)

- Euler capital allocations based on ES and PODRM are easy to compute, and widely applicable.
- For ES and PODRM, the computational errors with Monte Carlo can be evaluated by CLT.
- For PHDRM and Wang transform, the CLT will not be applicable, and they are difficult to handle.
- Numerical experiments support some of the theoretical observations. We need systematic sensitivity analysis on dependence structure.



# G-expectations and some statistical problems

TOMOYUKI ICHIBA \*

## 1 Introduction

What is the (reasonable) worst scenario in the portfolio management? The fund manager often has to consider various market scenarios in the near future. In order to assess the balance between risk and return of portfolio choices, it is good to obtain some ideas about range of possible scenarios from the past data. The difficulty of understanding reasonable scenarios arises from uncertainty of the market characteristics in the future. In other words, the problem we need to look at is to understand how the market characteristics move in the past and in the future. Here we shall get some insights for this problem from the so-called  $G$ -expectation for volatility uncertainty. In this note we shall discuss some aspects of statistical estimation methods under the  $G$ -expectation.

In section 2.1 we review definition of  $G$ -expectations and volatility uncertainty, representation results and related topics. In section 2.2 we introduce the sublinear expectation under the discrete time along with the invariance principle. In section 2.3 we discuss some naive estimators of lower and upper bounds of volatility uncertainty as well as the corresponding estimator for the risk measure to see the difficulties in the estimation problem, and then present some open problems.

## 2 G-expectation

### 2.1 Volatility Uncertainty in Continuous-time

Given a fix time  $T$  let us consider a canonical space  $\Omega := C([0, T], \mathbb{R})$  of continuous functions on  $[0, T]$  and a set  $\mathcal{P}$  of probability measures on  $\Omega$  such that under any probability measure  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$  the canonical process  $\omega := \{\omega(t), 0 \leq t < \infty\}$  is a  $\mathbb{P}$ -martingale with  $\omega(0) = 0$  whose quadratic variation process  $\langle \omega \rangle(t)$  in a range  $[\lambda, \rho]$ , i.e.,

$$\lambda t \leq \langle \omega \rangle(t) \leq \rho t; \quad 0 \leq t < \infty, \quad (2.1)$$

where the nonnegative numbers  $\rho$  and  $\lambda$  are upper and lower bounds of volatility uncertainty. We denote by  $\mathcal{F}_t := \sigma(\omega_s, 0 \leq s \leq t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  the canonical filtration. Thus  $\mathcal{P}$  represents the scenarios of the sample paths which satisfies the condition (2.1).

---

\*Date: January 17th, 2016. Department of Statistics and Applied Probability, South Hall, University of California Santa Barbara 93106 USA. (E-mail: [ichiba@pstat.ucsb.edu](mailto:ichiba@pstat.ucsb.edu)) Research supported in part by the National Science Foundation under grant NSF-DMS-13-13373. The author is greatly thankful for fruitful discussions to the participants in the workshop held on December 18th, 2015 at University of Tokyo. He is also very thankful to Professor Naoto Kunitomo for warm hospitality during his visit at University of Tokyo in December 2015.

A  $G$ -expectation is a map from random variables on the canonical space  $\Omega$  to real numbers (PENG (2007), (2008), (2010)). The symbol  $G$  refers to a given function of the form

$$G(x) := \frac{1}{2} \sup_{a \in [\lambda, \rho]} (ax), \quad (2.2)$$

where  $x \in \mathbb{R}$  for the one-dimensional, volatility uncertainty case. Given a Lipschitz continuous function  $f$ , the  $G$ -expectation of a random variable  $\xi$  of the form  $\xi := f(\omega(T))$  is defined by

$$\widehat{\mathbb{E}}(\xi) := u(0, 0), \quad (2.3)$$

where  $u(0, 0)$  is the initial value of the solution  $u(t, x)$  to the non-linear backward heat equation

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)\right) = 0,$$

with the terminal condition  $u(T, x) = f(x)$ , where  $G$  is the function defined in (2.2),  $u_t$  is the derivative with respect to  $t$  and  $u_{xx}$  is the second derivative with respect to  $x$ . It coincides with

$$\widehat{\mathbb{E}}(\xi) = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\xi) \quad (2.4)$$

for any  $\mathcal{F}_T$ -measurable random variable  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  with  $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\xi) < +\infty$  for every  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$  (DENNIS, HU & PENG (2011)). Each  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$  represents a scenario. Thus the  $G$ -expectation is understood from (2.4) as the worst case expectation, if we look at  $\xi$  as the portfolio loss size based on the martingale measures with the constraint (2.1). The volatility uncertainty is measured by the interval  $[\lambda, \rho]$ .

The  $G$ -expectation  $\widehat{\mathbb{E}}$  is a special case of non-linear expectations on the Lipschitz functional. More generally, given a linear space  $\mathcal{H}$  of real functions that contains 1 and satisfies the property that  $X \in \mathcal{H}$  implies  $|X| \in \mathcal{H}$ , a nonlinear expectation  $\mathbf{E}$  is defined as a functional  $\mathcal{H} \mapsto \mathbb{R}$  satisfying

- (a) (Monotonicity) If  $X, Y \in \mathcal{H}$  and  $X \geq Y$ , then  $\mathbf{E}[X] \geq \mathbf{E}[Y]$ ; and
- (b) (Constant Preservation)  $\mathbf{E}[c] = c$  for every constants  $c$ .

In addition, if the functional  $\mathbf{E}$  satisfies

- (c) (Subadditivity)  $\mathbf{E}[X + Y] \leq \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$  for every  $X, Y \in \mathcal{H}$  and
- (d) (Positive Homogeneity)  $\mathbf{E}[\lambda X + c] = \lambda \mathbf{E}[X] + c$  for every  $\lambda \geq 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$  and  $X \in \mathcal{H}$ ,

then we call it the sublinear expectation. The notion of the sublinear expectation is introduced by HUBER (1981) (cf. HUBER & STRASSEN (1973)) as the upper expectation in the context of robust statistics. In the context of mathematical finance it is introduced and studied axiomatically by ARTZNER, DELBAEN, EBER AND HEATH (1999) as the coherent risk measure. In fact, the representation (2.4) is generalized to the idea of the convex risk measure which typically takes the form of

$$\rho(X) := \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_\rho} (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})),$$

where  $\mathcal{Q}_\rho$  is some class of probability measures on the set of possible scenarios and  $\alpha(\cdot)$  is some penalty function on  $\mathcal{Q}_\rho$ , and  $X$  can be seen as the net monetary outcome. The convex risk measure is a monetary risk measure or capital requirement with a convex acceptance set. When the capital requirement  $\rho(X)$  only depends on the law of  $X$ , the risk measure is called law-invariant.

The structure of law-invariant risk measures are described in terms of average value at risk (e.g., KUSUOKA (2001), FRITELLI & ROSAZZA GIANIN (2005)).

In actuarial mathematics convex risk measure appears as convex principles of premium calculations (e.g., DEPRez & GERBER (1985)). In mathematical economics preference of a rational agent is formulated as expected utility under the axioms of rationality. Relaxation of the axioms of rationality implies the coherent risk measure and the convex risk measure (GILBOA & SCHMEIDER (1989), MACCHERONI, MARINACCI & RUSTICHINI (2006)).

The sublinear expectation  $\mathbf{E}$  has some nice properties listed below.

- For  $p \geq 1$  let us denote by  $\mathcal{H}_p$  the subset of  $\mathcal{H}$  that consists of  $X \in \mathcal{H}$  with  $\mathbf{E}[|X|^p] < \infty$ . For every  $X \in \mathcal{H}_p$  and  $Y \in \mathcal{H}_q$  with  $1 \leq p \leq q < \infty$  and  $(1/p) + (1/q) = 1$  we have

$$(\mathbf{E}[|X + Y|^p])^{1/p} \leq (\mathbf{E}[|X|^p])^{1/p} + (\mathbf{E}[|Y|^p])^{1/p},$$

as well as

$$\mathbf{E}[|XY|] \leq (\mathbf{E}[|X|^p])^{1/p} (\mathbf{E}[|Y|^q])^{1/q}.$$

The linear space  $\mathcal{H}_p$  can be completed to a Banach space under the norm  $\|X\|_p := (\mathbf{E}[|X|^p])^{1/p}$ . Thus the sublinear expectation  $\mathbf{E}$  can be extended to this Banach space.

- If  $X, Y \in \mathcal{H}_1$  with  $\mathbf{E}[Y] = -\mathbf{E}[-Y]$ , then by the subadditivity we have

$$\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[-Y] \leq \mathbf{E}[X + Y] \leq \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y],$$

and hence

$$\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y].$$

In particular, if  $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[-Y] = 0$ , then  $\mathbf{E}[X + Y] = \mathbf{E}[X]$ .

- Let us consider the sequence  $X_1, X_2$  in  $\mathcal{H}_2$  with  $\mathbf{E}[X_i^2] = \bar{\sigma}^2 > 0$  and  $\mathbf{E}[X_i X_{i+j}] = \mathbf{E}[-X_i X_j] = 0$  for every  $i, j = 1, 2, \dots$ . Then the *Law of Large Numbers* holds in the sense that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right] = 0, \quad (2.5)$$

where  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  for  $n \in \mathbb{N}$ . Indeed, by the above properties of sublinear expectations

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|^2\right] &= \frac{1}{n^2} \mathbf{E}[S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}X_n + X_n^2] = \frac{1}{n^2} \mathbf{E}[S_{n-1}^2 + X_n^2] \leq \frac{1}{n^2} \mathbf{E}[S_{n-1}^2] + \mathbf{E}[X_n^2] \\ &\leq \dots \leq \frac{n}{n^2} \mathbf{E}[X_1^2] = \frac{\bar{\sigma}^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

- Suppose now that we have  $X \in \mathcal{H}$  with a sublinear expectation  $\mathbf{E}$  and  $X' \in \mathcal{H}'$  with another sublinear expectation  $\mathbf{E}'$ . We say  $X$  under  $\mathbf{E}$  and  $X'$  under  $\mathbf{E}'$  are identically distributed, if

$$\mathbf{E}[\varphi(X)] = \mathbf{E}'[\varphi(Y)]$$

for every continuous test function  $\varphi(\cdot)$  with polynomial growth and with  $\varphi(X) \in \mathcal{H}_1$  and  $\varphi(X') \in \mathcal{H}'_1$ , where  $\mathcal{H}'_1$  is the subset of  $\mathcal{H}'$  with finite sublinear expectation. Also, for  $n \in \mathbb{N}$  we say a random variable  $X \in \mathcal{H}$  is independent of  $Y := (Y_1, \dots, Y_n) \in \mathcal{H}^n := \mathcal{H} \times \dots \times \mathcal{H}$ , if

$$\mathbf{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[\varphi(X, y)] |_{\{y=Y\}}]$$

for every continuous test function  $\varphi : H^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  with polynomial growth and with  $\varphi(X, y) \in \mathcal{H}_1$ ,  $\varphi(X, y) \in \mathcal{H}_1$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ . A sequence  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  of random variables in  $\mathcal{H}$  is said to converge in distribution under  $\mathbf{E}$  if  $\{\mathbf{E}[\varphi(X_n)], n \in \mathbb{N}\}$  converges for every uniformly Lipschitz, bounded function  $\varphi(\cdot)$ . If  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  in  $\mathcal{H}_3$  are identically distributed with  $\mathbf{E}[X_1] = \mathbf{E}[-X_1] = 0$ ,  $\mathbf{E}[X_1^2] = \rho > 0$ ,  $-\mathbf{E}[-X_1^2] = \lambda > 0$ , and if each  $X_{n+1}$  is independent of  $(X_1, \dots, X_n)$  for every  $n \in \mathbb{N}$ , then the *Central Limit Theorem* holds, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[ \varphi \left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right] = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(\xi)], \quad (2.6)$$

where  $\widehat{\mathbb{E}}$  is the  $G$ -expectation in (2.4) with the parameters  $\rho, \lambda$ .

- A random variable  $\xi$  in  $\mathcal{H}_2$  is called  $G$ -normally distributed with volatility uncertainty  $[\lambda, \rho]$  under  $\widehat{\mathbb{E}}$ , if for every uniformly Lipschitz, bounded test function  $\varphi(\cdot)$

$$v(t, x) := \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x + \sqrt{t}\xi)]; \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$$

is the unique, bounded continuous viscosity solution to

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)\right) = 0, \quad v(0, x) = \varphi(x), \quad (2.7)$$

where  $G(\cdot)$  is the nonlinear function defined in (2.2). It follows from this definition

$$v(1, 0) = \widehat{\mathbb{E}}[\xi],$$

and in general, with the solution  $v(\cdot)$  in (2.7) we define

$$P_t^G(\varphi)(x) := v(t, x) = \widehat{\mathbb{E}}[\varphi(x + \sqrt{t}\xi)]; \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

- When  $\rho = \lambda = \sigma^2 > 0$ , then the  $G$ -normal distribution with volatility uncertainty  $[\lambda, \rho]$  becomes the usual normal distribution with mean 0 and variance  $\sigma^2$  and with density

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right); \quad x \in \mathbb{R}.$$

In this case we say  $G^0$ -expectation, because the volatility uncertainty is reduced to the single variance. The functional  $(P^G)$  in (2.8) satisfies the nonlinear version

$$P_t^G(P_s^G(\varphi))(x) = P_{t+s}^G(\varphi)(x); \quad s, t \in [0, \infty), \quad x \in \mathbb{R}$$

of chain rule (or NISHIO semigroup property) as well as

$$P_1^G(\varphi) \geq P_1^{G^0}(\varphi), \quad P_1^{G^{[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]}}(\varphi) - P_1^{G^{[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]}}(\psi) \leq P_1^{G^{[\lambda, \rho]}}(\varphi - \psi) \quad (2.9)$$

for every uniformly Lipschitz continuous, bounded test functions  $\varphi, \psi$  and  $\lambda \leq \underline{\sigma}^2 \leq \bar{\sigma}^2 \leq \rho$ , where  $P^G =: P^{G^{[\lambda, \rho]}}$  is defined in (2.8),  $G^0$  is the special case with  $\rho = \lambda$ ,  $G^{[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]}$  is the  $G$ -normal distribution with volatility uncertainty  $[\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2]$ . We may extend this concept of  $G$ -normal random variables to the multivariate version of  $G$ -normal distribution.

All these properties and other properties of sublinear expectation and  $G$ -normal distribution have been developed by PENG (2007) and others. The idea of  $G$ -normal distribution is extended

to  $G$ -Brownian motion on the canonical space  $\Omega = C([0, T], \mathbb{R})$  of continuous functions on  $[0, T]$  for every  $T > 0$ . We consider the family

$$Lip^0(\mathcal{H}_T) := \{\varphi(\omega(t_1), \dots, \omega(t_m)) : \omega \in \Omega, t_1, \dots, t_m \in [0, T], \varphi \in lip(\mathbb{R}^m), m \geq 1\},$$

where  $lip(\mathbb{R}^m)$  is the space of uniformly Lipschitz continuous bounded functions on  $\mathbb{R}^m$ . We also define the  $G$ -expectation  $\widehat{\mathbb{E}}$  on  $Lip^0(\mathcal{H}_T)$ . The canonical process  $B(\cdot) = \omega(\cdot) \in \Omega$  is a  $G$ -Brownian motion if  $B(t)$  and  $B(t+s) - B(s)$  are identically distributed; and  $B(t_m) - B(t_{m-1})$  is independent of  $(B(t_1), \dots, B(t_{m-1}))$  in the following sense:

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(B(t_1), \dots, B(t_{m-1}), B(t_m))] = \widehat{\mathbb{E}}[\bar{\varphi}(B(t_1), \dots, B(t_{m-1}))],$$

for every uniformly Lipschitz continuous, bounded function  $\varphi$  with

$$\bar{\varphi}(y_1, \dots, y_{m-1}) = \widehat{E}[\varphi(y_1, \dots, y_{m-1}, y_{m-1} + B(t_m) - B(t_{m-1}))]; \quad (y_1, \dots, y_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}.$$

Furthermore, with  $G$ -Brownian motion we may define the conditional expectation, the stochastic integral with respect to  $G$ -Brownian motion, and the corresponding Itô's formula (PENG (2008)).

## 2.2 From Discrete-time to Continuous-time

Given  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \lambda \leq \rho < \infty$  we consider  $\mathbb{R}^{n+1}$ -valued random vector as a discrete time stochastic process in the canonical space  $\Omega_n := \mathbb{R}^{n+1}$  with elements  $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$  in discrete time  $k = 0, 1, \dots, n$  with the canonical filtration  $\mathcal{G}_k = \sigma(\omega_i, 0 \leq i \leq k)$ ,  $k = 0, \dots, n$ . We consider a set  $\mathcal{P}^{(n)}$  of probability measures such that each element  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$  the canonical process  $\omega$  forms a  $\mathbb{P}$ -martingale with  $\omega_0 = 0$  and

$$\frac{\lambda}{n} \leq |\omega_k - \omega_{k-1}|^2 \leq \frac{\rho}{n}; \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

The discrete analogue of the  $G$ -expectation representation (2.4) is defined by the sublinear expectation

$$\widehat{\mathbb{E}}^{(n)}(\eta) := \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\eta) \quad (2.11)$$

for any random variable  $\eta : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $\eta$  is  $\mathcal{G}_n$ -measurable and  $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\eta] < \infty$  for every  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$ .

We may extend from the discrete-time paths  $\Omega_n$  to the continuous paths  $\Omega = C([0, 1], \mathbb{R})$  by linear interpolation. Here for the sake of simplicity let us take  $T = 1$ . For a given  $\omega \in \Omega_n$  we define the linear interpolation

$$\widehat{\omega}(t, \omega) := (\lfloor nt \rfloor + 1 - nt)\omega_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor)\omega_{\lfloor nt \rfloor + 1}; \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.12)$$

where  $\lfloor x \rfloor$  is the maximum integer less than or equal to  $x$ . Then  $\widehat{\omega} := \{\widehat{\omega}(t, \omega), 0 \leq t \leq 1\}$  takes values in  $\Omega = C([0, 1], \mathbb{R})$  and  $\mathcal{G}_n$ -measurable random variable. Note that  $\widehat{\omega}(k/n, \omega) = \omega_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $\omega \in \Omega_n$ . Thus we may define the sublinear expectation

$$\widehat{\mathbb{E}}^{(n)}(\xi) := \widehat{\mathbb{E}}^{(n)}(\xi(\widehat{\omega})) \quad (2.13)$$

for any  $\mathcal{F}_T$ -measurable random variable  $\xi : \Omega = C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  via (2.11).

What is the relationship between the discrete version  $\widehat{\mathbb{E}}^{(n)}(\cdot)$  and the continuous version  $\widehat{\mathbb{E}}(\cdot)$  of the  $G$ -expectations?

Let us assume that  $\xi : \Omega = C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  is a continuous function with polynomial growth. It is shown by DOLINSKY, NUTZ & SONER (2012) that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{E}}^{(n)}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\xi) = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\xi) = \widehat{\mathbb{E}}(\xi). \quad (2.14)$$

This can be seen as a DONSKER-type result under the  $G$ -expectation.

### 2.3 Estimation Procedures for Bounds

Suppose that the observation  $\omega_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  is obtained in discrete-time points  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$  with  $t_k := k/n$ ,  $k = 0, \dots, n$ . We know from (2.14) that for large  $n$  the discrete analogue (2.11)-(2.13) of the sublinear expectation approximates the  $G$ -expectation with volatility uncertainty  $[\lambda, \rho]$ . From the observation  $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$ , we may define  $\widehat{\omega}(\cdot) := \widehat{\omega}(\cdot, \omega)$  as in (2.12). Let us consider the estimation problem of the interval  $[\lambda, \rho]$  of the  $G$ -expectation of volatility uncertainty. Since  $\widehat{\mathbb{E}}[(\widehat{\omega}(1))^2] = \rho$  and  $-\widehat{\mathbb{E}}[-(\widehat{\omega}(1))^2] = \lambda$ , the estimation of these bounds  $[\lambda, \rho]$  is essentially the estimation of the  $G$ -expectation.

It follows from (2.10) that the naive estimators of the lower and the upper bounds are

$$\widetilde{\lambda}_n := \min_{1 \leq k \leq n} (n |\omega_k - \omega_{k-1}|^2), \quad \widetilde{\rho}_n := \max_{1 \leq k \leq n} (n |\omega_k - \omega_{k-1}|^2), \quad (2.15)$$

respectively.

Using these estimators  $\widetilde{\lambda}_n$ ,  $\widetilde{\rho}_n$ , given a function  $f$ , let us define the implied  $G$ -expectation

$$\widetilde{\xi}_n := \widetilde{u}_n(0, 0), \quad (2.16)$$

for any  $\mathcal{F}_1$ -measurable random variable  $\xi$  of the form  $\xi = f(\omega(\cdot))$  for  $\omega \in \Omega = C([0, 1], \mathbb{R})$ , where  $\widetilde{u}_n(t, x)$  is the non-linear backward heat equation

$$-\frac{\partial \widetilde{u}_n}{\partial t}(t, x) - \widetilde{G}^{(n)}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}_n}{\partial x^2}(t, x)\right) = 0; \quad (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$$

with the terminal condition  $\widetilde{u}_n(1, x) = f(x)$  and

$$\widetilde{G}^{(n)}(x) := \frac{1}{2} \sup_{a \in [\widetilde{\lambda}_n, \widetilde{\rho}_n]} (ax); \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Proposition.** The estimators  $\widetilde{\lambda}_n$ ,  $\widetilde{\rho}_n$  in (2.15) satisfies that for every  $n \in \mathbb{N}$  we have

$$\lambda \leq -\widehat{\mathbb{E}}^{(n)}[-\widetilde{\lambda}_n] \leq \widehat{\mathbb{E}}^{(n)}[\widetilde{\rho}_n] \leq \rho, \quad (2.17)$$

where  $\widehat{\mathbb{E}}^{(n)}$  is the sublinear expectation defined in (2.11). Assume that  $\xi = f(\omega(\cdot))$ ,  $\omega \in \Omega = C([0, 1], \mathbb{R})$ , where  $f$  is a Lipschitz continuous, bounded function. Then the estimator  $\widetilde{\xi}_n$  in (2.16) satisfies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathbb{E}}^{(n)}[\widetilde{\xi}_n] \leq \widehat{\mathbb{E}}[\xi], \quad (2.18)$$

for every  $\mathcal{F}_T$ -measurable random variable  $\xi$  of the form  $\xi = f(\omega)$ , where  $\widehat{\mathbb{E}}$  is the  $G$ -expectation in (2.4).

**Proof.** First it follows from (2.10) that under the probability measure  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$  on  $\Omega_n$  we have for  $k = 1, \dots, n$   $\lambda \leq n|\omega_k - \omega_{k-1}|^2 \leq \rho$ . Hence by the definition (2.15) we obtain

$$\lambda \leq \tilde{\lambda}_n \leq \tilde{\rho}_n \leq \rho, \quad (2.19)$$

and also by taking the expectation under  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$  we claim

$$\lambda \leq -\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[-\tilde{\lambda}_n] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\min_{1 \leq k \leq n} (n|\omega_k - \omega_{k-1}|^2)\right] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\max_{1 \leq k \leq n} (n|\omega_k - \omega_{k-1}|^2)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{\rho}_n] \leq \rho.$$

Then taking the supremum over  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$  we obtain (2.17).

To show (2.18), first we obtain  $G(\cdot) \geq \tilde{G}^{(n)}(\cdot)$  from (2.19), and then apply the result (2.9) with  $\varphi(\cdot) = f(\cdot)$  and  $\psi(\cdot) \equiv 0$  backward in time (cf. PENG (2008)) to obtain the inequality  $\tilde{\xi}_n \leq \hat{\mathbb{E}}[\xi]$   $\mathbb{P}$ -a.s. for every  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$ . Taking the supremum over  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}$  and then limits, we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{E}}^{(n)}[\tilde{\xi}_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}^{(n)}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{\xi}_n] \leq \hat{\mathbb{E}}[\xi],$$

and conclude the proof of the proposition.  $\square$

This proposition implies that the naive estimate (2.16) of risk measure of the wealth  $\xi = f(\omega(\cdot))$ , in general, underestimates the risk  $\hat{\mathbb{E}}[\xi]$  in the sense of (2.17)-(2.18). This type of problem often comes even in the classical statistical problem of estimating the support of random variables. Thus the natural question is how to improve the estimation of the lower and upper bounds for the volatility uncertainty. There might be a good subset of the family  $\mathcal{P}^{(n)}$  of probability measures on  $\Omega_n$ , so that the estimation procedure works well. Or is there stronger formulation to resolve this problem?

Here are some other open problems.

- In this note we consider only volatility uncertainty for one-dimensional random variable (or one asset). In general, we may consider multidimensional random variables with uncertainty for the volatility as well as the return, i.e., the function  $G(\cdot)$  in (2.2) is replaced by

$$G(p, A) := \sup_{(q, Q) \in \Gamma} \left( \frac{1}{2} \text{Trace}(AQQ') + \langle p, q \rangle \right); \quad (p, A) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}(d), \quad (2.20)$$

where  $\Gamma$  is a bounded, closed subset of  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times d}$ , and  $\mathbb{S}(d)$  is the space of  $(d \times d)$  square matrix. The corresponding equation is

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x, y) - G(D_y v(t, x, y), D_x^2 v(t, x, y)) = 0; \quad (t, x, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,$$

with Cauchy condition  $u(0, x, y) = \varphi(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  and the derivatives  $D_y v = (\partial v / \partial y_i)_{1 \leq i \leq d}$ ,  $D_x v = (\partial^2 v / \partial x_i \partial x_j)_{1 \leq i, j \leq d}$  (see PENG (2010)). Suppose that some discrete observation is given but  $\Gamma$  is unknown. Is there some good estimation procedure for unknown  $\Gamma$  in (2.20)?

- The above statistical problems are for discrete time observation. Suppose that the observation is continuously obtained. Is there a good way of combining filtering technique and optimization technique under the  $G$ -Brownian motion?

## Bibliography

- ARTZNER, PH., DELBAEN, F., EBER, J.-M. & HEATH, D. (1999) “Coherent measures of risk”, *Math. Finance* **9** 664-675.
- DENIS, L., HU, M. & PENG, S. (2011) “Function spaces and capacity related to a sublinear expectation: application to G-Brownian motion paths”, *Potential Analysis* **34**, 139-161
- DEPREZ, O. & GERBER, H.U. (1985) “On convex principles of premium calculation” *Insurance Math. Econom.* **4** 179-189, 1985.
- DOLINSKY, Y., NUTZ, M. & SONER, H.M. (2012) “Weak approximation of G-expectation”, *Stochastic Processes and their Applications* **122** 664-675.
- FRITTELLI, M. & ROSAZZA GIANIN, E. (2005) “Law invariant convex risk measures” *Adv. Math. Econ.* **7** 33-46.
- GILBOA, I. & SCHMEIDLER, D. (1989) “Maxmin expected utility with nonunique prior”, *J. Math. Econom.* **18** 141-153.
- HUBER, P.J. (1981) *Robust Statistics*, Jon Wiley & Sons.
- HUBER, P.J. & STRASSEN, V. (1973) “Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for capacities” *Ann. Statist.* **1** 251-263.
- KUSUOKA, S. (2001) “On law invariant coherent risk measures” *Adv. Math. Econ.* **3** 83-95.
- MACCHERONI, F. MARINACCI, M. & RUSTICHINI, A. (2006) “Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences” *Econometrica*, **74** 1447-1498.
- PENG, S. (2007) “G-expectation, G-Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type” in *Stochastic Analysis and Applications*, in Abel Symp. **2**, Springer, Berlin, 541-567
- PENG, S. (2008) “Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation” *Stochastic Processes and their Applications*, **118** 2223-2253.
- PENG, S. (2010) “Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty” Preprint available at arXiv: 1002.4546v1.