

公表データにもとづく損害保険リスクモデル

田中周二* , 栗山 晃†

H25.11.16

概要

損害保険会社の保険引受リスクの計測のために、過去さまざまなモデルが考案され実際に利用されてきた。古典的な集合的危険論に基づく複合分布モデルは理論的にもよく研究されており、現在でも基本的なモデルとなっている。しかし、このモデルは現実の損害保険リスクの一部しか表現できておらず、特に (1) 保険種目間の相関関係を考慮できないこと、(2) 損害率のシステムティックなリスクが反映されていないこと、(3) 特定年度の特異要因（例えば大規模な台風の上陸）が反映できないこと、などは実用的なリスク計量化のためには克服すべき課題といえよう。

このような現実的なリスクモデルの一例として IAA(2004) は MKL (Meyers, Klinker, Lalonde) モデルを推奨した。このモデルは個社だけのデータではなく損害保険業界の各社の損害率の時系列データを使用することにより、保険種目ごと及び合算した保険ポートフォリオのできるだけ現実的な損害額分布を求めることができる。その特徴は、

- 保険種目間、異なる保険会社間の相関を考慮することができる。
- 損害率のシステムティックな変動をモデルに組み込むことができる。
- モデルのパラメーターの推定方法が開発されている。
- 保険ポートフォリオのできるだけ現実的な損害額分布を求めることによりリスク量の計算が可能。

当論文では日本の損害保険業界のデータを用いて MKL モデルを構築することによりこのモデルの適用可能性を評価することを目的とする。

Keywords: 損保引受けリスク 相関 集合的危険論 経済価値ベース ソルベンシー 2 内部モデル MKL (Glenn G. Meyers, Fredrick L. Klinker, and David A. Lalonde) モデル

* 日本大学大学院総合基礎科学研究科教授

† 損害保険料率算出機構

1 はじめに

1.1 目的

この論文の目的は、経済価値ベースのソルベンシー評価の導入を視野に入れて、日本の損害保険業界の公表データにもとづき損害保険引受リスクモデルを構築し、そのモデルを利用して現実的なリスク評価プロセスを提案することである。すなわち、

1. 損害保険会社の損害保険引受リスクモデルの構築。MKL モデルを参考にして頻度と強度のパラメーターの不確実性と相関を取り入れる。
2. 期待損害額と相関生成パラメーターの推定方法について新たな方法を検討する。
3. さまざまな前提におけるソルベンシー評価の試算を実施し、その水準や分散効果の程度を見る。

2 最近の損害保険業界の損害率データの概要

これから我が国の損害保険業界の 2001 年度より 2010 年度までの損害率の時系列データにもとづいてリスクモデルの構築を行ってゆくがその前に 10 年間の損害保険業の収入と支出の状況を概観しておくことにしよう。

2.1 損害保険業界の収支状況

火災保険は、2004 年度（損害率 71.9 %）は自然災害（台風 16 号、18 号、23 号ほかで 7,274 億円、地震（新潟県中越地震、福岡県西方沖地震）で 305 億円の大口支払があった。2011 年度（148.7 %）の大幅な悪化は前年度末の直前（3 月 11 日）に発生した東日本大震災（12,346 億円）、9 月の台風 15 号（1,123 億円）、タイでの大洪水による保険事故が多額な支払となったことによる。海上保険は、2009 年度（損害率 60.9 %）、2011 年度（62.3 %）が高くなっているが、円高（2009 年度対米ドル為替レート 90 円台、2011 年度年初 80 円台、年央 75 円台、年度末 83 円台）傾向の継続に伴う積荷物流の減少の影響が大きいものと考えられる。

ちなみに、2012 年度は、国内外の自然災害に係る発生保険金の減少と資産運用損益の改善により、多くの会社が黒字転換または増益となったが、主力商品の自動車保険において収支改善の兆しがあるものの依然としてその損害率は高い水準にとどまった。また、2013 年度は、自賠責保険（保険料引き上げ）、火災保険（住宅着工件数の増加）、海上保険（円安の恩恵による輸出荷動きの増加）、賠償責任保険（経済活動の活発化）の収入保険料が伸びた一方、7 月以降の台風や記録的豪

雨、竜巻などの自然災害による被害による保険金支払いの増加が見込まれ損害率水準の行方は依然不透明である。

2.2 損害保険会社の損害率実績の分析

まず対象とする損害保険会社は以下の12社(グループ)とする。損害保険業界はこの10年間で合併を繰り返してきたが、ここでは2012年時点での合併後の会社(グループ)を対象とするため過去のデータについては、過去から合併していたものとして合算したデータを用いて分析する。12社については各社の2011年度決算におけるプロフィールを以下に掲げる。また対象とする保険種目は、火災保険、海上保険、運送保険、傷害保険、自動車保険、自賠責保険、その他の7区分とした。

分析の対象となる損害保険会社(グループ)のプロフィール (単位: 億円, %)

	正味収入保険料	損害率	事業費率	コンバインドレシオ	支払備金
1	17830	76.9	36.7	113.5	8851
2	12811	73.3	40.3	113.6	6200
3	12659	79.0	39.4	118.4	6989
4	10746	74.9	40.0	114.9	4823
5	1366	69.7	41.5	111.2	514
6	2648	75.2	38.8	114.0	1015
7	1592	68.1	40.8	108.9	617
8	385	53.0	42.6	95.6	106
9	381	61.7	50.7	112.4	124
10	6306	78.2	41.5	119.7	3019
11	138	63.0	49.3	112.3	48
12	144	56.0	72.7	128.7	49

(注) 損害調査費は損害率には含まず、事業費率に含む方式で算出している。

2.3 会社別損害率の時系列推移

損害率の定義は、損保業界の公表ベースでは「正味支払保険金」を「正味収入保険料」で除した率である。

- 正味収入保険料=元受正味保険料+受再正味保険料-出再正味保険料-収入積立保険料
- 正味支払保険金=元受正味保険金+受再正味保険金-出再正味保険金-回収再保険金

となっており、再保険収支を考慮したその会社の収支を反映した率となっている。元受会社の固有の引受リスクを反映するためには、「元受正味保険金」を「元受正味収入保険料」を除した「元受正味損害率」で測定すべきであるが、本論では再保険も含めた損害率で分析するものとする。なお、「事業費」を「正味収入保険料」で除した率を事業費率と呼んでおり、損害率と事業費率を加えたものがいわゆるコンバインドレシオに当たる。以下は、会社別損害率の推移(2001年～2010年)を表した図である。

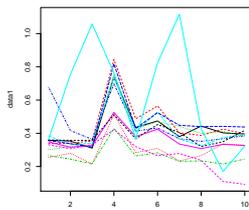


図 1: 火災

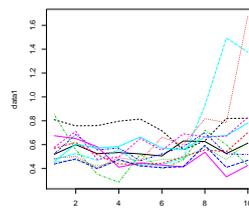


図 2: 海上

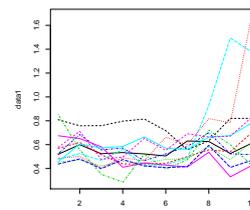


図 3: 運送

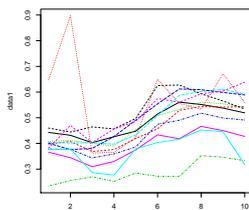


図 4: 傷害

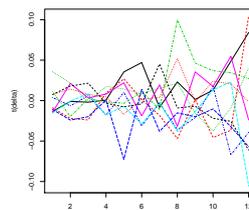


図 5: 自動車

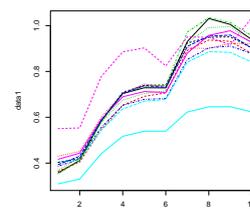


図 6: 自賠償

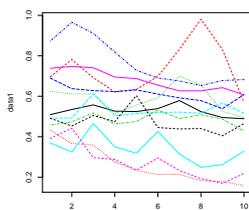


図 7: その他

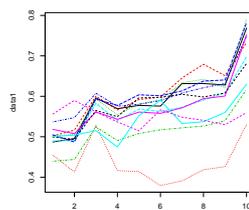


図 8: 合計

ちなみに損害保険会社は、強制保険である地震保険や自賠責保険について法的に地震再保険¹、自賠責保険共同プール²に出再が義務付けられている再保険がある。それ以外の種目においても任意再保険、特約再保険また割合再保険、非割合再保険の形で広く取引されているが、保険種目、会社ごとに再保険政策に相違がみられる。

3 保険損害額モデル

基本的な集合的リスクモデルは以下のような構造を持つ。(Bowers, Gerber, Jones, Hickman and Nesbitt[1997, Ch.13] など)

3.1 集合的リスクモデル

アルゴリズム#1

1. 保険種目 h 内では 1 件あたりの損害発生額は同一の確率変数に従う。
2. 平均 λ_h の分布 (計数過程) から発生件数 K_h を選ぶ。
3. 各 h に対し, それぞれの $k = 1, \dots, K_h$ ごとの損害額 Z_{hk} を選ぶ。
4. 保険種目全体 h の損害額は $X_h = \sum_{k=1}^{K_h} Z_{hk}$ である。
5. これから会社全体の損害額は $X = \sum_{h=1}^H X_h$ となる。

特に、計数過程がポアソン過程の場合で損害額が対数正規分布やガンマ分布のようによく知られた分布からの標本の場合には複合ポアソン分布となるのでさまざまな計算方法が知られている。ところが、現実には会社間や保険種目間の相関が観察される。この理由は、一部の保険事故の発生や損害額には何らかの共通要因があると考えられるからである。たとえば 1 件あたりの損害額は一般的なインフレ (デフレ) の影響を受けているかもしれないし、台風被害は自動車にも家屋にも損害を与えるため自動車保険と火災保険に何らかの相関が生ずるかもしれない。このような保険種目間の相関構造を組み込む方法の一つが以下のようなアルゴリズム 2 で与えられる。

¹巨大地震に際して、民間保険会社では支払能力に限度があるため設けられた官民一体の制度で、日本地震再保険会社が一旦全社から再保険を受再し、それを均質化して民間保険会社と政府のそれぞれの責任範囲で再々保険に出すという形をとる。

²各損害保険会社の自賠責保険料の純保険料部分が共同プールされ、保険料、保険金とも公平な配分率にもとづいて再配分される。このため各社の収支率の均一化が図られる仕組みとなっている。

3.2 相関構造

アルゴリズム #2

1. 保険種目 h 内では 1 件あたりの損害発生額は同一の確率変数に従う。
2. 平均 λ_h の分布から発生件数 K_h を選ぶ。
3. 各 h に対し, それぞれの $k = 1, \dots, K_h$ ごとの損害額 Z_{hk} を選ぶ。
4. つぎのような確率変数 β を選ぶ: $E[\beta] = 1, Var[\beta] = b > 0$ 。
5. 会社全体の損害額: $X = \beta \sum_{h=1}^H X_h$ とおく。

上に現れた β は、異なる保険種目に対し相関構造を与えることができるパラメータの不確実性を表す確率変数である。独立な確率変数 X, Y に対し $\beta X, \beta Y$ は相関を持つので、保険種目間の発生の相関を表現できる。

Patrik and Meyers[1980] は、請求強度と請求計数のパラメータを確率変数として扱うことで集合的危険論のパラメータに不確実性を入れるモデルを提案した。Heckman and Meyers[1983] は、効率的な計算アルゴリズムを伴うパラメータの不確実性を考慮するモデルを提案した。

パラメータの不確実性が分布の分散にどのような影響を与えるかは以下の説明で理解できよう。 X をパラメータ θ に依存する確率変数とすると、

$$Var[X] = E_{\theta}[Var[X|\theta]] + Var_{\theta}E[X|\theta]$$

もし、パラメータの不確実性がなければパラメータ分散項はゼロになる。不確実性を入れると、無条件分散は大きくなる。

3.3 MKL モデル

これを拡張して最終的に以下のモデルを得る。ここでは、共分散グループと事故年度概念が現れる。共分散グループとは、保険種目の相関が 1 とみなせるグループを言う。典型的には保険種目は異なっているが極めて類似した性格を持つ集団は同じ共分散グループとみなすことができる。

次に、事故年度は事故が発生した会計年度を意味し毎年の傾向変化や、ある年度に特有の要因、例えば自然災害の集中や法律改正などの影響を評価するために区分する必要がある。

アルゴリズム #3

1. 確率変数 β を選ぶ : $E[\beta] = 1, Var[\beta] = b > 0$ 。
2. 各共分散グループ i に対し、ランダムな分位点 p_i を選ぶ。
3. 各共分散グループ i 、各共分散グループ (G_i) 内の各 h 、事故年度 y に対し、損害額 Z_{hyk} , for $k = 1, \dots, K_h$ を選ぶ。
 - つぎのような確率変数 χ_{hy} の分布の p_i 分位点を選ぶ: $E[\chi_{hy}] = 1, Var[\chi_{hy}] = c_{hy} > 0$ 。
 - ランダムな発生件数 K_{hy} は平均 $\lambda_{hy}\chi_{hy}$ となるポアソン分布により発生させる。
 - 各 h, y に対し、ランダムに損害額 Z_{hyk} を発生させる。(このようにして損害額の相関は 1 になる)
4. 共分散グループ i の損害額 : $X_i = \sum_{k \in G_i} \sum_y \sum_{k=1}^{K_h} Z_{hk}$ 。
5. 会社全体の損害額 : $X = \beta \sum_{i=1}^n X_i$ 。

IAA[2004] ではこのモデルを以下のように修正、特定化したモデルを提案している。

IAA のモデル例

1. 各保険種目 i の損害額について次の操作を行う。
 - ガンマ分布を持つ $E[\chi_i] = 1, Var[\chi_i] = c_i > 0$ なる確率変数 χ_i を選ぶ :
 - ランダムな発生件数 K_i は平均 $\lambda_i\chi_i$ となるポアソン分布により発生させる。
 - 平均 μ_i , 分散 σ_i^2 の対数正規分布から各 $i, k = 1, 2, \dots, K_i$ に対し、ランダムに損害額 Z_{ik} を発生させる。
2. 保険種目 i の損害額 : $X_i = \sum_{k=1}^{K_i} Z_{ik}$ とおく。
3. 一様分布 (0,1) から各共分散グループ i に対し共通の分位点 p を選ぶ。各保険種目 i について $E[\beta_i] = 1, Var[\beta_i] = b_i > 0$ である分布の p 分位点をとる。これによって、各相関係数 $\rho_{ij} = 1$ である多変量分布が得られる。
4. 会社全体の損害額 : $X = \sum_{i=1} \beta_i X_i$ とおく。

アルゴリズム#3で β はすべての保険種目で共通としていたが、IAAでは保険種目ごとに異なる b_i を仮定していることに注意されたい。Heckman and Meyers[1983]では、 b_i を混合パラメーター (mixture parameter)、 c_i を感染パラメーター (contagion parameter)と呼んでいる。

これから簡単な計算により以下の公式が確認できる。

1. $E[X_i] = \lambda_i \mu_i$
2. $E[X] = \sum_i E[X_i]$
3. $Var[K_i] = \lambda_i + c_i \lambda_i^2$
4. $Var[X_i] = \lambda_i \sigma_i^2 + \mu_i^2 (\lambda_i + c_i \lambda_i^2)$
5. $Var[\beta_i X_i] = Cov[\beta_i X_i, \beta_i X_i] = (1 + b_i) Var[X_i] + E[X_i]^2 b_i = (1 + b_i) (\lambda_i \sigma_i^2 + \mu_i^2 (\lambda_i + c_i \lambda_i^2)) + b_i \mu_i^2 \lambda_i^2$
6. $i \neq j$ として、 $Cov[\beta_i X_i, \beta_j X_j] = \lambda_i \mu_i \lambda_j \mu_j \sqrt{b_i b_j} (\rho_{ij} = 1)$
7. $Var[X] = \sum_i \sum_j Cov[\beta_i X_i, \beta_j X_j]$

必要資本の計算を行うためには、損害額の分布の分位点を計算する必要があり、このためにはモンテカルロシミュレーションを実行するか高速フーリエ変換の方法を使う。前者はプログラミングは容易であるが計算負荷が大きく、後者はその反対の特徴を有す。

しかし、損害額の総額が対数正規分布に従うと仮定するならば、上の公式から平均 μ 、分散 σ^2 を求めることができる。対数正規分布の信頼水準 α の $VaR_\alpha(X)$ が求めらると $TVaR_\alpha(X)$ は以下の式により求めることができる。

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{E[X] - E[X \wedge VaR_\alpha(X)]}{1 - \alpha}$$

もちろん総額が対数正規分布にはならないため精密評価とは誤差が生ずる。

4 モデルパラメーターの推定プロセス

4.1 パラメーターの不確実性にもとづく相関を考慮するモデル

保険種目 i 、会社 j 、年度 k の損害額 X_{ijk} とすると、前節の公式より以下の式が成立する。ここに、 $E_{ijk} = E[X_{ijk}]$ と表記した。

$$Cov[X_{ijk}, X_{i'j'k'}] = \delta_{ii'} \delta_{jj'} (1 + b_i) \left\{ \left(\frac{\sigma_i^2}{\mu_i} + \mu_i \right) E_{ijk} + c_i E_{ijk}^2 \right\} + \delta_{G_i G_i'} \sqrt{b_i b_i'} E_{ijk} E_{i'j'k'} \quad (1)$$

共分散の定義より、

$$Cov[X_{ijk}, X_{i'j'k'}] = E[(X_{ijk} - E[X_{ijk}])(X_{i'j'k'} - E[X_{i'j'k'}])] \quad (2)$$

保険種目 i , 会社 j , 年度 k の損害額 X_{ijk} について、次のように標準化偏差を定義する。

$$\Delta_{ijk} = \frac{X_{ijk} - E[X_{ijk}]}{E[X_{ijk}]} \quad (3)$$

すると、クロネッカーのデルタ δ_{ab} ($a = b$ のときは 1、その他では 0) を導入すると、

$$Cov[\Delta_{ijk}, \Delta_{i'j'k'}] = (1 + b_i) \frac{\delta_{ii'} \delta_{jj'}}{E_{ijk}} \left(\frac{\sigma_i^2}{\mu_i} + \mu_i \right) + \delta_{ii'} \delta_{jj'} (1 + b_i) c_i + \delta_{G_i G_{i'}} \sqrt{b_i b_{i'}} \quad (4)$$

が成立し、特に $j = j'$ のときには、

$$Var[\Delta_{ijk}] = (1 + b_i) \left(\frac{\sigma_i^2}{\mu_i} + \mu_i \right) \frac{1}{E_{ijk}} + c_i b_i + c_i + b_i \quad (5)$$

が成立するので、 $Var[\Delta_{ijk}]$ の標本を用いると $1/E$ で回帰することにより $c_i + b_i$ の推定が可能となる。ここで $CV_{i,j,k} = \sqrt{Var[\Delta_{ijk}]}$ とすると、この量は標準偏差を期待値で割ったものであり変動係数を表している。

さらに、 $j \neq j'$ のときには、

$$Cov[\Delta_{ijk}, \Delta_{i'j'k'}] = b_i \quad (6)$$

となる。

また、同一会社 ($j = j'$) で保険種目が同じ共分散グループに属さない場合 ($i \neq i'$) には、

$$Cov[\Delta_{ijk}, \Delta_{i'j'k'}] = \delta_{G_i G_{i'}} \sqrt{b_i b_{i'}} \quad (7)$$

となるので、保険種目が同じ共分散グループに属するかの検定に用いることができる。

そこで、パラメーター推定の手順は以下のとおりとなる。

手順

1. 損害額の期待値 E_{ijk} を適切なモデルによって推定する。
2. 標準化変数 Δ_{ijk} を求め、同一保険種目・同一会社の分散 $Var[\Delta_{ijk}]$ を $1/E$ で回帰することにより $c_i + b_i$ の推定を行う。
3. 同一保険種目だが会社の異なる $Cov[\Delta_{ijk}, \Delta_{i'j'k'}]$ の加重平均により b_i の推定を行う。
4. 求めた分散と共分散の推定値により保険種目全体さらに会社全体の分散を求めることができる。

5 損失額期待値の推定

この節では、保険種目別に損失額期待値を推定するモデルの確定とそのモデルにもとづく結果の概要を述べる。MKL 論文では、保険種目別のロスレシオの時系列データをもとに平滑化手法である局所多項式平滑化法 (LOESS) を用いた推定値から損失額期待値を求める方法を紹介しているが、日本のデータを用いて推定を実施したところ殆どのケースでうまくゆかないことが判明したため、今回の推計ではロスレシオの対数値を以下の説明変数による一般化線形モデル (GLM) により、最も適合度の高いモデルを AIC によって選択することにした。なお、回帰計算に当たっては正味保険料による加重を考慮する。ポートフォリオの規模に大きな格差があるため保険データにおいて加重の必要性は MKL 論文でも強調されている。

$$\log(\text{ロスレシオ}) = \beta_1 \text{size} + \beta_2 \text{trend} + \beta_3 \text{year} + \beta_4 \text{company}$$

説明変数

- size(規模)：保険種目のポートフォリオの規模を表す要因であり正味保険料の対数値で表す
- trend(トレンド):10 年を通じて上昇か下降のトレンドがあるか。事業年度で回帰する
- year(年度ごと要因):その年度に特有の事象により生じた要因 (time 1 ~ 10)
- company(会社固有要因):それぞれのポートフォリオの特性から平均と異なる固有要因 (company1 ~ 12)

年度要因は、年度のトレンド要因があればそれを優先し、なければ年度ごとの固有要因の有無を調べることにした。会社の規模についても、その要因が効く場合にはそれを優先し、効かない場合には会社固有要因を調べることにした。

この表から分かることは、火災と海上については年度特有の要因により明らかに平年時と異なる損害率を示す年が存在する。火災の場合には巨大台風による風水害、海上の場合には大きな海難事故などが考えられよう。その他の保険種目では年度のトレンドが存在する。

強い規模要因は火災、傷害で観察され、残りの保険種目ではほぼ会社特有の要因に吸収されている。会社特有要因は規模要因を除く地域や市場の偏りによる保険ポートフォリオの異質性を反映するものと考えられるが、保険種目によりまったく異なる傾向を示している。特に火災、傷害とその他は異質性が大きいように見える。

今回は係数に有意性がないものも含めて、このモデルを採用することにした。³

³実際には年度要因、会社要因などはグルーピングした方が適切かもしれない。今後の課題としたい。

種目別のモデルと変数の選択結果

	火災	海上	運送	傷害	自動車	自賠償	その他
(切片)	***	***	*	***	.	***	***
size	***		*	***	*		
trend			***	***	***	***	***
year1	***	***					
year2		**					
year3	**						
year4	***						
year5	***	.					
year6	***						
year7		.					
year8		***					
year9							
year10		***					
comp1	***	***	***	***	***	***	***
comp2	***	**	*	**	**		***
comp3	***	***	***	***			***
comp4	***			***	**		***
comp5	***		*	***	*		
comp6	***	*	*	***	*		**
comp7	***	***	**	***	.		.
comp8	***		*	***	.		***
comp9	***		.	***	.		
comp10	***	***		***	*		***
comp11	***		.	***	*		
comp12	***			***	*		*

火災、運送、傷害、自動車では規模要因が効いているので、切片の値が、それ以外に比べて大きくなっている。年度特有要因があるのは火災と海上であり、損失が大きい年度が時々発生することが分かる。火災保険は、台風被害の大きい年度が特徴的に表れている。それ以外の保険種目では損害率のトレンドが観察され、運送、傷害、自動車、自賠償は上昇、その他は下降のトレンドである。

種目別のモデルパラメーター

	火災	海上	運送	傷害	自動車	自賠償	その他
(切片)	12.9264	-0.6174	3.2639	8.6006	2.9744	-0.9227	-0.5770
size	-0.7200		-0.2213	-0.5084	-0.1722		
trend			0.0141	0.0431	0.0142	0.0976	-0.0114
year1	0.0000	0.0000					
year2	-0.0633	0.0962					
year3	0.01291	-0.0452					
year4	0.6951	-0.0186					
year5	0.1573	-0.0566					
year6	0.2494	-0.0455					
year7	0.0588	0.0601					
year8	0.0404	0.1800					
year9	0.0185	-0.0006					
year10	0.0131	0.1933					
comp1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000		0.0000
comp2	-0.3082	-0.0677	-0.0178	-0.1526	-0.0648		0.3215
comp3	-0.2308	-0.1397	-0.1931	-0.0726	-0.0451		0.1033
comp4	-0.3697	0.0040	-0.2271	-0.4562	-0.0716		0.3657
comp5	-1.6989	-0.0829	-0.0889	-1.3431	-0.4583		-0.0102
comp6	-1.3453	-0.1655	-0.8597	-1.0858	-0.2987		0.2454
comp7	-1.6915	0.2752	-0.7753	-0.7789	-0.3970		-0.1154
comp8	-2.4353	0.0242	-2.1308	-2.3866	-0.7317		-0.8719
comp9	-2.7430	-0.1395	-1.1553	-2.4761	-0.6379		-0.0847
comp10	-0.5823	-0.2211	-0.1532	-0.4645	-0.1689		0.1494
comp11	-3.5954	0.0682	-1.1518	-2.9910	-0.8898		-0.4452
comp12	-4.3938	0.1033	1.5228	-2.0000	-0.7744		-0.7522

(注) 太字は有意水準 10 % 以上の要因を示す。

6 損害率の残差分析と b_i と c_i の推定

6.1 損害率の残差の分布

以下に示すグラフは、保険種目別の損害額期待値と実際値の残差の分布を箱髭図で表したものである。

保険種目別の残差の分布

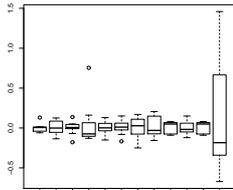


図 9: 火災

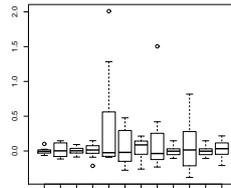


図 10: 海上

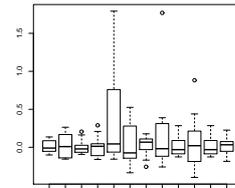


図 11: 運送

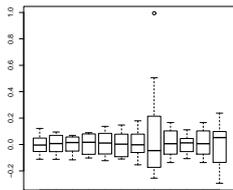


図 12: 傷害

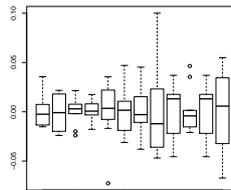


図 13: 自動車

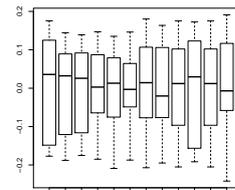


図 14: 自賠償

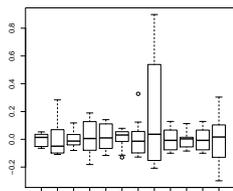


図 15: その他

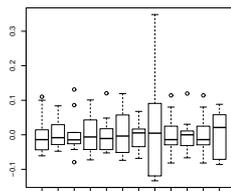


図 16: 合計

6.1.1 $b_i + c_i$ の推定

先に述べたように標準化変数 Δ_{ijk} を求め、同一保険種目・同一会社の分散 $Var[\Delta_{ijk}]$ を $1/E$ で線形回帰することにより $c_i + b_i$ の推定を行う。この場合、期待損失額の大きさには大きな差異があるため重み付けをしなければ推定結果に大きなバイアスが生ずる。そこで期待損失額の重み付けによる線形回帰を行い、さらにブートストラップ法を用いて計算精度を上げることにした。ブートストラップ標本としては、重複を許す 12 社の会社標本を 100 通り作成し、また 10 年の年度標本も 100 通り作成し、それぞれの平均値とその標準誤差を計算することにした。推定結果は、保険種目によって精度の高い推定ができるものとそうでないものに分かれた。このブートストラップ標本により、点推定値のほか、95 パーセンタイル信頼区間も求めた。

$b_i + c_i$ の値を求めると同時に、 $Var[\Delta_{ijk}]$ の予測値から与えられた会社の変動係数の 2 乗の推定値 CV^2_i を求めることができる。後述するように、これから対数正規分布の対数標準偏差の推定値を得ることができる。

6.1.2 b_i の推定

次に、同一種目で異なる会社の標本共分散 $Cov[\Delta_{ijk}]$ から、期待損失額の重み付けによる平均値と標準誤差を求めることができる。分散と同様に、ブートストラップ法によって点推定値のほか、95 パーセンタイル信頼区間も求めた。

6.1.3 パラメーターの推定結果

サンプルとして 2010 年度の会社 1 についての推定結果を以下のとおりまとめた。⁴標準誤差 (s.e.) は会社要因と年度要因に分解したものを記載した。保険種目によって標準誤差の格差は非常に大きいことが分かる。

⁴他の会社や年度ではもちろん結果は異なる。

保険種目	火災	海上	運送	傷害	自動車	自賠償	その他
期待損失	914.8	388.2	256.8	874.0	5616.0	258.8	1141.2
$b_i + c_i$	0.0309	0.0604	0.0456	0.0112	0.00021	0.016	0.0219
(<i>s.e.</i>)	0.0695	0.1348	0.0889	0.0214	0.00003	0.010	0.0273
会社要因	0.0944	0.1739	0.1173	0.0287	0.00003	0.012	0.0360
年度要因	0.0008	0.0008	0.0039	0.0009	0.00003	0.001	0.0034
(95 % <i>Var</i>)	0.1626	0.3426	0.2091	0.0603	0.00025	0.030	0.0817
b_i	0.0001	0.0012	0.0071	0.0032	0.00006	0.0108	0.0009
(<i>s.e.</i>)	0.0008	0.0012	0.0035	0.0007	0.00002	0.010	0.0007
会社要因	0.0001	0.0011	0.0010	0.0005	0.00002	0.013	0.0006
年度要因	0.0010	0.0013	0.0039	0.0009	0.00002	0.003	0.0008
(95 % <i>Var</i>)	0.0017	0.0032	0.0141	0.0044	0.0001	0.0152	0.0022

7 ソルベンシーマージン

以上得られた推定値より、会社全体のソルベンシーマージンを評価する。保険種目ごとの損害額分布は対数正規分布であることを仮定し、会社全体の損害額分布も近似的に対数正規分布になることを仮定する。

分散 $Var[\Delta_{ijk}]$ の予測値が変動係数の二乗 CV^2_{ij} となることから対数正規分布の対数平均 μ と対数標準偏差 σ を仮定すると、

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, V[X] = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

となる。従って、変動係数の二乗は、 $CV[X]^2 = \frac{V[X]}{E[X]^2} = e^{\sigma^2} - 1$ である。

よって、

$$\sigma = \sqrt{\log(1 + CV[X]^2)}, \mu = \log E[X] - 2 \log(1 + CV[X]^2)$$

となる。このことから、対数正規分布が決定され、保険種目ごとの損害額分布の分位点の計算が可能となる。

次に、会社全体の分布を計算するためには、

$$V[X] = \sum_i \sum_j Cov[\beta_i X_i, \beta_j X_j]$$

の公式により、 $i \neq j$ のときの $Cov[\beta_i X_i, \beta_j X_j] = \lambda_i \mu_i \lambda_j \mu_j \sqrt{b_i b_j} (\rho_{ij} = 1)$ の計算が必要であるが、 b_i の推定値も得られているので計算可能である。

なお、 $Var[\Delta_{ijk}]$ や b_i は点推定値だけでなく、信頼区間も推定することができる。従って、パラメーターの推定誤差を考慮したソルベンシーマージンの評価も可能である。ここでは95%タイルの上側信頼区間の端点を取り、保守的なソルベンシー評価も行うことにした。

信頼水準 α に対する分位点はバリュアットリスク $VaR_\alpha(X)$ と呼ばれるが、保険ではテールバリュアットリスク $TVaR$ もよく使われている。このリスク尺度はバリュアットリスクに、それを超える分布の平均を加えた量で、公式

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{E[X] - E[X \wedge VaR_\alpha(X)]}{1 - \alpha}$$

により求めることができる。なお、

$$E[X \wedge VaR_\alpha(X)] = E[X] \Phi\left(\frac{\log(VaR_\alpha(X)) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) + VaR_\alpha(X) [1 - F(VaR_\alpha(X))]$$

である。

まず、前提条件となるパラメーターの推定値は以下のとおりであった。

【パラメーターの推定値 (会社 1)】

	期待損害額	最良推定			95 % 上側分位点		
	E	CV	σ	μ	CV	σ	μ
火災	914.8	0.04030	0.1987	18.252	0.16268	0.38823	18.030
海上	388.3	0.06041	0.2422	17.353	0.34263	0.54280	16.885
運送	256.9	0.06282	0.2468	16.939	0.40029	0.58024	16.388
傷害	874.0	0.01128	0.1059	18.263	0.06031	0.24199	18.168
自動車	5616.0	0.00021	0.0145	20.145	0.00025	0.016079	20.145
自賠償	2588.0	0.01645	0.1277	19.338	0.03023	0.17258	19.312
その他	1141.3	0.02199	0.1475	18.509	0.08170	0.28025	18.395

信頼水準 99 % タイルと 99.5 % タイルの分位点 VaR と $TVaR$ の試算結果は以下の 3 つの図にまとめられたとおりである。最初の図 17 は、保険種目間の分散効果を考慮しない場合の 2 通りの信頼水準とリスク尺度における結果である。一番左の図は期待損失額となっており、これが基準となっており、それぞれの場合の比率が分かるようになっている。1 本の棒は保険種目ごとのリスク量が積み上げられており、下から火災、海上、運送、傷害、自動車、自賠償、その他であるが、自動車、自賠償の期待損失額もリスク量も割合が大きくなっている。期待損失額の 10 % から 30 % 程度となっており、現在のソルベンシー基準値と比べても妥当な水準となっている。次の図 18 と図 19 は、それぞれ信頼水準が 95 % タイルと 99.5 % タイルの値となっており、それぞれが保険種目のリスク量の単純和に続いて、 VaR の分散効果を考慮した最良推定の水準、同じく信頼区間の上側 95 % タイルの水準となっている。信頼水準が高く、また VaR よりも $TVaR$ の方が大きいのは当然であるが、分散効果によって 4.5 % 減少するが推定誤差を考慮するとほぼ分散効果が打ち消されてしまう結果となっている。⁵

⁵ 損失額の総額の分布も対数正規分布と近似することによる誤差は 0.5~2 % 程度であることが試算により判明したので、その誤差も考慮すべきである。

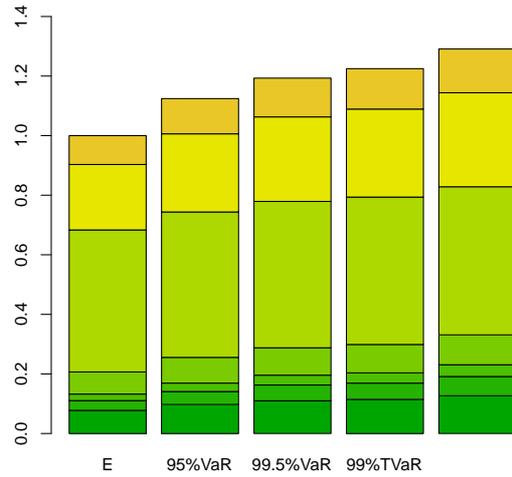


図 17: 保険種目ごとのソルベンシーマージンの総和

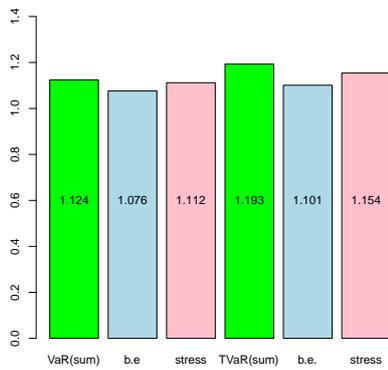


図 18: 信頼水準 95 % の場合

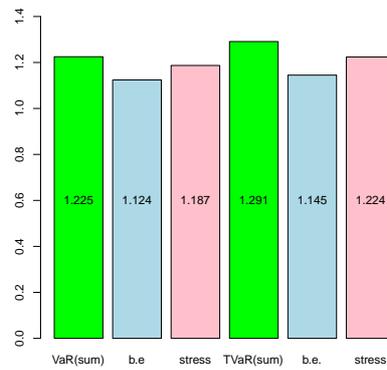


図 19: 信頼水準 99.5 % の場合

8 結論と今後の課題

今回の研究の目的は、MKLモデルの枠組みに沿って、日本の損害保険業界の損害額データを用いた損保引受リスク評価モデルが構築可能かどうか検証することであった。第一段階としては、過去10年間の複数の会社ベースの損害率データから当初望んでいたようなリスク計測モデルの構築方法の可能性を得ることができた。しかし、多くの課題が残っている。統計モデルの観点からは、損害率の原データには多くのノイズが含まれているため適当と思われる期待損害額の評価モデルをどのように作り上げるかが鍵となる。単なる平滑化モデルでは良い結果は得られず、今回は一般化線形モデル (GLM) を使ったが、一般化線形混合モデル (GLMM) や一般化加法モデル (GAM) のようなより柔軟な方法の方が良い可能性がある。 b_i, c_i の推定方法についてもさらに検討の余地があろう。

積み残した課題の一つは、損害率データの問題である。今回使用したデータは、再保険の収支を考慮した正味損害率であるが、元受保険会社の本来の引受リスクは元受損害率であり、このベースの試算を行う必要がある。また、今回の数値はいわゆる written basis (現金主義) にもとづくが、理論的には incurred basis (発生主義) さらには収支を正確に対応させる policy-year basis (契約年度主義) へと精度を向上させることが必要である。これにより再保険の効果について検証できるようになる。また事業費を含めたコンバインドレシオで実行してみることも必要であろう。

次は、カタストロフリスクの計測である。公表された統計データのみで計測することはおそらく不可能であるが、火災と海上において有意に異なる年度があることからより超長期のデータを使うことにより、ストレスシナリオの作成は可能であるかもしれない。他に興味があるのは、損害保険業界の再編が最近、急速に進んでいるが、損保引受リスクの合併によるリスク分散効果を計測することである。

また、ソルベンシー規制との関連では、最近改訂、厳格化した日本のソルベンシー規制および欧州のソルベンシー II との比較を行うことがある。ソルベンシー II では、いわゆる保険料リスクと準備金リスクを考えているが、今回は準備金リスクについて考慮していない。これも今後の課題である。

参考文献

- [1] Glenn G.Meyers, Fredrick L.Klinker and ,David A.Lalonde, "The Aggregation and Correlation of Insurance Exposure", CAS Forum Summer, 2003
- [2] Philip E.Heckman and Glenn G.Meyers, " The Calculation of Aggregate Loss Distributions from Claim Severity Distributions and Claim Count Distributions", PCAS LXX, (1983)

- [3] Glenn Meyers, "Estimating Between Line Correlations Generated by Parameter Uncertainty," CAS Forum, Summer (1999a)
- [4] Glenn Meyers, "Discussion of Aggregation of Correlated Risk Portfolios by Shaun Wang," PCAS LXXXVI, PCAS LXXXVI, (1999b)
- [5] Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, and Gordon E. Willmot, "Loss Models From Data to Decisions", (1998), John Wiley & Sons
- [6] International Association of Actuaries, "A Global Framework for Insurer Solvency Assessment", (2004)
- [7] Bowers, Gerber, Jones, Hickman and Nesbitt, "Actuarial Mathematics" (1988), Society of Actuaries
- [8] インシュアランス統計号 (損害保険版) 2001年度 ~ 2010年度
- [9] 損害保険ファクトブック, 各年度版

On a generalization from ruin to default in Lévy insurance risks

Yasutaka Shimizu

Graduate School of Engineering Science
Osaka University

“経済リスクの統計学の新展開：稀な事象と再起的事象”

2013年12月26日

(Joint work with R.Feng, University of Illinois)

Contents

- Insurance ruin theory and the recent developments
- “Ruin” to “Default”: Lévy risk models and default-related quantities
- Some representations for “default-related risks”
- (Connection to Lévy fluctuation theory)
- Concluding remarks

Part I

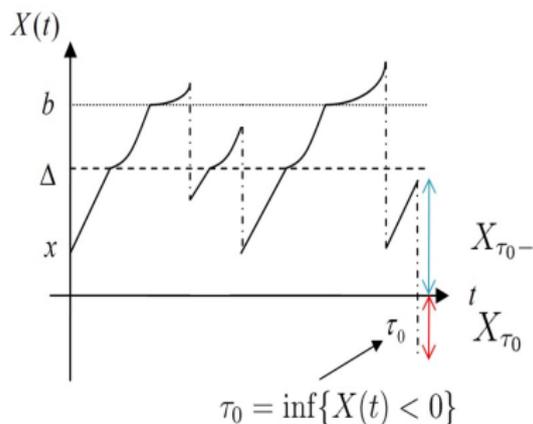
Ruin theory and recent developments

Insurance Risk Models

- **Objective:** quantify and analyze the risk of insolvency associated with insurance business.
- **Model setup:** $X_t = A_t - L_t$ (risk process)
 - **Assets** $A = (A_t)_{t \geq 0}$ (incoming cash flows):
Initial surplus, premium income, investment income, ...
 - **Liabilities** $L = (L_t)_{t \geq 0}$ (outgoing cash flow):
Claim payments, dividends, expenses, ...
- **Risk measures:**
 - **Ruin probability:** $\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$,

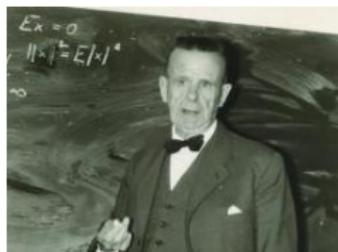
$$\psi(x) = \mathbb{P}^x(\tau_0 < \infty).$$
 - **Distribution of "severity" of ruin:**

$$\phi(x; u, v) = \mathbb{P}^x(X_{\tau_0-} \leq u, |X_{\tau_0}| \leq v, \tau_0 < \infty).$$



Classical ruin theory

Cramér-Lundberg model: classical model; **Lundberg (1903, Ph.D Thesis)**:

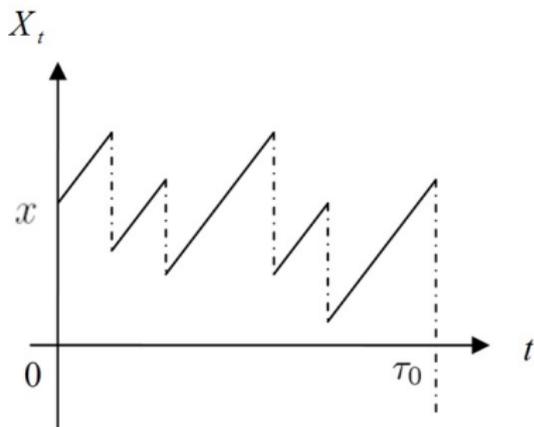


H.Cramér

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$



P.Lundberg



- $x > 0$: initial surplus.
- $c > 0$: premium rate.
- $N_t \sim Po(\lambda t)$: a number of claims.
- $Y_i \in Q$: IID; i th claim size.
- Main concern:

$$\psi(x) = \mathbb{P}^x(\tau_0 < \infty).$$

Classical tools for analysis of “ruin”

Let $T > 0$ and distinguish the following 3 cases:

- 1 No claim in $(0, T)$ (not ruin): probability $e^{-\lambda T}$.
- 2 First claim occurs in $[t, t + dt)$ with $t < T$: probability $\lambda e^{-\lambda t} dt$
its amount is $y < x + cT$: (not ruin)
- 3 First claim occurs in $[t, t + dt)$ with $t < T$: probability $\lambda e^{-\lambda t} dt$
its amount is $y > x + cT$: (ruin)

- Distinguish the cases: for any $T > 0$,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{-\lambda T} \psi(x + cT) \quad \text{(1. no claim)} \\ &+ \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt \int_0^{x+ct} \psi(x + ct - y) Q(dy) \\ &\quad \text{(2. first claim } t < T, y < u + ct) \\ &+ \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt \int_{x+ct}^{\infty} Q(dy) \\ &\quad \text{(3. first claim } t < T, \text{ but } y > u + ct) \end{aligned}$$

- Take $\frac{d}{dT}$ on both sides, and set $T = 0$: *Integro-differential equation*,

$$c\psi'(x) + \lambda \int_0^x [\psi(x - y) - \psi(x)] Q(dy) + \lambda \bar{Q}(x) = 0.$$

Making some computations, we have a **renewal-type equation**:

$$\psi(x) = \frac{\lambda}{c} [\psi * \mathcal{T}_\rho Q'](x) + \frac{\lambda}{c} \mathcal{T}_\rho \bar{Q}(x),$$

where:

- $\mathcal{T}_s f(x) = e^{sx} \int_x^\infty e^{-sy} f(y) dy$: *Dickson-Hipp operator*,
- $\rho > 0$: Solution to the *Lundberg fundamental equation*:

$$\log \mathbb{E}^x [e^{\rho(X_1-x)}] = c\rho + \lambda \int_0^\infty (e^{-\rho z} - 1) Q(dz) = 0.$$

Recent development of ruin theory

Expected discounted penalty function (Gerber and Shiu, 1998, NAAJ):

$$\phi(x) = \mathbb{E}^x \left[e^{-\delta\tau_0} w(X_{\tau_0-}, |X_{\tau_0}|) \mathbf{1}_{\{\tau_0 < \infty\}} \right],$$

where:

- $\tau_0 := \inf\{t > 0 | X_t < 0\}$: Time of ruin.
- $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: “Penalty” depending on surplus prior to ruin and deficit at ruin.
- Expected Present Value (EPV) of risk at ruin.
- *Gerber-Shiu function*.

Example (Gerber-Shiu functions)

- $\delta = 0$; $w \equiv 1$: $\phi(x) = \mathbb{P}^x(\tau_0 < \infty)$.
- $\delta = 0$; $w(x, y) = \mathbf{1}_{\{(x \leq u, y \leq v)\}}$: a (defective) density of $(X_{\tau_0-}, |X_{\tau_0}|)$:

$$\phi(x; du, dv) = \mathbb{P}^x(X_{\tau_0} \in du, |X_{\tau_0}| \in dv, \tau_0 < \infty).$$

- $\delta \geq 0$; $w = (\alpha x + \beta y)^k$: the k th-order (discounted) moment of a claim causing ruin: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\phi(x; \alpha, \beta) = \mathbb{E}^x [e^{-\delta\tau_0} (\alpha X_{\tau_0-} + \beta |X_{\tau_0}|)^k \mathbf{1}(\tau_0 < \infty)].$$

- $\delta \geq 0$; $w(x, y) = e^{-\xi x - \eta y}$: moment generating function of $(\tau_0, X_{\tau_0-}, |X_{\tau_0}|)$:

$$\phi(x; \delta, \xi, \eta) = \mathbb{E}^x [e^{-(\delta\tau_0 + \xi X_{\tau_0-} + \eta |X_{\tau_0}|)} \mathbf{1}(\tau_0 < \infty)] \quad (\delta, \xi, \eta \geq 0).$$

- e.g., option pricing, dividend strategy, capital injection, ...; Gerber and Shiu (1998a,b), Cai et al. (2009a,b,c), Eisenberg and Schmidli (2011), etc.

Risk measures by Gerber-Shiu function

- VaR-type risk measure due to G-S risks:

$$V_\epsilon := \inf\{x > 0 \mid \phi(x) < \epsilon\},$$

the minimum requirement of G-S risk does not exceed the level $\epsilon > 0$.

- e.g., $\delta = 0$, $w(x, y) = \mathbf{1}(y > z)$ in ϕ ,

$$\phi(x; z) = \mathbb{P}^x (|X_{\tau_0}| > z, \tau_0 < \infty),$$

the tail function of the *Deficit at Ruin*:

$$DaR_\alpha(x) := \inf\{z > 0 \mid \phi(x; z) \leq 1 - \alpha\}.$$

so-called “VaR at ruin” when the initial capital is $x > 0$.

- Solve $x_\alpha = DaR_\alpha(x_\alpha)$, then

x_α : Surplus level to cover the deficit at ruin with 100 α %

Part II

“Ruin” to “Default”

Generalized risk process

Lévy insurance risk: **spectrally negative Lévy process**

$$X_t = x + ct + \sigma W_t - S_t,$$

- W : Wiener process, ($\sigma \geq 0$: const.)
 - Uncertainty of income process; [Dufresne and Gerber \(1991\)](#),
- S : Subordinator,
 - Pure jump Lévy process with **increasing path**, possibly **infinite activity**, representing frequent “small” claims, costs, etc; [Huzack et al. \(2004\)](#), [Biffis and Morales \(2011\)](#), etc.
 - Lévy characteristics:

$$\mathbb{E}[e^{iuS_t}] = \exp\left(t \int_0^\infty (e^{iu} - 1)\nu(z) dz\right),$$

where ν : Lévy density with $\int_0^\infty z\nu(z) dz < \infty$.

- **Time of Ruin:**

$$\tau_0 := \inf\{t > 0 | X_t < 0\}.$$

Connection to *Credit Risk Modeling*

Firm's asset value (or stock price) process:

$$V_t := V_0 \exp(ct + \sigma W_t - S_t),$$

“Geometric” spectrally negative Lévy process,

- **Madan and Schoutens (2008; J. of Credit Risk)**: It reasonably includes jumps and incorporates skewness in the underlying return distribution. A firm's asset value is exposed to shocks (represented by negative jumps), which is the main concern in risk management practice.
- **Carr et al. (2002; J. of Business)**: risk-neutral processes for equity prices should be processes of **infinite activity** and **finite variation**.
- **Time of Default** (structural model):

$$\tau_d := \inf\{t > 0 | X_t < d\}, \quad d \in \mathbb{R},$$

where $X_t := \log V_t$, $x := \log V_0$.

“Ruin” to “Default”

Definition

Time of default:

$$\tau_d := \inf\{t > 0 | X_t < d\}, \quad d \in \mathbb{R},$$

“Default-related” quantities:

$$H_d(x) = \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_d} e^{-\delta t} l(X_t) dt \right] \mathbf{1}_{\{x \geq d\}},$$

a “path-dependent penalty up to default”.

- G-S function due to default:

$$\phi_d(x) = \mathbb{E}^x \left[e^{-\delta \tau_d} w(X_{\tau_d-}, |X_{\tau_d}|) \mathbf{1}_{\{\tau_d < \infty\}} \right], \quad x > d,$$

is given by $l(x) = w(0, 0)\epsilon_d(x) + \int_x^\infty w(x, z - x)\nu(z) dz$.

- As $w \equiv 1, \delta = 0$: probability of default

$$\psi_d(x) = \mathbb{P}^x(\tau_d < \infty), \quad x > d.$$

- Hence $\psi_d \subset \phi_d \subset H_d$.

Example (Total costs due to claims up to default)

- Suppose that dealing with a claim at time t costs $C(X_{t-}, X_t)$, where C is a positive cost function.
- EPV of total costs up to time T is given by

$$\begin{aligned} H_d(x; T) &= \mathbb{E}^x \left[\sum_{0 \leq t \leq \tau_d \wedge T} e^{-\delta t} C(X_{t-}, X_t) \mathbf{1}_{\{\Delta X_t > 0\}} \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_d \wedge T} \int_0^\infty e^{-\delta t} C(X_{t-}, X_{t-} - z) \nu(z) dz dt \right]. \end{aligned}$$

- As $T \rightarrow \infty$,

$$H_d(x) := \lim_{T \rightarrow \infty} H_d(x; T) = \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_d} e^{-\delta t} l(X_t) dt \right],$$

where $l(x) = \int_0^\infty C(x, x - z) \nu(z) dz$.

Part III

Some representations for “Default-related quantities”

Integro-differential equation

Theorem (Integro-differential Eq.)

Suppose that I is continuous on (d, ∞) except for a countable set of discontinuities D such that

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_d} e^{-\delta t} |I(X_t)| dt \right] < \infty \quad \text{for all } x > d,$$

and that H_d has the bounded second derivative on $(d, \infty) \cap D^c$. Then H_d is the solution to the following integro-differential equation:

$$(\mathcal{A} - \delta)H_d(x) = -I(x), \quad x \in (d, \infty) \cap D^c,$$

where

$$\mathcal{A}f(x) = cf'(x) + \frac{\sigma^2}{2}f''(x) + \int_0^\infty [f(x-z) - f(x) + zf'(x)]\nu(z) dz.$$

Renewal type equation

Let

$$\mathcal{E}_\beta f(x) = e^{-\beta x} \int_0^x e^{\beta y} f(y) dy, \quad \mathcal{T}_\rho f(x) = e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho y} f(y) dy.$$

Theorem (Defective renewal Eq.)

Suppose the same assumptions as in the previous, and the net profit condition: $c > \int_0^\infty z\nu(z) dz$, and $\sigma > 0$. Then H_d satisfies the following (defective) renewal equation:

$$H_d(x) = h_l(x) + \int_0^{x-d} H_d(x-y)g(y) dy, \quad x \geq d,$$

where

$$h_l(x) = \frac{2}{\sigma^2} \mathcal{E}_\beta \mathcal{T}_\rho l(x) + \left[H_d(d) - \frac{2}{\sigma^2} \mathcal{E}_\beta \mathcal{T}_\rho l(d) \right] e^{-\beta(x-d)},$$

$$g(x) = \frac{2}{\sigma^2} \mathcal{E}_\beta \mathcal{T}_\rho \nu(x),$$

$\beta = 2c/\sigma^2 + \rho$ and ρ is a solution to the [Lundberg fundamental equation](#):

$$\Psi(\rho) := \log \mathbb{E}^x [e^{\rho(X_1-x)}] = \delta.$$

Remarks I

- As $\sigma^2 > 0$:
 - $H_d(d) = 0$ if $l(0) < \infty$.
 - $H_d(d) = w(0, 0)$ in G-S cases.
- As $\sigma^2 = 0$, $H_d(d)$ is not clear (depending on the case): e.g.,
 $H_d(x) = \mathbb{P}^x(\tau_d < \infty)$,

$$H_d(d) = \frac{1}{c} \int_0^\infty \nu(z, \infty) dz$$

- Case of $\sigma^2 = 0$ is obtained by $\sigma \rightarrow 0$:

$$\phi(x) = \frac{1}{c} [\phi * \mathcal{T}_\rho \nu](x) + \frac{1}{c} \mathcal{T}_\rho l(x),$$

since $\frac{2}{\sigma^2} \mathcal{E}_\beta f(x) \rightarrow \frac{1}{c} f(x)$.

Remarks II

- **Series representation:**

$$\begin{aligned}
 H_d &= h_I + g * H_d \\
 &= h_I + g * [h_I + g * H_d] = h_I + g * h_I + g^{*2} * H_d \\
 &= \dots \\
 &= h_I * \sum_{n=0}^{\infty} g^{*n} \\
 &= \frac{1}{1-p} \int_0^{x-d} h_I(x-y) G_\delta(dy),
 \end{aligned}$$

where G_δ : *Compound Geometric Distribution* s.t.

$$\begin{aligned}
 G_\delta(x) &= (1-p) + \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)p^k \int_0^x q_\delta^{*k}(x) dx, \\
 q_\delta(x) &= p^{-1}g(x), \quad p = \int_0^{\infty} g(x) dx < \infty.
 \end{aligned}$$

Corollary (Compound geometric representation)

$$H_d(x) = \frac{1}{1-\rho} \mathbb{E}[h_l(x-Y)], \quad x > d,$$

where $Y = U_1 + \dots + U_N$; $U_i \sim q_\delta(x) dx$ (iid), $N \sim \text{Geo}(\rho)$.

Corollary (Fourier transform)

$$\mathcal{F}H_d(s) = \frac{\mathcal{F}l(s) - \mathcal{L}l(\rho) + H_d(d)(\rho + is)\sigma^2/2}{\delta - \Psi(is)}, \quad s \in \mathbb{R},$$

where

$$\mathcal{F}f(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{isx} dx, \quad \mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx,$$

$$\Psi(is) = isc + \frac{\sigma^2}{2}s^2 - \int_0^\infty (e^{isx} - 1)\nu(dx).$$

Corollary (Large initial capital)

Suppose that, for $R_0 > 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{R_0 u} \nu(z) dz < \infty, \quad (\text{light - tailed})$$

and that there exists the negative solution $-R \in (-R_0, 0)$ to the [Lundberg fundamental equation](#):

$$\Psi(-R) = -cR + \frac{\sigma^2}{2} R^2 + \int_0^{\infty} (e^{Ru} - 1) \nu(z) dz = \delta,$$

and Then we have

$$H_d(x) \sim \frac{\int_0^{\infty} A(u) du}{\int_0^{\infty} B(u) du} e^{-R(x-d)}, \quad x \rightarrow \infty,$$

where

$$A(u) = e^{Ru} \left\{ \frac{2}{\sigma^2} \mathcal{E}_{\beta} \mathcal{T}_{\rho} I(u) + \left[H_d(d) + \frac{2}{\sigma^2} \mathcal{E}_{\beta} \mathcal{T}_{\rho} I(d) \right] e^{-\beta u} \right\},$$

$$B(u) = u e^{Ru} \frac{2}{\sigma^2} \mathcal{E}_{\beta} \mathcal{T}_{\rho} \nu(u).$$

Part IV

Connection to Lévy fluctuation theory

Scale function

- First passage problem for Lévy process: e.g., Kyprianou (2006).
- δ -scale function is defined via

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} W^{(\delta)}(x) dx = \frac{1}{\Psi(s) - \delta}, \quad s > \rho,$$

where $\rho > 0$: $\Psi(\rho) = \delta$ (Lundberg fundamental equation).

- Linking to “Potential Measure”: $U^{(\delta)}(dx) = \mathbb{E} \left(\int_0^{\infty} e^{-\delta t} \mathbf{1}_{(X_t \in dx)} dt \right)$.
- Our target H_d has a representation via the scale function.
- Recently, scale functions for various spectrally negative Lévy processes are explicitly known; see, e.g., Hubalek and Kyprianou (2011).

Example (Scale functions)

- BM: $X_t = \mu t + \sigma W_t$,

$$W^{(\delta)}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\delta\sigma^2 + \mu}} e^{-\mu x/\sigma^2} \sinh\left(\frac{x}{\sigma^2} \sqrt{2\delta\sigma^2 + \mu}\right), \quad x \geq 0.$$

- CPP with Exp.Jumps: $X_t = ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ with $Y_i \sim \text{Exp}(1/\mu)$, $N_t \sim \text{Po}(\lambda t)$

$$W^{(\delta)}(x) = \frac{(\mu + \rho^+)e^{\rho^+x} - (\mu + \rho^-)e^{\rho^-x}}{\sqrt{r^2 + 4c\mu\delta}}, \quad x \geq 0,$$

where $\rho^\pm := (r \pm \sqrt{r^2 + 4c\mu\delta})/2c$, $r = \lambda + \delta - c\mu$.

- s.n. β -stable process with $\beta \in (1, 2)$: $\log \mathbb{E}[e^{\theta X_t}] = e^{t\theta^\beta}$,

$$W^{(\delta)}(x) = \beta x^{\beta-1} E'_\beta(\delta x^\beta), \quad x \geq 0,$$

where $E_\beta(z) = \sum_{k \geq 0} z^k / \Gamma(1 + \beta k)$: the Mittag-Leffler function.

Fluctuation-theoretic solution

Theorem (via the scale function)

Let $W^{(\delta)}$ be the scale function of the risk process $X = (X_t)_{t \geq 0}$, and suppose that the corresponding δ -scale function $W^{(\delta)}$ is differentiable. Then

$$H_d(x) = \int_0^{x-d} \mathcal{T}_\rho l(x-y) K(dx) + \frac{\sigma^2}{2} K[0, x-d], \quad x \geq d$$

where

$$K(dx) = \left[W^{(\delta)}(0) \epsilon_0(x) + \frac{d}{dx} W^{(\delta)}(x) + \rho W^{(\delta)}(x) \right] dx.$$

- It is well known that the ruin probability

$$\psi(x) := \mathbb{P}^x(\tau_0 < \infty) = 1 - \Psi'(0+) W^{(0)}(x).$$

- For the classical G-S function: see, e.g., [Biffis and Kyprianou \(2011\)](#).

Example (Total costs due to claims up to default)

- Total costs up to τ_d : for $I(x) = \int_0^\infty C(x, x - z)\nu(z) dz$,

$$H_d(x) := \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau_d} e^{-\delta t} I(X_t) dt \right].$$

- Suppose, e.g., $C(x, y) = \alpha(x - y)$ for $\alpha \in (0, 1)$ (100 α %-cost for each claim):

$$I(x) \equiv \alpha \int_0^\infty z\nu(z) dz =: \mu_\alpha,$$

- Then

$$H_d(x) = \frac{\mu_\alpha}{\delta} \left(1 - \mathbb{E}^{x-d} \left[e^{-\delta\tau_0} \mathbf{1}_{\{\tau_0 < \infty\}} \right] \right),$$

the last term is the “Gerber-Shiu function” $\phi(x - d)$, which is easily computed.

- In particular,

$$H_d(x) = \mu_\alpha \left(\frac{1}{\rho} W^{(\delta)}(x - d) - \int_0^{x-d} W^{(\delta)}(y) dy \right).$$

Part V

Concluding remarks

Concluding remarks

- We consider a generalized insurance risk process using spectrally negative Lévy processes.
- Beyond the classical insurance ruin theory, we consider “default-related quantities”, which is EPVs of (path-dependent) default risks under the general s.n. Lévy risks.
- We obtain several representations for quantities of interest: from classical analytical ways to modern fluctuation-theoretic argument.
- Those results are possibly applied to the “credit risk” problems.
- Statistical inference and more reasonable approximations for those quantities are future issues.

Thank you!