

# Estimation of Distortion Risk Measures

Hideatsu Tsukahara

Department of Economics, Seijo University, Tokyo

e-mail address: tsukahar@seijo.ac.jp

The concept of coherent risk measure was introduced in Artzner et al. (1999). They listed some properties, called axioms of ‘coherence’, that any good risk measure should possess, and studied the (non-)coherence of widely-used risk measure such as Value-at-Risk (VaR) and expected shortfall (also known as tail conditional expectation or tail VaR). Kusuoka (2001) introduced two additional axioms called law invariance and comonotonic additivity, and proved that the class of coherent risk measures satisfying these two axioms coincides with the class of *distortion risk measures* with convex distortions.

To be more specific, let  $X$  be a random variable representing a loss of some financial position, and let  $F(x) := P(X \leq x)$  be the distribution function (df) of  $X$ . We denote its quantile function by  $F^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}$ ,  $0 < u < 1$ . A distortion risk measure is then of the following form

$$\rho_D(X) := \int_{[0,1]} F^{-1}(u) dD(u) = \int_{\mathbb{R}} x dD \circ F(x), \quad (1)$$

where  $D$  is a distortion function, which is simply a df  $D$  on  $[0, 1]$ ; i.e., a right-continuous, increasing function on  $[0, 1]$  satisfying  $D(0) = 0$  and  $D(1) = 1$ . For  $\rho_D(X)$  to be coherent,  $D$  must be convex, which we assume throughout this paper. The celebrated VaR can be written of the form (1), but with non-convex  $D$ ; this implies that the VaR is not coherent. Also note that different authors use different names *spectral risk measure* or *weighted V@R* for a distortion risk measure.

The most well-known example of coherent risk measure is the above-mentioned expected shortfall. Taking distortion of the form  $D_\alpha^{\text{ES}}(u) = \alpha^{-1}[u - (1 - \alpha)]_+$ ,  $0 < \alpha < 1$  yields the expected shortfall as a distortion risk measure:

$$\text{ES}_\alpha(X) := \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 F^{-1}(u) du.$$

The following one-parameter families of distortion yields several classes of coherent risk measures:

- *Proportional hazards (PH) distortion*:  $D_\theta^{\text{PH}}(u) = 1 - (1 - u)^\theta$ ,
- *Proportional odds (PO) distortion*:  $D_\theta^{\text{PO}}(u) = \theta u / [1 - (1 - \theta)u]$
- *Gaussian distortion*:  $D_\theta^{\text{GA}}(u) = \Phi(\Phi^{-1}(u) + \log \theta)$

To implement the risk management/regulatory procedure using risk measures, it is necessary to statistically estimate their values based on data. For a distortion risk measure, its form (1) suggests a natural estimator which is a simple form of an  $L$ -statistic. The main theme of this paper is to derive the asymptotic statistical properties of simple estimators of those risk measures based on strictly stationary sequences, and to compare some distortion risk measures and VaR.

Let  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a strictly stationary process with a stationary distribution  $F$ , and denote by  $\mathbb{F}_n$  the empirical df based on the sample  $X_1, \dots, X_n$ . A natural estimator of  $\rho(X)$  is given by

$$\hat{\rho}_n = \int_0^1 \mathbb{F}_n^{-1}(u) dD(u) = \sum_{i=1}^n c_{ni} X_{n:i}, \quad (2)$$

where  $c_{ni} := D(i/n) - D((i-1)/n)$  and  $X_{n:1} \leq X_{n:2} \leq \dots \leq X_{n:n}$  are the order statistics based on the sample  $X_1, \dots, X_n$ .

In what follows, instead of restricting ourselves to the particular form (2) of  $L$ -statistic, we consider a general  $L$ -statistic of the following form:

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_{ni} h(X_{n:i}), \quad (3)$$

where  $c_{ni}$ 's are constants. Define for  $0 \leq u \leq 1$ ,

$$J_n(u) := \sum_{i=1}^n c_{ni} \mathbf{1}_{((i-1)/n, i/n]}(u) + c_{n1} \mathbf{1}_{\{0\}}(u), \quad \Psi_n(u) := \int_{1/2}^u J_n(v) dv$$

Then we have

$$T_n = \int_0^1 h(\mathbb{F}_n^{-1}(u)) J_n(u) du = \int_{[0,1]} h(\mathbb{F}_n^{-1}(u)) d\Psi_n(u).$$

Let  $g := h \circ F^{-1}$ , and define the centering constants

$$\mu_n := \int_0^1 g(u) J_n(u) du = \int_{[0,1]} g(u) d\Psi_n(u).$$

Consistency is a basic desirable property of statistical estimators. The following result was proved in van Zwet (1980) for the i.i.d. case, but his proof remains to be valid for the ergodic case.

**Proposition 1** *Suppose that  $X_1, X_2, \dots$  forms an ergodic stationary sequence. Let  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1/p + 1/q = 1$ , and assume that  $J_n \in L^p(0, 1)$  for  $n = 1, 2, \dots$ , and  $g \in L^q(0, 1)$ . If either*

- (i)  $1 < p \leq \infty$  and  $\sup_n \mathbb{E}(|J_n|^p) < \infty$ , or
- (ii)  $p = 1$  and  $\{J_n, n = 1, 2, \dots\}$  is uniformly integrable,

then we have  $T_n - \mu_n \rightarrow 0$ , a.s..

Further, if there exists a function  $J \in L_p$  such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t J_n(s) ds = \int_0^t J(s) ds$  for every  $t \in (0, 1)$ , then  $T_n \rightarrow \int_{[0,1]} J(s) dg(s)$ , a.s. By this result, in particular, our estimator  $\hat{\rho}_n$  in (2) of distortion risk measure proves to possess strong consistency under the very general conditions stated above.

For the asymptotic normality, we basically draw upon Shorack and Wellner (1986), Chapter 19, for the form of assumptions and the line of argument. First we set out the following assumption on  $(X_n)$ .

(A.1)  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is strongly mixing: Setting  $\mathcal{F}_i^j := \sigma(X_i, \dots, X_j)$ , the strong mixing coefficient

$$\alpha(n) := \sup \left\{ |P(A \cap B) - P(A)P(B)| : A \in \mathcal{F}_1^k, B \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty, k \geq 1 \right\}$$

converges to 0 in such a way that

$$\alpha(n) = O(n^{-\theta-\eta}) \quad \text{for some } \theta \geq 1 + \sqrt{2}, \eta > 0$$

Note that strong mixing assumption is the weakest requirement among various mixing concepts. Next we assume the bounded growth of  $g$  and  $J_n$ , and smoothness of  $J_n$ .

(A.2)  $h$  is a function of bounded variation:  $h = h_1 - h_2$ , where  $h_1$  and  $h_2$  are increasing, left-continuous, and satisfy

$$|h_i(F^{-1}(u))| \leq H(u), \quad \text{for all } 0 < u < 1,$$

where  $H(u) := Mu^{-d_1}(1-u)^{-d_2}$ .

For  $g = h \circ F^{-1}$ , let  $\int dg$  be the integral with respect to the Lebesgue-Stieltjes signed measure associated with  $g$ , and  $\int d|g|$  be the integral with respect to the total variation measure associated with  $g$ .

(A.3) There exists a function  $J$  which is  $|g|$ -a.e. continuous such that  $J_n$  converges to  $J$  locally uniformly  $|g|$ -a.e.

(A.4) For  $B(u) := Mu^{-b_1}(1-u)^{-b_2}$ ,  $|J_n(u)| \leq B(u)$ ,  $|J(u)| \leq B(u)$  for all  $0 < u < 1$  with  $b_1 \vee b_2 < 1$ .

We note that under (A.2) and (A.4),

$$\int_0^1 [u(1-u)]^r B(u) d|g|(u) < \infty \quad (4)$$

when  $r > (b_1 + d_1) \vee (b_2 + d_2)$  (see Shorack and Wellner (1986), Lemma 19.1.1).

Before we state and prove the asymptotic normality of the estimator (2), let us note that it is possible to reduce the argument to the uniform case, as in the i.i.d. case. Namely, there exists a strictly stationary sequence  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  with the same mixing rate as  $(X_n)$  such that  $X_n = F^{-1}(\xi_n)$  and  $\xi_n \sim U(0, 1)$  (on a possibly extended probability space; see Lemma 4.2 in Dehling and Philipp (2002)). Let  $\mathbb{G}_n$  be the empirical df based on  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Then

$$T_n - \mu_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_{[0,1]} g(u) d[\Psi_n(\mathbb{G}_n(u)) - \Psi_n(u)]. \quad (5)$$

Here  $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$  means that the random variables  $X$  and  $Y$  have the same distribution.

Let  $C_k(u, v) := P(\xi_1 \leq u, \xi_k \leq v)$  and put

$$\sigma(u, v) := u \wedge v - uv + \sum_{k=2}^{\infty} [C_k(u, v) - uv] + \sum_{k=2}^{\infty} [C_k(v, u) - uv]. \quad (6)$$

When  $(\xi_n)$  satisfies the same mixing rate as in (A.1), it follows from the covariance inequality (see Dehling and Philipp (2002), Lemma 3.9) that the two series on the right-hand side of (6) are absolutely convergent. We define the empirical process  $\mathbb{U}_n(u) := \sqrt{n}(\mathbb{G}_n(u) - u)$  as usual.

**Theorem 2** Let  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a strictly stationary sequence satisfying (A.1)–(A.4) with

$$b_i + d_i + \frac{2b_i + 1}{2\theta} < \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

Then we have

$$\sqrt{n}(T_n - \mu_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2),$$

where

$$\sigma^2 := \int_0^1 \int_0^1 \sigma(u, v) J(u) J(v) dg(u) dg(v) < \infty \quad (8)$$

Returning to the problem of estimating distortion risk measures, we should set  $c_{ni} = n[D(i/n) - D((i-1)/n)]$  and  $h(x) = x$ . Then in most cases, the limit of  $J_n$  will be  $d$ , so applying Theorem 2 we have the following corollary.

**Corollary 3** Assume (A.1), (A.2) with  $h(x) = x$ , (A.3) with  $J = d$ , and (A.4). Then, for the estimator  $\hat{\rho}_n$  of (2), we have

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_n - \rho(X)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2),$$

where

$$\sigma^2 = \int_0^1 \int_0^1 \sigma(u, v) d(u) d(v) dF^{-1}(u) dF^{-1}(v).$$

When we try to construct approximate confidence intervals for risk measures, we need to estimate the asymptotic variance (8). Let

$$Y_n := \int_{[X_n, \infty)} J(F(x)) dh(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

It is then easy to see that  $\sigma^2$  is written as the double-sided infinite sum of autocovariance  $\gamma(n)$  of the stationary sequence  $(Y_n)$ . It is well known that

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma(n) = 2\pi f(0),$$

where  $f$  is the spectral density of  $\gamma$ . Thus our problem is to estimate  $f(0)$ , and we would use a consistent estimator of  $f(0)$  as given in Brockwell and Davis (1991). But  $F$  in the expression of  $Y_n$  is unknown, so we must replace it with the empirical distribution function. That is, we use

$$Y_{i,n} := \int_{[X_i, \infty)} J(\mathbb{F}_n(x)) dh(x), \quad i = 1, \dots, n$$

in estimating  $f(0)$ . This should give a consistent estimator of the asymptotic variance (8).

**Example 4 (Inverse-gamma autoregressive stochastic volatility)** In order for us to be able to compute the true values of various risk measures with adequate accuracy so that we can evaluate the estimation bias and root mean squared error (RMSE), we introduce the following simple stochastic volatility model. Let  $X_t = \sigma_t Z_t$  and suppose

that  $V_t := 1/\sigma_t^2$  follows the first-order autoregressive gamma process introduced in Gaver and Lewis (1980):

$$V_t = \rho V_{t-1} + \varepsilon_t,$$

where  $V_t$  has a gamma distribution with shape parameter  $\alpha$  and inverse-scale parameter  $\beta$  for each  $t$ ,  $(\varepsilon_t)$  is a sequence of i.i.d. random variables, and  $0 \leq \rho < 1$ . It is known that the distribution of  $\varepsilon_t$  is compound Poisson.

Let  $(Z_t)$  be a sequence of independent random variables with standard normal distribution, which are also independent of  $(\varepsilon_t)$ . Then it is well known, especially in Bayesian analysis, that  $X_t$  has a scaled  $t$ -distribution with  $2\alpha$  degrees of freedom and scale parameter  $\sigma^2 = \beta/\alpha$ ; this allows us to calculate the true values of VaR, expected shortfall, and proportional odds risk measure. Also  $(V_t)$  can be shown to be geometrically ergodic, so the resulting  $(X_t)$  is also geometrically ergodic, and hence exponentially strong mixing. Thus our assumption (A.1) is satisfied in this model.

To make use of the setting in Example 2.21 of McNeil et al. (2005), we chose  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 16000$ ,  $\rho = 0.5$ , so that  $X_t$  has a scaled  $t$ -distribution with four degrees of freedom, and its standard deviation is equal to  $2000/\sqrt{250} \approx 126.5$ . For this case, the true values of VaR, expected shortfall, and proportional odds risk measures are given in Table 4.1 of Tsukahara (2009). For  $\theta = 0.1, 0.05, 0.01$ , we generated 1000 samples of size 500 and computed the estimates, the estimated biases, and the RMSEs for our estimator. For the purpose of comparison, we also perform the same procedure with i.i.d. observations from a scaled  $t$ -distribution with four degrees of freedom. The results are summarized in Table 1.

Table 1: Simulation results for estimating VaR, ES and PO risk measures with inverse-gamma autoregressive SV observations with  $t(4)$  marginal and with i.i.d.  $t(4)$  observations ( $n = 500$ , # of replication = 1000)

	$\theta = \alpha$	VaR		ES		PO	
		bias	RMSE	bias	RMSE	bias	RMSE
SV	0.1	0.0692	10.9303	-2.2629	22.1361	-1.7739	17.5522
	0.05	2.5666	17.6755	-1.2168	37.2719	-2.0200	28.5053
	0.01	14.9577	61.2290	-11.9600	103.9269	-15.7888	73.7147
i.i.d.	0.1	0.7976	10.5893	-1.2914	19.5756	-1.3574	15.3271
	0.05	0.7974	16.1815	-2.6346	31.3166	-2.8342	23.9933
	0.01	10.6838	53.2567	-12.9355	95.9070	-15.8086	69.5425

They show clearly that both biases and RMSEs increase for all three risk measures as  $\theta$  gets smaller; this is expected from the asymptotic results. Hence estimation with small  $\theta$  is a difficult task even with moderate sample size of  $n = 500$ . Maybe this shows the limitation of purely statistical methods for estimating the values of risk measures.

The estimated RMSEs are large probably reflecting the heavy tail of the  $t$ -distribution with four degrees of freedom. Although RMSE is slightly smaller for every risk measure in the i.i.d. case, there does not seem to be a big difference in the behavior of the estimates between in the stochastic volatility case and i.i.d. case, reflecting perhaps the quite weak

dependence in this stochastic volatility model.

Note that systematic negative biases are observed for our  $L$ -statistics type estimators in cases of expected shortfall and proportional odds risk measures. Examining the histograms (not shown here) shows that the distribution of the estimator is right-skewed with this sample size. We suggest that some kind of bias reduction method be applied in practice.

## REFERENCES

- Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, **9**, 203–228.
- Brockwell, P. J. and R. A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*, New York: Springer-Verlag.
- Dehling, H. and W. Philipp (2002). Empirical process techniques for dependent data. In H. Dehling, T. Mikosch and M. Sørensen (eds.), *Empirical process techniques for dependent data*, Boston: Birkhäuser, p.p. 3–113.
- Gaver, D. P. and P. A. W. Lewis (1980). First-order autoregressive gamma sequences and point processes, *Advances in Applied Probability*, **12**, 727–745.
- Kusuoka, S. (2001). On law invariant coherent risk measures, *Advances in Mathematical Economics*, **3**, 83–95.
- McNeil, A. J., R. Frey, and P. Embrechts (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Shorack, G. R. and J. A. Wellner (1986). *Empirical Processes with Applications to Statistics*, New York: John Wiley & Sons.
- Tsukahara, H. (2009). One-parameter families of distortion risk measures, *Mathematical Finance*, **19**, 691–705.
- van Zwet, W. R. (1980). A strong law for linear functions of order statistics, *Annals of Probability*, **8**, 986–990.

# 打ち切りを考慮した時系列モデリング：リスク管理への応用\*

総合研究大学院大学複合科学研究科統計学専攻 青木 義充  
統計数理研究所・モデリング研究系 川崎 能典

## 1 はじめに

本稿では、東京証券取引所（東証）に上場されている株式の価格変動をモデル化し、市場リスクを計測することを目的としている。東証では、大幅な需給の偏向や過当投機などによって市場価格が急激に変動することを防ぐため、1日の価格の変動幅を基準値段（前日の終値等）から上下一定範囲に制限している。この制度が値幅制限である。1日のうちに制限値幅の上限まで株価が上がることをストップ高、下限まで下がることをストップ安と呼ぶ。値幅制限は日々の価格変動に大きく影響を与える制度であるが、この制度を十分に考慮した価格変動モデルは提案されていない。加えて、この制度を考慮した市場リスク計測の手法も見当たらない。そこで、値幅制限を考慮した価格変動モデルを構築し、この制度が価格変動の構造に及ぼす影響と、市場リスクを計測する際にこの制度を考慮することの効用について調査する。

東証における値幅制限では、定義上、制限値幅が前日の価格情報によって決まるために、日々変化する可能性をもつ。具体的に、東証で発表されている基準値段と制限値幅の関係を表1に示す。

基準値段	制限値幅	基準値段	制限値幅	基準値段	制限値幅
100 円未満	30 円	20,000 円未満	4,000 円	2,000,000 円未満	400,000 円
200 円未満	50 円	30,000 円未満	5,000 円	3,000,000 円未満	500,000 円
500 円未満	80 円	50,000 円未満	7,000 円	5,000,000 円未満	700,000 円
700 円未満	100 円	70,000 円未満	10,000 円	7,000,000 円未満	1,000,000 円
1,000 円未満	150 円	100,000 円未満	15,000 円	10,000,000 円未満	1,500,000 円
1,500 円未満	300 円	150,000 円未満	30,000 円	15,000,000 円未満	3,000,000 円
2,000 円未満	400 円	200,000 円未満	40,000 円	20,000,000 円未満	4,000,000 円
3,000 円未満	500 円	300,000 円未満	50,000 円	30,000,000 円未満	5,000,000 円
5,000 円未満	700 円	500,000 円未満	70,000 円	50,000,000 円未満	7,000,000 円
7,000 円未満	1,000 円	700,000 円未満	100,000 円	50,000,000 円以上	10,000,000 円
10,000 円未満	1,500 円	1,000,000 円未満	150,000 円		
15,000 円未満	3,000 円	1,500,000 円未満	300,000 円		

表 1: 基準値段と制限値幅の関係

ここで、基準値段とは前日の終値などをもとに定められる値段である。すなわち、 $t$  時点の価格変動は、 $t-1$  時点の価格情報をもとに決定される。

それでは、具体例として実際の株価の動きと制限値幅の推移について確認をしよう。図 1 では、2011 年 3 月 1 日から 5 月 31 日までの 3ヶ月間の東京電力の株価と制限値幅の推移について示している。この時期は、東日本大震災を含み、相場が混乱していた時期である。

\*科学研究費基盤研究 (A)「ファイナンス計量分析の新展開と日本の金融市場」(研究代表者：国友直人)に基づく研究集会『計量ファイナンス 2011』, 2011 年 9 月 29 日, 於：東京大学経済学部小島ホール。

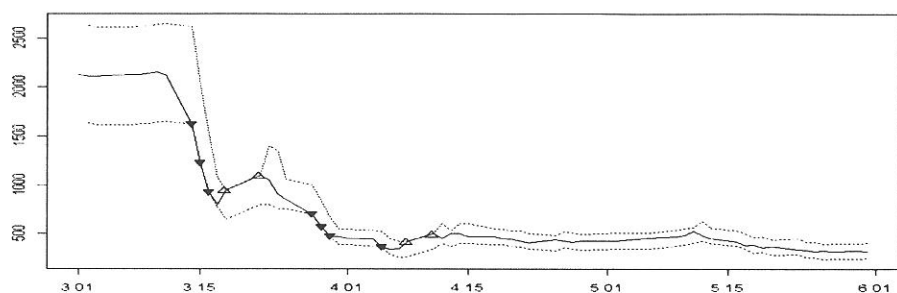


図 1: 東証における東京電力の株価の推移

図中の実線は株価を表し、上下の破線は値幅制限の上下限を表している。なお、値幅制限の上下限は、基準値段に対して制限値幅を加減した値である。また、図中の記号は、△：ストップ高、▼：ストップ安が発生した時点を示している。株価は3月初めには2,000円台で推移していた。ここで、東日本大震災が起こった3月11日の終値は2,121円であったが、週明けの3月14日にはストップ安の1,621円、翌日の3月15日にもストップ安の1,221円、翌々日の3月16日にも3連続のストップ安である921円を記録している。以降、当該期間中、ストップ高は4回、ストップ安は7回記録された。株価が下落していくに従い、上下の制限値幅が縮まっていく様子が読み取れる。

次に、株価の前日差と制限値幅の推移について図2に示す。先ほどと同様に、株価の前日差を実線で示し、各

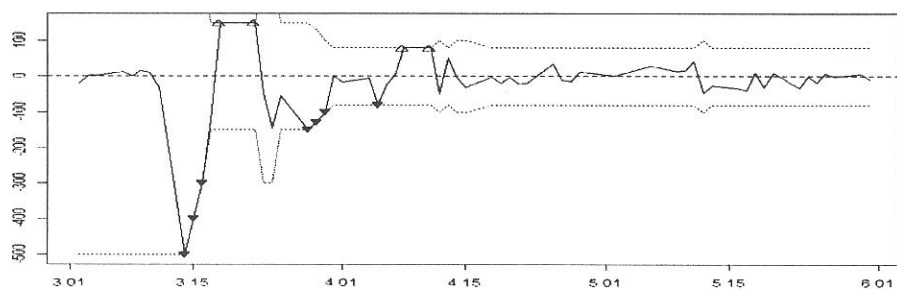


図 2: 東証における東京電力の株価の前日差の推移

時点における制限値幅を上下の破線で表している。また、ストップ高となった場合に△、ストップ安になった場合に▼を付している。

大きく株価を下げている場合であっても、あらかじめ定められた下限よりも株価が下がることはない。それは、3月14日のように大きく値を下げている時点などで本来であればさらに低い株価となるような要因があったとしても、市場で形成される株価では、それらの要因をすべて折り込むことはできないということである。

本稿では、この値幅制限という制度が、日々の価格変動にどのような影響を与えているのかについて詳しく調査していく。



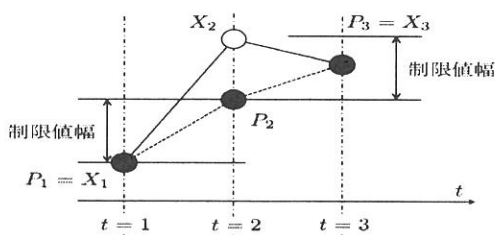
## 2 モデル

### 2.1 潜在株価の導入

株価が打ち切られた事実を考慮しない場合、本来の株価変動の大きさが制限値幅によって抑えられている事実を無視することになり、株価変動の過小評価につながる。そこで、制限値幅がなければ実現したであろう株価を潜在株価  $X_t$  として定義し、実際の市場で付けられた株価  $P_t$  と区別する。

図3は、株価  $P_t$  と潜在株価  $X_t$  の関係について示している。

(a) 株価と潜在株価の推移



(b) 株価の前日差と潜在株価の前日差の推移

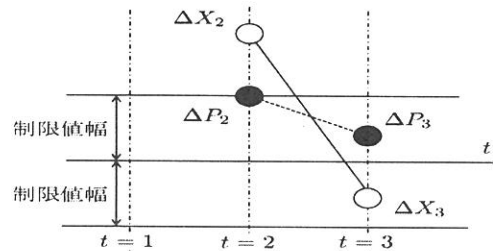


図3: 株価と潜在株価の関係

図3-(a)は、株価と潜在株価の推移について模式的に表している。  $t = 1$  時点では、同じ価格をつけていたが、  $t = 2$  にかけて潜在的な株価が急上昇している。このとき、制限値幅を超えるような上昇であったため、株価  $P_2$  はストップ高となる。  $t = 3$  時点では、株価急騰の要因が冷めたために潜在株価としてやや値を下げているが、株価は  $t = 2$  時点でストップ高となり価格が上がりきらなかったために、やや値を上げている。図3-(b)では、株価の前日差  $\Delta P_t (:= P_t - P_{t-1})$  と潜在株価の前日差  $\Delta X_t (:= X_t - X_{t-1})$  の関係を示している。  $t = 2$  時点では、  $\Delta X_2$  では制限値幅を大きく超える正の値を示しているが、  $\Delta P_2$  ではストップ高となったために制限値幅と同じ値を示している。  $t = 3$  時点では  $\Delta X_3$  は負の値をつけているが  $\Delta P_3$  では正の値をつけている。これは、値幅制限のもとでは  $t = 2$  時点で価格に反映しきれなかった価格変動の影響が  $t = 3$  に残っていると考えられる。そのため、本来であれば  $t = 2$  時点で価格の上昇要因が出尽くしたために  $t = 3$  では下げに転じるような場合であっても、値幅制限のために  $\Delta P_2, \Delta P_3$  と連続して正の値をとる状況が考えられる。

このように、急激に変動する可能性を有する潜在株価に対して、値幅制限の制度は株価をゆるやかに変動させるはたらきをもっていると考えられる。加えて、急激な価格変動が起こる状況では、同じ符号の値が続くような傾向が現れることが推測される。すなわち、値幅制限によって正の自己相関構造が付加される可能性があるといえよう。

我々は、市場で観測される株価と潜在株価に関して、以下のようなモデル化を行う。時点  $t$  における株価を  $P_t$ 、潜在株価を  $X_t$ 、制限値幅を  $L_t$  とおく。このとき、それぞれの関係を

$$P_t = X_t \times I_{\{|X_t - P_{t-1}| < L_t\}}(t) + (P_{t-1} + L_t) \times I_{\{X_t - P_t \geq L_t\}}(t) + (P_{t-1} - L_t) \times I_{\{X_t - P_{t-1} \leq -L_t\}}(t)$$

$$\Delta X_t = \sum_{k=1}^p \phi_k \Delta X_{t-k} + \sum_{k=1}^q \theta_k u_{t-k} + u_t, \quad u_t \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

と定義する。ここで、  $I_A(t)$  は指示関数であり、  $t \in A$  の場合に値1をとり、それ以外の場合は0をとる。

## 2.2 価格前日差の基準化

東証での制限値幅は一定のものではなく、前日の終値などを基準として日々変化する可能性がある。

図1, 図2に示されている通り, 2011年3月1日から5月31日にかけては, 株価が下落しているために制限値幅が小さくなっていく。3月の初めには2,000円を超える株価をつけていたために, 制限値幅は400円であった。株価が下落していくにしたがって制限値幅が小さくなっていき, 4月以降では500円近辺で推移しているために, 制限値幅は80円と100円を行き来している。そのため, 1日の価格変動の幅としては, 3月初旬では±400円の幅があったが, 4月以降では±80円程度まで縮小しているため, 時点が進むにつれて価格変動の大きさが小さくなっていく傾向がある。すなわち, ボラティリティが時点により変動していることがあらかじめ分かっているため, 株価の価格前日差に対し誤差分散が一定であるARMAモデルを当てはめることは不合理である。

我々は, 価格の前日差を制限値幅で基準化することで, この問題を解決する。

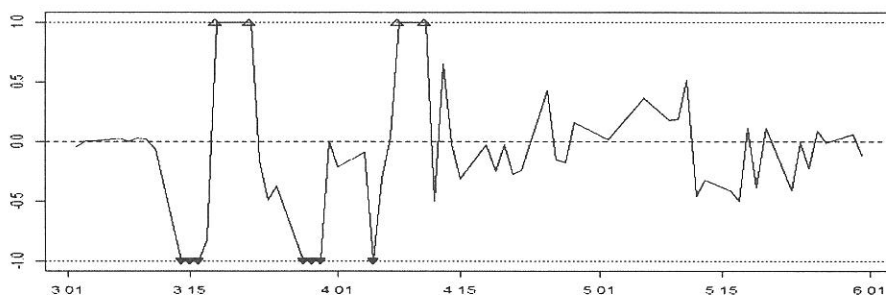


図4: 東証における制限値幅で基準化した東京電力の株価の前日差の推移

図4では, 株価の前日差を制限値幅で除した値の推移を示している。図2と同様にストップ高となった場合に▲, ストップ安になった場合に▼を付している。時点によって変動の大きさが変化していた株価前日差を制限値幅で基準化したことにより,  $[-1, 1]$  の値域をもつ系列に変換できた。

以降では, 基準化した株価前日差を  $\Delta P_t$  と記述し, 分析の対象とする。

## 3 推定とアルゴリズム

推定対象となる未知パラメタは  $\{\phi_k\}_{k=1}^p, \{\theta_k\}_{k=1}^q, \sigma^2$  に加え, 観測できなかった時点の潜在株価も推定対象とする。なお, 推定アルゴリズムにはマルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC法) を用いる。推定手順の概略は以下のとおりである。

### 1. データ補間

- (a) 値幅制限に抵触した場合, すなわち,  $\Delta P_t = \pm 1$  の場合に  $\Delta X_t$  を発生。
- (b) 値幅制限に抵触しない場合, すなわち,  $|\Delta P_t| < 1$  の場合, 以下の関係式から  $\Delta X_t$  を更新。

$$\Delta X_t = P_t - X_{t-1} = \sum_{j=1}^t \Delta P_j - \sum_{j=1}^{t-1} \Delta X_j$$

### 2. 未知パラメタの推定

(a) 仮定した ARMA( $p, q$ ) モデルに応じて,  $\sigma_{pq}^2, \{\phi_{pj}\}_{j=1}^p, \{\theta_{qj}\}_{j=1}^q$  を推定.

以降では, 具体例として ARMA(2,2) モデルを仮定した場合の推定方法とアルゴリズムについて述べていく. なお, 時系列モデルに対するベイズ推定と MCMC アルゴリズムの基本については Chib, S. and E. Greenberg, (1994), 伊庭他 (2001), 和合他 (2005), 中妻 (2007), 照井 (2010) を参照されたい.

### 3.1 ベイズ推定

ARMA(2,2) モデルの未知パラメタを推定するためには, 次の 2 つのモデル式を用いる.

$$\Delta X_t = \phi_{21}\Delta X_{t-1} + \phi_{22}\Delta X_{t-2} + \theta_{21}u_{t-1} + \theta_{22}u_{t-2} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_{22}^2) \quad (1)$$

$$\Delta X_t = \phi_{11}\Delta X_{t-1} + \theta_{21}u_{t-1} + \theta_{22}u_{t-2} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_{12}^2) \quad (2)$$

いま,  $\Delta X_1, \Delta X_2$  を所与とし,  $u_0 = u_{-1} = 0$  としたときの, 条件付尤度関数は,

$$\prod_{t=3}^n (2\pi\sigma_{22}^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{22}^2} (\Delta X_t - \phi_{21}\Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2} - \theta_{21}u_{t-1} - \theta_{22}u_{t-2})^2\right\} \quad (3)$$

と表せる.

ここで,  $\sigma_{22}^2$  の事前分布として逆ガンマ分布, すなわち  $\sigma_{22}^2 \sim IG(\alpha_0, \beta_0)$  を選択する. このとき,  $\Delta \mathbf{X} = \{\Delta X_t\}_{t=1}^n$  と  $\phi_{21}, \phi_{22}, \theta_{21}, \theta_{22}$  が与えられたときの  $\sigma_{22}^2$  の条件付事後分布は,

$$\begin{aligned} & g(\sigma_{22}^2 | \Delta \mathbf{X}, \phi_{21}, \phi_{22}, \theta_{21}, \theta_{22}) \\ & \propto (\sigma_{22}^2)^{-(1+\alpha_0)} \exp\left(-\frac{\beta_0}{\sigma_{22}^2}\right) \times (2\pi\sigma_{22}^2)^{-(n-2)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{22}^2} \sum_{t=3}^n (\Delta X_t - \phi_{21}\Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2})^2\right\} \\ & = (\sigma_{22}^2)^{-(\alpha_1+1)} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_{22}^2}\beta_1\right) \end{aligned}$$

で与えられる. ただし,

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{n-2}{2}, \quad \beta_1 = \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{t=3}^n (\Delta X_t - \phi_{21}\Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2} - \theta_{21}u_{t-1} - \theta_{22}u_{t-2})^2$$

である. すなわち,  $\sigma^2$  の条件付事後分布はパラメタ  $\alpha_1, \beta_1$  をもつ逆ガンマ分布で表される.

つぎに,  $\phi_{22}$  のサンプリングについて述べる. いま,  $\phi_{22}$  の事前分布を一様分布, すなわち,  $\phi_{22} \sim U(-1, 1)$  とする. このとき, 条件付き事後分布は

$$g(\phi_{22} | \Delta \mathbf{X}, \phi_{21}, \theta_{21}, \theta_{22}, \sigma_{22}^2) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{22}^2} (\phi_{22} - \mu_{\phi_{22}})^2\right\} \times I_{(-1,1)}(\phi_{22})$$

で与えられる. ただし,

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi_{22}}^2 &= \sigma_{22}^2 / \sum_{t=3}^n \Delta X_{t-2}^2 \\ \mu_{\phi_{22}} &= \frac{\sum_{t=3}^n \Delta X_t \Delta X_{t-2} - \phi_{21} \sum_{t=3}^n \Delta X_{t-1} \Delta X_{t-2} - \theta_{21} \sum_{t=3}^n u_{t-1} \Delta X_{t-2} - \theta_{22} \sum_{t=3}^n u_{t-2} \Delta X_{t-2}}{\sum_{t=3}^n \Delta X_{t-2}^2} \end{aligned}$$

である。すなわち、 $\phi_{22}$  の条件付事後分布は、平均  $\mu_{\phi_{22}}$ 、分散  $\sigma_{\phi_{22}}^2$  の切断正規分布である。

続いて、 $\theta_{22}$  のサンプリングについて述べる。いま、 $\theta_{22}$  の事前分布を一様分布、すなわち、 $\theta_{22} \sim U(-1, 1)$  とする。このとき、条件付き事後分布は、

$$g(\theta_{22} | \Delta \mathbf{X}, \phi_{21}, \phi_{22}, \theta_{21}, \sigma_{22}^2) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\theta_{22}}^2} (\theta_{22} - \mu_{\theta_{22}})^2 \right\} \times I_{(-1,1)}(\theta_{22})$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_{22}}^2 &= \sigma_{22}^2 / \sum_{t=3}^n \Delta u_{t-2}^2 \\ \mu_{\theta_{22}} &= \frac{\sum_{t=3}^n \Delta X_t u_{t-2} - \phi_{21} \sum_{t=3}^n \Delta X_{t-1} u_{t-2} - \phi_{22} \sum_{t=3}^n \Delta X_{t-2} u_{t-2} - \theta_{21} \sum_{t=3}^n u_{t-1} u_{t-2}}{\sum_{t=3}^n u_{t-2}^2} \end{aligned}$$

である。すなわち、 $\theta_{22}$  の条件付事後分布は、平均  $\mu_{\theta_{22}}$ 、分散  $\sigma_{\theta_{22}}^2$  の切断正規分布である。

### 3.2 レビンソルダービンアルゴリズムについて

はじめに、モデル式 (2) を仮定した場合の  $\phi_{11}$  のサンプリングを行う。いま、 $\phi_{11}$  の事前分布を一様分布、すなわち、 $\phi_{11} \sim U(-1, 1)$  とする。このとき、条件付き事後分布は

$$g(\phi_{11} | \Delta \mathbf{X}, \theta_{21}, \theta_{22}, \sigma_{12}^2) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\phi_{11}}^2} (\phi_{11} - \mu_{\phi_{11}})^2 \right\} \times I_{(-1,1)}(\phi_{11})$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi_{11}}^2 &= \sigma_{12}^2 / \sum_{t=3}^n \Delta X_{t-1}^2 \\ \mu_{\phi_{11}} &= \frac{\sum_{t=3}^n \Delta X_t \Delta X_{t-1} - \theta_{21} \sum_{t=3}^n u_{t-1} \Delta X_{t-1} - \theta_{22} \sum_{t=3}^n u_{t-2} \Delta X_{t-1}}{\sum_{t=3}^n \Delta X_{t-2}^2} \end{aligned}$$

である。すなわち、 $\phi_{11}$  の条件付事後分布は、平均  $\mu_{\phi_{11}}$ 、分散  $\sigma_{\phi_{11}}^2$  の切断正規分布である。

いま、サンプリングによって得られた  $\phi_{11}$  と  $\phi_{22}$  を利用し、以下のレビンソン・ダービンアルゴリズム (Brockwell and Davis(1991), 北川 (2005)) の関係式をもとに  $\phi_{21}$  を求める。

$$\phi_{21} = \phi_{11} - \phi_{22} \phi_{11} \quad (4)$$

### 3.3 インパルス応答関数の利用

これまでの議論から、以下のパラメタはすでに得られていると仮定する。具体的には、 $\phi_{21}$ 、 $\phi_{22}$ 、 $\theta_{22}$ 、 $\sigma_{22}$  が得られているとき、以下のインパルス応答関数 (北川 (2005)) を利用した関係式をもとに  $\theta_{21}$  を求める。

$$\theta_{21} = \frac{C_1 - \phi_{21} C_0 - \phi_{22} C_1 - \theta_{22} \phi_{21} \sigma_{22}^2}{(1 + \theta_{22}) \sigma_{22}^2} \quad (5)$$

ただし、 $C_k$  は  $k$  次の自己共分散関数である。

### 3.4 データ補間について

最後に、 $\Delta X_t$  のデータ補間について述べる。

値幅制限に抵触した時点では、潜在株価に当てはめたモデルにもとづいたデータ補間を行うことで、観測ができなかった潜在株価の値を推定する。

以下では、潜在株価の前日差に対して ARMA(2,2) を仮定した場合における、具体的なデータ補間について説明する。各  $t$  時点では、以下の3つの場合に分けられる。

1. ストップ高（値幅制限の上限に抵触）の場合。
2. ストップ安（値幅制限の下限に抵触）の場合。
3. それ以外

それぞれの場合において、具体的な手順は以下の通りである。なお、第  $i$ -step におけるサンプリングを  $\Delta X_t[i]$  と記述する。このとき、 $(i-1)$ -step までのサンプリングは全て得られているものとする。

1.  $\Delta P_t = 1$  : ストップ高（値幅制限の上限に抵触）の場合の補間を以下のサンプリングによって行う。

$$\Delta X_t[i] \sim TN_{(1,\infty)}(\mu_t[i], \sigma_t^2[i-1])$$

より  $\Delta X_t[i]$  を発生する。ただし、

$$\mu_t[i] = \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} & \{\phi_{21}[i-1](\Delta X_{t-1}[i] + \Delta X_{t+1}[i-1]) + \phi_{22}[i-1](\Delta X_{t-2}[i] + \Delta X_{t+2}[i-1]) \\ & - \phi_{21}[i-1]\phi_{22}[i-1](\Delta X_{t-1}[i] + \Delta X_{t+1}[i-1]) + \theta_{21}[i-1]u_{t-1}[i] + \theta_{22}[i-1]u_{t-2}[i] \\ & - \theta_{21}[i-1](\phi_{21}[i-1]u_t[i-1] + \phi_{22}[i-1]u_{t+1}[i-1]) \\ & - \theta_{22}[i-1](\phi_{21}[i-1]u_{t-1}[i] + \phi_{22}[i-1]u_t[i-1])\} / (1 + \phi_{21}^2[i-1] + \phi_{22}^2[i-1]), \\ & t = 3, 4, \dots, n-2 \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} & \{\phi_{21}[i-1](\Delta X_{t-1}[i] + \Delta X_{t+1}[i-1]) + \phi_{22}[i-1]\Delta X_{t-2}[i] - \phi_{21}[i-1]\phi_{22}[i-1]\Delta X_{t-1}[i] \\ & + \theta_{21}[i-1]u_{t-1}[i] + \theta_{22}[i-1]u_{t-2}[i] - \theta_{21}[i-1]\phi_{21}[i-1]u_t[i-1] \\ & - \theta_{22}[i-1]\phi_{21}[i-1]u_{t-1}[i]\} / (1 + \phi_{21}^2[i-1]), \\ & t = n-1 \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} & \phi_{21}[i-1]\Delta X_{t-1}[i] + \phi_{22}[i-1]\Delta X_{t-2}[i] + \theta_{21}[i-1]u_{t-1}[i-1] + \theta_{22}[i-1]u_{t-2}[i-2], \\ & t = n \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (6)$$

$$\sigma_t^2[i] = \begin{cases} \sigma_{22}^2[i] / (1 + \phi_{21}^2 + \phi_{22}^2) & t = 3, 4, \dots, n-2 \\ \sigma_{22}^2[i] / (1 + \phi_{21}^2) & t = n-1 \\ \sigma_{22}^2[i] & t = n \end{cases} \quad (7)$$

である。

2.  $\Delta P_t = -1$ : ストップ安 (値幅制限の下限に抵触) の場合の補間を以下のサンプリングによって行う.

$$\Delta X_t \sim TN_{(-\infty, -1)}(\mu_t[i], \sigma_t^2[i-1])$$

より  $\Delta X_t[i]$  を発生する. ただし,  $\mu_t[i], \sigma_t^2[i-1]$  は (6), (7) を参照のこと.

3.  $|\Delta P_t| < 1$ : 値幅制限に抵触しない場合の算出.

$$\Delta X_t[i] = \sum_{j=1}^t \Delta P_j[i] - \sum_{j=1}^{t-1} \Delta X_j[i]$$

以上によりデータ補間された潜在株価の系列を  $\Delta X[i] = \{\Delta X_t[i]\}_{t=1}^n$  とおく.

### 3.5 アルゴリズム

これまでに述べた推定法とデータ補間法を組み合わせることにより, 以下のアルゴリズムを得る.

1. データ補間:  $\Delta X[i]$  をサンプリング.
2. パラメタ推定
  - (a)  $\sigma_{12}^2[i]$  の発生
  - (b)  $\phi_{11}[i]$  の発生
  - (c)  $\sigma_{22}^2[i]$  の発生
  - (d)  $\phi_{22}[i]$  の発生
  - (e)  $\phi_{21}[i]$  の更新: レビンソン・ダービンアルゴリズムの利用
  - (f)  $\theta_{22}[i]$  の発生
  - (g)  $\theta_{21}[i]$  の更新: インパルス応答関数の利用

上記アルゴリズムの 1. から 2-(a)~(g) を, 非常に大きな回数  $M$  まで繰り返す. 十分大きな数  $N(N < M)$  に対して  $M - N$  個の平均値を推定値として採用する. 具体的には,

$$\hat{\sigma}_{22}^2 = \frac{1}{M-N} \sum_{i=N+1}^M \sigma_{22}^2[i], \quad \hat{\phi}_{21}^2 = \frac{1}{M-N} \sum_{i=N+1}^M \phi_{21}^2[i], \quad \hat{\phi}_{22}^2 = \frac{1}{M-N} \sum_{i=N+1}^M \phi_{22}^2[i],$$

$$\hat{\theta}_{21}^2 = \frac{1}{M-N} \sum_{i=N+1}^M \theta_{21}^2[i], \quad \hat{\theta}_{22}^2 = \frac{1}{M-N} \sum_{i=N+1}^M \theta_{22}^2[i], \quad \Delta \hat{X}(t) = \frac{1}{M-N} \sum_{i=N+1}^M \Delta X(t)[i]$$

を推定値として採用する.

## 4 数値実験

### 4.1 株価変動の構造に値幅制限が与える影響

ここでは、2011年3月1日から5月31日までの3ヶ月間における東京電力の株価に対して、本稿で提案するデータ補間と推定アルゴリズムを適用した結果を述べる。適用したモデルは、ARモデルなし、AR(1)、AR(2)、MA(1)、MA(2)、ARMA(1,1)、ARMA(1,2)、ARMA(2,1)、ARMA(2,2)の9通りである。また、モデル選択のためにDICを計算した。なお、DICの詳細については、照井(2010)、大森・渡部(2008)を参照されたい。

値幅制限が株価変動の構造に与える影響を確認するために、以下の2通りの場合について数値実験を行った。データ補間と同時にパラメタ推定を行った場合と、データ補間を行わずに価格の打ち切りを考慮せずにパラメタ推定を行った場合である。前者の結果を表2に、後者の結果を表3に、それぞれまとめている。

表 2: 推定結果 1: データ補間と同時に未知パラメタを推定した結果

モデル	DIC	$\sigma^2$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	決定係数
ARMA モデルなし	117.825	0.419					
AR(1)	116.671	0.419	0.298				0.082
AR(2)	118.537	0.439	0.322	-0.088			0.093
MA(1)	121.901	0.466			0.263		0.069
MA(2)	118.895	0.447			0.344	0.001	0.057
ARMA(1,1)	119.187	0.430	0.179		0.120		0.082
ARMA(1,2)	118.578	0.446	0.173		0.111	0.027	0.080
ARMA(2,1)	122.210	0.460	0.062	0.028	0.247		0.074
ARMA(2,2)	132.160	0.532	0.067	-0.285	0.217	0.204	0.082

データ補間を行わない場合では、値幅制限によって日々の価格変動の大きさが抑えられてしまうために、残差分散 $\sigma^2$ の推定値は小さい。価格変動リスクを計測する場合には $\sigma^2$ の大きさを用いるため、適切なデータ補間を行わない場合には、リスクを過小評価してしまうおそれがある。

値幅制限が価格変動の構造に与える影響について考える。データ補間を行った場合で最小のDICを取るモデルはAR(1)であり、その値は116.671である。次に小さい値をとるのは、自己回帰モデルを含まないものであり、その値は117.825であり、両者の差は小さい。また、全てのARMAモデルの決定係数を見渡しても0.057~0.093と

表 3: 推定結果 1: データ補間を行わずに未知パラメタを推定した結果

モデル	DIC	$\sigma^2$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	決定係数
ARMA モデルなし	89.309	0.273					
AR(1)	79.637	0.236	0.418				0.145
AR(2)	81.418	0.244	0.438	-0.044			0.148
MA(1)	81.209	0.244			0.424		0.133
MA(2)	87.045	0.246			0.454	-0.029	0.131
ARMA(1,1)	81.986	0.240	0.361		0.073		0.147
ARMA(1,2)	80.550	0.243	0.308		0.105	0.064	0.151
ARMA(2,1)	83.019	0.250	0.115	0.112	0.366		0.141
ARMA(2,2)	85.853	0.258	0.457	0.113	-0.033	-0.113	0.122

値が小さく、説明力が低いことが分かる。すなわち、かろうじて AR(1) モデルのあてはまりが良いものの、それほど大きな自己回帰構造を有してはいないと考えられる。

一方で、データ補間を行わず、価格の打ち切りを考慮しない場合でも AR(1) が最小の DIC の値 79.637 を取る。選ばれるモデルはデータ補間を行った場合と同じ AR(1) であるが、その性質は次の点で異なっている。ARMA モデルを仮定しないものの DIC は 89.309 と、9つの場合の中で最も大きい値を取っており、何らかの ARMA モデルを仮定したほうがモデルとしての妥当性を持っていることが示される。さらに、AR(1) をはじめとした ARMA モデルを当てはめた場合の決定係数は 0.122 ~ 0.151 と比較的大きな値をとっていることから、自己回帰構造を有していると考えることが妥当である。

以上より、価格の打ち切りを考慮しない場合には自己回帰構造を有していると考えられる。ここで、AR の係数に注目する。表 3 より、AR の係数は正の値をとっていることから、2.1 節で述べた「値幅制限という制度によって引き起こされる正の自己回帰構造」が現れたと考えられる。

このように、価格の打ち切りによって価格変動の構造が変化する可能性があるために、モデルのあてはめとパラメータ推定は、データ補間と同時に行う必要がある。最後に、データ補間によって推定された潜在株価の前日差を具体的に示そう。図 5 では、データ補間を行って推定した結果の中で DIC が最小となるモデルである AR(1) によって推定された潜在株価の前日差  $\Delta \hat{X}_t$  と、株価の前日差  $\Delta P_t$  を示している。

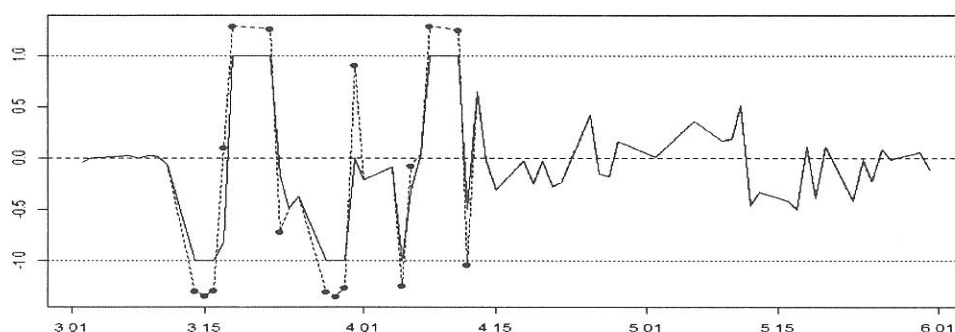


図 5: データ補間 AR(1) モデルでデータ補間を行った  $\Delta X_t$  と  $\Delta P_t$

図 5 では、実線が  $\Delta P_t$ 、破線が  $\Delta \hat{X}_t$  を示し、両者が異なる値を取った時点に●を付している。値幅制限を超えた時点だけでなく、その後の時点でも両者の値が異なっていることに注意を向ける。特に 3 月 17 日と 3 月 31 日の両日では、 $\Delta P_t$  が負に対して  $\Delta \hat{X}_t$  が正の値を取っており、図 3-(b) での想定と近い現象が起こったことを確認できる。

## 4.2 価格変動リスクの計測

市場リスクを計測する指標として VaR と、cVaR(conditional Value at Risk) を算出する。VaR とは、保有する資産において、一定の確率で発生し得る最大損失金額のことである。一方で cVaR とは、ある水準  $\text{VaR}_{\alpha \times 100\%}$  を下回るという条件のもとでの条件付期待値として定義される。

具体的なリスク指標の算出手順は以下の通りである。第 4.1 節で選択された AR(1) モデルとパラメータの値を用いて、5 日間の潜在株価を 10,000 本発生する。それぞれの系列に対して、表 1 の制限値幅の値を用いて実際の株価の水準に変換をする。さらに、値幅制限の影響を考えるため、2つの場合分けを行った。1つ目は、実際の制度



に従い値幅制限によって価格の打ち切りを行った場合である。もう一方は、値幅制限を導入せずに制度がない場合、つまり、日々の価格変動の要因が全て価格に織り込まれる場合である。保有期間による違いを考えるために、1日間、3日間、5日間保有した時点での損益分布をそれぞれの場合について作成し、2つのリスク指標も合わせて算出した。

リスク指標の結果を表4にまとめ、それぞれの損益分布のヒストグラムを図6に示した。1日間の保有では、値

表4: 保有期間に応じた価格変動リスクの値

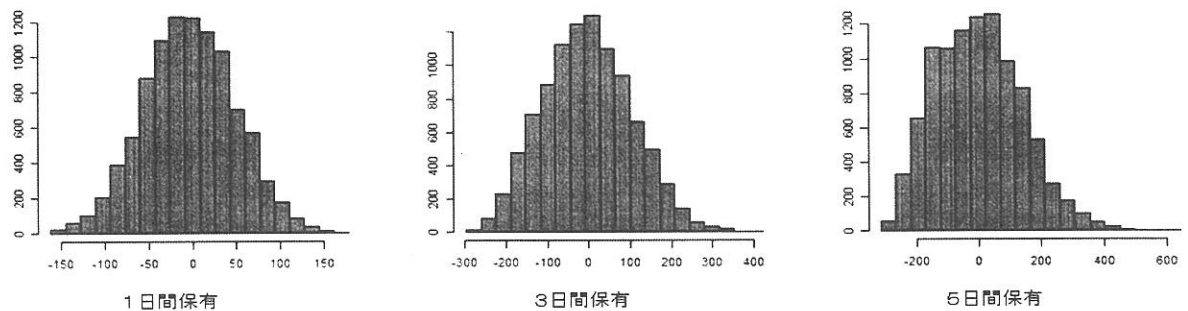
保有期間		VaR 下側 1%(円)	cVaR1% (円)
1 日間	値幅制限なし	-125.00	-137.99
	値幅制限あり	-80.00	-80.00
3 日間	値幅制限なし	-224.00	-243.93
	値幅制限あり	-207.00	-209.67
5 日間	値幅制限なし	-259.00	-274.84
	値幅制限あり	-249.00	-261.39

幅制限がない場合とある場合では大きな違いが生じている。この日では制限値幅は80円であるために、値幅制限がある場合では、VaR, cVaRの双方ともに当日の最大下落幅である-80.00円を示している。3日間の保有では、その前日である2日目の株価の状態によって制限値幅が異なるため、全ての系列で一定の下限があるわけではない。VaRでは、値幅制限を考えない場合には-224.00円であり、値幅制限を考えた場合には-207.00円である。両者はおおよそ10%程度の乖離が生じている。cVaRについても、値幅制限を考えない場合には-243.93円であり、値幅制限を考えた場合には-209.67円であり、両者はおおよそ15%程度の乖離がある。続いて5日間の保有では、VaRでは、値幅制限を考えない場合には-259.00円であり、値幅制限を考えた場合には-249.00円である。両者はおおよそ4%程度の乖離に収まり、cVaRについても、値幅制限を考えない場合には-274.84円であり、値幅制限を考えた場合には-261.39円であり、両者はおおよそ5%程度の乖離にとどまっている。すなわち、保有期間を長くするにつれて値幅制限がリスク指標に与える影響が小さくなり、1週間（5営業日）の保有では両者の差はほとんど見られなくなる。

このことは、図6に表した損益分布の形状からも分かる。上段は、値幅制限を考慮しなかった場合について、左から1日間、3日間、5日間の保有を行った場合における損益分布を示している。下段は、値幅制限を考慮した場合について、それぞれの損益分布を示している。はじめに、1日間の保有における両者の損益分布を比較する。値幅制限を考慮した場合では、損益分布の上端と下端が値幅制限の±80円のところで打ち切られていることが示されており、値幅制限の影響が強いことが分かる。3日間の保有では、値幅制限の影響が弱まり、両者の損益分布の形状が近付いていることが分かる。しかしながら、値幅制限を考慮した場合の損益分布では、上端と下端が打ち切られている様子が確認でき、値幅制限の影響が少なからず残っていることが分かる。5日間の保有になると、損益分布の形状について視覚的な違いがほとんど確認できず、値幅制限の影響がかなり弱くなったことが分かる。

以上より、値幅制限が価格変動リスクに与える影響は短期間の場合に大きく、保有期間を延ばしていくに従って影響が薄れていくことが示唆される。特に、1週間の保有を考えた場合にはほとんど影響がなくなっていることが分かる。

### 値幅制限なし



### 値幅制限あり

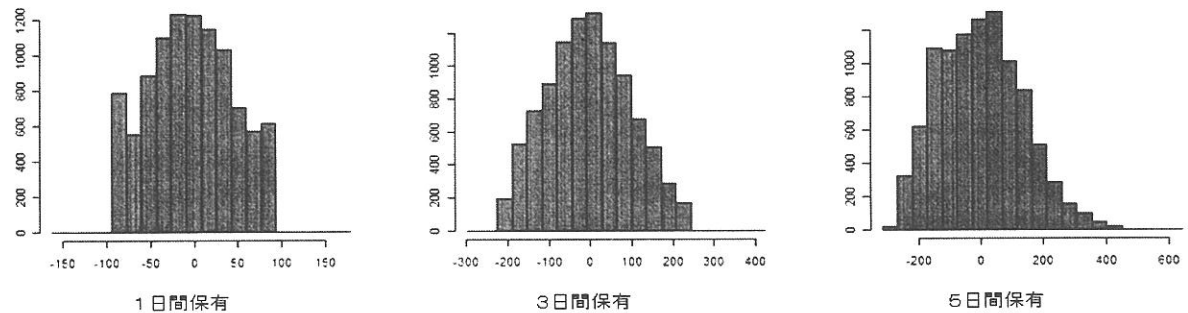


図 6: 東京電力の株を保有し続けた場合の損益分布

## 5 まとめ

東証に上場された株式について、値幅制限による価格の打ち切りを考慮した時系列モデリングを行った。値幅制限がなかったならば実現したであろう本来の株価について、潜在株価という系列を新たに導入した。東証での制限値幅は、前日の終値によって変化するために一定の値ではない。さらに、時点によっては価格変動の大きさが異なるために、価格変動の幅を一定とした時系列モデルを当てはめることの妥当性が薄い。そのため、株価の前日差を日々の制限値幅を用いて基準化することで、価格の前日差を  $[-1, 1]$  の区間を値域とする系列に変換し、時系列モデルの妥当性を向上させた。

基準化した潜在株価の前日差を時系列モデルの対象とした。潜在株価は、その定義上、一部観測不可能な系列である。そのため、未知パラメタの推定には観測不可能であった時点のデータ補間を同時に行う推定アルゴリズムを提案した。また、ARMA モデルのパラメタ推定について、AR 部分についてはレビンソン・ダービンアルゴリズムを、MA 部分についてはインパルス応答関数を利用した係数の更新を行い、サンプリングを効率的に行った。

値幅制限を考慮しない場合には価格変動リスクを過小評価する恐れや、値幅制限の制度による見せかけの自己回帰構造が現れる可能性があるために、未知パラメタの推定ではデータ補間を同時に行うことの重要性が示された。その一方で、値幅制限が価格変動リスクに与える影響は、保有期間を延ばすとともに薄れていき、1週間程度の保有ではほとんど影響が見られないことも示された。

## 参考文献

- [1] Brockwell, P. J., and Davis R. A., (1991) Time series: theory and methods second edition, Springer-Verlag.
- [2] Chib, S. and E. Greenberg, (1994). Bayes inference in regression models with ARMA ( $p, q$ ) errors, Journal of Econometrics, **64**, 183–206.
- [3] Geweke, J. (1991). Efficient simulation from the multivariate normal and student-t distributions subject to linear constraints, in E.M. Keramidas (ed.), *Computing Science and Statistics: Proceedings of the 23rd Symposium on the Interface*, 571–578. Fairfax: Interface Foundation of North America, Inc.
- [4] Marriott, J.(1996). *Bayesian Analysis of ARMA Processes: Complete Sampling -Based Inference under Exact Likelihoods*, Bayesian analysis in Statistics and Econometrics Willey series Probab. Statist Appl.Probab. Statist, Wiley New York, pp.243–256.
- [5] 伊庭幸人, 種村正美, 大森裕浩, 和合肇, 佐藤整尚, 高橋明彦 (2001). 『計算機統計 マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺』 岩波書店.
- [6] 北川源四郎 (2005). 『時系列解析入門』 岩波書店.
- [7] 照井伸彦 (2010). 『R によるベイズ統計分析』 朝倉書店.
- [8] 中妻照雄 (2007). 『入門ベイズ統計学』 朝倉書店.
- [9] 和合肇 (編)(2005). 『ベイズ計量経済分析』 東洋経済新報社.
- [10] 大森裕浩, 渡部敏明 (2008) 「MCMC 法とその確率的ボラティリティ変動モデルへの応用」 国友直人・山本拓 (編) 『21 世紀の統計科学 I 社会・経済と統計科学』 東京大学出版会, 第 9 章, 223-266.